بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب سجاد آدینه‌وند متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

سجاد آدینه‌وند

امضاء:

تهران- لویزان- کد پستی ۱۶۷۸۸- صندوق پستی ۱۶۳- ۱۶۷۸۵- تلفن ۹- ۲۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی ۲۳۷۴)- نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱-
پست الکترونیکی: **srttu@srttu.ac.ir**

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه

عدد خوشه‌ای بعضی از گروه‌های خاص

نگارش

سجاد آدینه‌وند

استاد راهنما: دکتر فرزانه نوروزی لرکی

استاد مشاور: دکتر مجتبی قربانی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در

رشته ریاضی محض

مهر ۱۳۹۰

تاییدیه هیات داوران

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند. آنان که فروغ نگاهشان ،گرمی کلامشان و روشنی رویشان سرمایه های جاودانه من است. در برابر وجود گرامیشان زانوی ادب بر زمین می زنم و با دلی مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستشان بوسه میزنم.

تقدیر و تشکر

خالق منان را که همواره لطفش شامل حال این حقیر بوده است، شاکرم. شایسته است زحمات پدر و مادر عزیزم که اولین معلمان زندگی‌ام بوده و نماد صبر و شکیبایی می‌باشند را ارج نهم. همچنین از همسر عزیز و مهربانم، که وجودش مرا آکنده از امید و آرامش می‌کند، به خاطر سختیهای این دوره سپاسگزارم.

لازم می‌دانم از همه دبیران و اساتیدی که مرا تا رسیدن به این مرحله یاری نموده‌اند، بالاخص خانم دکتر فرزانه نوروزی تشکر کنم. از دوستان عزیزم آقایان جمیل صدوقی، بهنام مسعودیان، نورالله درویشی و محمدرضا محمدی، امین نصاری و همچنین خواهر مهربانم که با تمام وجود، در تمام مراحل، از جمله تایپ این پایان نامه مرا یاری نموده‌اند، تقدیر می‌نمایم و توفیقات روزافزون را برایشان آرزومندم.

چکیده

فرض کنید G گروه غیرآبلی و $Z(G)$ نمایانگر مرکز آن باشد. به گروه فوق گراف Γ_G را به صورتی نسبت می‌دهیم که $G \setminus Z(G)$ مجموعه‌ی رئوس گراف باشد و هم‌چنین دو عضو y, x با هم مجاور باشند، اگر و تنها اگر $xy \neq yx$. این گراف را گراف ناجابه‌جایی گروه می‌نامند.

فرض کنید A یک گراف باشد. زیرمجموعه‌ی X از رئوس گراف A را یک خوشه می‌نامیم هرگاه هر دو رأس X به هم مجاور باشند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین خوشه‌ی A را با $\omega(A)$ نمایش داده، و آن را عدد خوشه‌ای گراف A می‌نامیم.

ما در این پایان‌نامه ساختار گروه‌های غیرحل‌پذیر G که در شرط $\omega(\Gamma_G) \leq 21$ صدق می‌کنند را مورد بررسی قرار می‌دهیم که عدد ۲۱، عدد خوشه‌ای مربوط به گراف ناجابه‌جایی گروه ساده‌ی غیرآبلی A_5 می‌باشد. و نشان می‌دهیم که چنین گروهی با $Z(G) \times A_5$ یکریخت می‌باشد. علاوه بر این نشان می‌دهیم طول مشتق گروه حل‌پذیر و غیرآبلی G حداکثر $2\omega(\Gamma_G) - 3$ می‌باشد. هم‌چنین در این‌جا به بررسی ساختار گروه‌های غیرحل‌پذیر G که در شرط $\omega(\Gamma_G) \leq 57$ صدق می‌کنند می‌پردازیم که عدد ۵۷، عدد خوشه‌ای مربوط به گراف ناجابه‌جایی گروه خطی خاص تصویری $PSL(2,7)$ می‌باشد و در آخر نیز به بررسی عدد خوشه‌ای مربوط به گراف ناجابه‌جایی گروه‌های ساده مینیمال می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: گروه حل‌پذیر، عدد خوشه‌ای، گراف ناجابه‌جایی.

فهرست

۱. فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی

۲. فصل دوم گروه‌های غیر حل‌پذیر G با شرط $\omega(\Gamma_G) \leq 21$

۳. عدد خوشه‌ای گراف‌های ناجابه‌جایی وابسته به گروه‌های معین

فهرست علائم و اختصارات

عدد خوشه‌ای گراف G .... $\omega(G)$

عدد رنگی گراف G .... $\chi(G)$

عدد استقلال گراف G .... $\alpha(G)$

A با B یکریخت است .... $A \cong B$

A زیرگروه B است .... $A \leq B$

H زیرگروه مشخص G است .... $H\ ch\ G$

جابه‌جاگر a و b .... $[a, b]$

زیرگروه مشتق G .... G'

مشتق iام G .... $G^{(i)}$

مرکز گروه G .... $Z(G)$

ابرمرکز گروه G .... $Z^*(G)$

مرکزساز H در G .... $C_G(H)$

نرمال‌ساز H در G .... $N_G(H)$

گروه خودریختی‌های G .... $Aut(G)$

گروه خودریختی‌های داخلی G .... $Inn(G)$

اندیس H در G .... $|G:H|$

تعداد p- زیرگروه‌های سیلوی متمایز گروه متناهی G .... $v_p(G)$

مجموعه‌ی همه p- زیرگروه‌های سیلوی گروه متناهی G .... $Syl_p(G)$

nمین جمله سری مرکزی پایینی G .... $\Gamma_n(G)$

$(n+1)$مین جمله سری مرکزی بالایی G .... $Z_n(G)$

گروه متقارن از مرتبه n .... S_n

گروه متناوب از مرتبه n .... A_n

گروه دووجهی از مرتبه $2n$ .... D_{2n}

گروه کواترنیون تعمیم یافته از مرتبه $4n$ .... Q_{4n}

گروه خطی عام از درجه n روی F .... $GL(n,F)$

گروه خطی خاص از درجه n روی F .... $SL(n,F)$

گروه خطی عام تصویری از درجه n روی F .... $PGL(n,F)$

گروه خطی خاص تصویری از درجه n روی F .... $PSL(n,F)$

گروه یکانی عام فضای هرمیتی (V,f) .... $GU(V,f)$

گروه متعامد عام فضای متعامد (V,f) جای‌که f فرم دو خطی است .... $GO(V,f)$

گروه یکانی خاص فضای هرمیتی (V,f) .... $SU(V,f)$

گروه متعامد خاص فضای متعامد (V,f) .... $SO(V,f)$

گروه یکانی خاص تصویری فضای هرمیتی (V,f) .... $PSU(V,f)$

گروه متعامد خاص تصویری فضای متعامد (V,f) .... $PGU(V,f)$

پیشگفتار

مطالعه‌ای ساختارهای جبری، با استفاده از خواص گراف‌ها، یکی از موضوعات تحقیقاتی جذاب در بیست سال اخیر می‌باشد و منجر به مطرح شدن نتایج بسیار جالب و سؤالات قابل توجهی گشته است. مقالات کثیری به چاپ رسیده که در آن‌ها گرافی خاص را به یک ساختار جبری مانند گروه یا حلقه نسبت داده‌اند و به کمک خواص این گراف، نتایج ارزشمندی در مورد ویژگی‌های جبری آن ساختار یافته‌اند.

نخستین بار این نظریه در مورد گروه‌ها توسط دکتر عبدالهی[۱]، دکتر اکبری[۲] و دکتر میمنی[۳] مطرح شده است که در مقاله‌ی آن‌ها، به هر گروه غیرآبلی، گراف ناجابه‌جایی آن نسبت داده می‌شود یعنی دو عنصر گروه با هم مجاورند اگر و تنها اگر با هم جابه‌جا نشوند[13]. به یک گروه دلخواه می‌توان به روش‌های مختلفی یک گراف را نسبت داد. در این‌جا همان‌طور که در چکیده پایان‌نامه مطرح شد، به مطالعه‌ی عدد خوشه‌ای گراف ناجابه‌جایی گروه‌های غیرحل‌پذیر خواهیم پرداخت. حال با بیان خلاصه‌ای از آن‌چه پیش رو دارید، بحث را آغاز می‌کنیم. این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است.

ابتدا در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های بعد راه‌گشا می‌باشند، گرد هم می‌آوریم. اکثر قضیه‌ها بدون اثبات آورده شده‌اند و در مقابل هر یک مرجع مناسبی معرفی شده است تا در صورت نیاز، جهت مرور اثبات به آن مراجعه شود[1] ,[3]. در فصل دوم به بررسی گروه‌های غیرحل‌پذیر G که در شرط $\omega(\Gamma_G) \leq 21$ صدق می‌کنند می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چنین گروهی با $Z(G) \times A_5$ یکریخت می‌باشد. علاوه بر این نشان می‌دهیم طول مشتق گروه حل‌پذیر و غیرآبلی G حداکثر $2\omega(\Gamma_G) - 3$ است[8]. در فصل سوم نیز به بررسی ساختار گروه‌های متناهی غیر حل‌پذیر که عدد خوشه‌ای مربوط به گراف ناجابه‌جایی آن‌ها از عدد ۵۷ کمتر یا مساوی است می‌پردازیم، هم‌چنین عدد خوشه‌ای گروه‌های ساده مینیمال $PSL(3,3)$ و $Sz(2^{m+1})$ $(m > 0)$، را محاسبه می‌کنیم[12].

1- A. Abdollahi
2- S. Akbari
3- H.R. Maimani

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه

این فصل را به بیان تعاریف اولیه که در سراسر پایان نامه به کار خواهیم برد و هم‌چنین بیان قضایایی که به آن‌ها استناد خواهیم کرد، اختصاص می‌دهیم. این قضایا بدون اثبات آورده شده‌اند و در مقابل هر یک مرجعی مناسب معرفی شده است که خواننده در صورت نیاز می‌تواند با مراجعه به آن‌ها اثبات قضیه را مشاهده کند.

۱-۱ تعاریف و قضایای مربوط به نظریه گراف

۱-۱-۱ تعریف. فرض کنید G یک گراف ساده باشد(گرافی بدون یال جهت‌دار و بدون طوقه) مجموعه‌ی رئوس گراف G را با $V(G)$، و مجموعه‌ی یال‌های G را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. مرتبه‌ی G را، $|V(G)|$ تعریف می‌کنیم و هم‌چنین برای هر $v \in V(G)$ درجه رأس v را با $d(v)$ نشان می-دهیم و آن را برابر با تعداد یال‌های مجاور به v تعریف می‌کنیم.

۱-۱-۲ تعریف. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعه‌ی X از $V(G)$ را یک خوشه نامیم هرگاه هر دو رأس X توسط یک یال به یک‌دیگر متصل باشند. اگر تعداد عناصر خوشه‌های گراف G کران‌دار باشد، اندازه‌ی بزرگ‌ترین خوشه‌ی G را با $\omega(G)$ نمایش داده و آن را عدد خوشه‌ای G می-نامیم.

۱-۱-۳ تعریف. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعه‌ی S از $V(G)$ را یک مجموعه‌ی مستقل نامیم هرگاه هیچ دو رأسی در S به یک‌دیگر متصل نباشند. اگر تعداد اعضای مجموعه‌های مستقل گراف G کران‌دار باشد، اندازه بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل G را با $\alpha(G)$ نمایش داده و آن را عدد استقلال G می‌نامیم.

۱-۱-۴ تعریف. فرض کنید G یک گراف و $k > 0$ عددی صحیح باشد. یک رنگ‌آمیزی k-رأسی از گراف G، اختصاص دادن k رنگ به رئوس گراف G می‌باشد. مینیمم تعداد رنگ‌ها برای رنگ‌آمیزی گراف G به طوری که رئوس مجاور دارای رنگ‌های متفاوت باشند را عدد رنگی گراف G می‌نامیم و آن را با نماد $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۲ تعاریف و قضایای مربوط به مفاهیم جبری

۱-۲-۱ تعریف. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد. H را یک زیرگروه نرمال G گوییم هرگاه به ازای هر x از G، $xH = Hx$.

علامت $H \lhd G$ را برای نشان دادن این‌که H زیرگروه نرمال G است به کار می‌بریم. واضح است که ۱ و G زیرگروه‌های نرمال G اند.

۱-۲-۲ تعریف. گروه G را ساده گوییم هرگاه $G, 1$ تنها زیرگروه‌های نرمال G باشند.

۱-۲-۳ تعریف. فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$. زیر گروه H را یک زیرگروه مشخص G گوییم در صورتی‌که به ازای هر خودریختی G مانند τ، $H\tau \leq H$ که در آن $H\tau = \{h\tau | h \in H\}$.

به آسانی معلوم می شود اگر H زیرگروه مشخص G باشد، آن‌گاه به ازای هر خودریختی مانند τ، $H\tau = H$. هرگاه H زیرگروه مشخص G باشد می‌نویسیم $H\ ch\ G$.

۱-۲-۴ قضیه. فرض کنید G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$ در این‌صورت :

(i) اگر $H\ ch\ G\ ,\ K\ ch\ H$، آن‌گاه $K\ ch\ G$.

(ii) اگر $K\ ch\ G\ ,\ H \lhd G$، آن‌گاه $K \lhd G$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱-۱-۵ از[۱].

۱-۲-۵ تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. برای هر زیرمجموعه‌ی $S \subseteq G$ مرکزساز S در G را با نماد $C_G(S)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$C_G(S) = \{x \in G : xs = sx\ \ \forall s \in S\}$$

هم‌چنین برای هر زیرمجموعه‌ی $H \subseteq G$ نرمال‌ساز H در G را با نماد $N_G(H)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$$

۱-۲-۶ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای غیر خالی باشد. فرض کنیم به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را به علامت $x * g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که:

(i) به ازای هر x از X، $x * 1 = x$ و

(ii) به ازای هر g_1 , g_2 از G و هر x از X، $x * (g_1 g_2) = (x * g_1) * g_2$.

در این صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و $*$ را عمل G بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به جای $x * g$ معمولاً خواهیم نوشت xg.

۱-۲-۷ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوییم g عضو x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی اعضایی از G را که هر عضو X را ثابت نگه می‌دارند، هسته‌ی عمل می‌نامند.

۱-۲-۸ قضیه. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. به ازای هر g از G، تابع $\varphi_g : X \longrightarrow X$ را با ضابطه‌ی $x\varphi_g = xg$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\varphi_g \in S_X$ و نگاشت $\varphi : G \longrightarrow S_X$ با ضابطه‌ی $g \mapsto \varphi_g$ یک همریختی است که هسته‌ی آن با هسته‌ی عمل برابر است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۲-۱-۱ از [1].

همریختی مذکور در قضیه‌ی فوق را نمایش جایگشتی G متناظر با عمل گروه (بر X) نامند. این نمایش را صادق گویند در صورتی که φ یک به‌یک باشد.

۱-۲-۹ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوییم $x_1 \sim x_2$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است. هر رده هم‌ارزی را یک G- مدار، می‌نامیم. اگر $x \in X$ آن‌گاه رده‌ی هم-ارزی شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $Orb(x)$ نشان می‌دهیم.

در صورتی که $Orb(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، عده‌ی اعضای آن را طول مدار x در G می‌نامیم.

۱-۲-۱۰ قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی و $H \leq G$ در این صورت عده‌ی مزدوج‌های متمایز H در G برابر است با $|G : N_G(H)|$. بالاخص، عده‌ی مزدوج‌های H در G، اندیس $|G : H|$ را عاد می‌کند.

برهان. رجوع شود به قضیه ۲-۳-۳ از [1].

۱-۲-۱۱ قضیه. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این‌صورت $C_G(H) \subseteq N_G(H)$ و هم-چنین $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۶-۴-۱ از[۱].

۱-۲-۱۲ نتیجه. فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه نرمال در G باشد، در این‌صورت $C_G(H) \trianglelefteq G$.

۱-۲-۱۳ تعریف. فرض کنید G یک گروه و x و y دو عضو در G باشند در این‌صورت $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$، را جابه‌جاگر x و y می‌نامیم.

۱-۲-۱۴ تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. زیرگروه تولید شده توسط جابه‌جاگرهای گروه G را با G' نشان داده و آن‌را زیرگروه مشتق G می‌نامیم.

۱-۲-۱۵ قضیه. فرض کنید G یک گروه باشد. در این‌صورت G آبلی است اگر و تنها اگر $G' = 1$.

برهان. رجوع شود به صفحه ۱۱۹ از[2].

۱-۲-۱۶ قضیه.شرایط زیر در مورد گروه G برقرارند.

(i) $G' \trianglelefteq G$.

(ii) G/G' گروهی آبلی است و هرگاه $N \trianglelefteq G$ و G/N آبلی باشد، آن‌گاه $G' \leq N$.

برهان. رجوع شود به صفحه ۱۱۹، گزاره ۲-۳ از[2].

۱-۲-۱۷ تعریف. گروه G را تام گویند در صورتی‌که $G' = G$.

۱-۲-۱۸ تعریف. فرض کنید G یک گروه غیربدیهی و M زیرگروه سره از آن باشد. M را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌نامیم در صورتی‌که، اگر $M \leq H \leq G$، آن‌گاه $M = H$ یا $H = G$.

گروه‌های متناهی غیربدیهی G همواره دارای زیرگروه ماکسیمال هستند و هر زیرگروه واقعی G جزء حداقل یک زیرگروه ماکسیمال G است.

۱-۲-۱۹ تعریف. فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p- گروه می-نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو غیرهمانی از G توان مثبتی از p باشد.

۱-۲-۲۰ تعریف. فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد و $n = p^{\alpha}n'$ که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است و p عددی اول است که $p \nmid n'$، در این‌صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^{α} را یک p- زیرگروه سیلوی G می‌نامند.

۱-۲-۲۱ قضیه. فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد و $n = p^{\alpha}n'$، $(\alpha \geq 0)$، و p عددی اول که $p \nmid n'$ در این‌صورت:

(i) گروه G حداقل یک p- زیرگروه سیلو دارد،

(ii) هر p- زیرگروه G جزء یک p- زیرگروه سیلوی G است،

(iii) هر دو p- زیرگروه سیلوی G مزدوج‌اند،

(iv) عده‌ی همه p- زیرگروه‌های سیلوی G همنهشت ۱ به پیمانه p است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۴-۱-۷ از[1].

۱-۲-۲۲ تعریف. فرض کنید G یک گروه متناهی و p عددی اول باشد. در این‌صورت مجموعه‌ی همه‌ی p- زیرگروه‌های سیلوی G را با $Syl_p(G)$، و تعداد اعضای مجموعه‌ی اخیر را با $v_p(G)$ نشان می‌دهیم.

۱-۲-۲۳ قضیه. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد و p عدد اولی باشد که$p||G|$. به علاوه فرض کنید $P \in Syl_p(G)$. در این‌صورت:

(i) $$v_p(G) = |G : N_G(P)|$$

(ii) $$v_p(G)\big||G:P|$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۴-۱-۱۰ از[1].

۱-۲-۲۴ لم. گروه A_5 دارای پنج، ۲- زیرگروه سیلو است.

برهان. رجوع شود به لم ۴-۲-۱۳از [1].

۱-۲-۲۵ تعریف. به ازای هر n طبیعی که $n \geq ۳$، گروه دو وجهی از مرتبه $2n$ که آن را با D_{2n} نشان می‌دهند، زیرگروهی از S_n است که با دو جایگشت زیر تولید می‌شود:

$$\alpha = (1\ 2 \dots n) \quad و \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

که در آن S_n گروه متقارن از درجه n می‌باشد.

۱-۲-۲۶ قضیه. گروه D_{2n} دارای نمایش زیر است:

$$D_{2n} \cong \langle x, y | x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۷-۳-۱ از[1].

۱-۲-۲۷ نتیجه. یک نمایش برای گروه دو وجهی D_8 عبارت است از

$$D_8 \cong \langle x, y | x^4 = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$$

۱-۲-۲۸ تعریف. به ازای هر n طبیعی که $n \geq 2$، گروه کواترنیون تعمیم‌یافته که آن را با Q_{4n} نشان می‌دهیم، زیرگروهی از گروه $GL(2,\mathbb{C})$ است که با دو ماتریس زیر تولید می‌شود:

$$\xi = \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{bmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن $\omega = e^{i\pi/n}$ و $\overline{\omega}$ نمایش مزدوج عدد مختلط ω است.

۱-۲-۲۹ قضیه. گروه Q_{4n} دارای نمایش زیر است:

$$\langle x,y | x^{2n}=1, x^n=y^2, y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۷-۳-۲ از[1].

۱-۲-۳۰ نتیجه. یک نمایش برای گروه کواترنیون Q_8 عبارت است از

$$Q_8 \cong \langle x,y | x^4=1, x^2=y^2, y^{-1}xy=x^{-1}\rangle$$

این گروه را گروه چهارگانی از مرتبه ۸ نیز می‌نامند.

۱-۲-۳۱ تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد، یک سری زیر نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند $1=G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$، به طوری‌که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$.

در این‌صورت، سری زیر نرمال فوق را به صورت زیر هم نشان می‌دهیم.

$$1=G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_r = G$$

۱-۲-۳۲ تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های نرمال G مانند

$$1=G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

در هر دو تعریف فوق، هر G_i را یک جمله سری و r را طول سری می‌نامند. معلوم است که هر سری به طول r دارای $r+1$ جمله است. واضح است که هر سری نرمال یک سری زیرنرمال است.

۱-۲-۳۳ تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال $1=G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی G گوییم در صورتی‌که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$،

$$G_i/G_{i-1} \leq Z\left(G/G_{i-1}\right).$$

۱-۲-۳۴ تعریف. گروه G را پوچ‌توان گوییم در صورتی‌که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده پوچ توانی G گویند وآن را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

۱-۲-۳۵ قضیه. اگر گروه G یک گروه پوچ‌توان غیربدیهی باشد، آن‌گاه $Z(G) \neq 1$.

برهان. رجوع شود به صفحه ۲۱۹ از[1].

۱-۲-۳۶ تعریف. فرض کنید G یک گروه است و H و K دو زیر گروه G باشند. در این‌صورت، زیرگروه $< [h\,,k] \mid h \in H\,,\; k \in K >$ از G را که در آن $[h\,,k] = h^{-1}k^{-1}h\,k$، جابه-جاگر H و K گوییم و با نماد $[H,K]$ نشان می‌دهیم.

۱-۲-۳۷ لم. فرض کنید G یک گروه دلخواه است و $H \leq G$ و $K \leq G$ در این‌صورت :

(i) $[H\,,K] = [K\,,H]$.

(ii) اگر $H_1 \leq H$ و $K_1 \leq K$، آن‌گاه $[H_1,K_1] \leq [H,K]$.

(iii) اگر $H \lhd G$، آن‌گاه $[H,K] \leq H$.

(iv) اگر $H \lhd G\,,K \lhd G$، آن‌گاه $[H,K] \lhd G$.

(v) $[H,K] \leq K$ اگر و تنها اگر $H \leq N_G(K)$.

(vi) $H \leq \mathrm{K}$ و $H \lhd G$، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای آن‌که $K/H \leq Z(G/H)$ این است که $[G\,,K] \leq H$.

(vii) اگر θ یک همریختی گروه G باشد، آن‌گاه $[\theta(H),\theta(K)] = \theta\,([H,K])$.

$(viii)$ اگر A یک گروه دلخواه باشد و $B \leq A$، آن‌گاه $[G \times A\,,H \times B] = [G,H] \times [A,B]$.

برهان. رجوع شود به لم ۱۰-۱-۱ از[1].

۱-۲-۳۸ قضیه. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده r باشد. در این‌صورت:

(i) هر زیرگروه G پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر r است.

(ii) هر تصویر همریخت G پوچ‌توان از رده‌ی حداکثر r است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۰-۱-۳ از[1].

۱-۲-۳۹ نتیجه. اگر G پوچ‌توان باشد و $N \lhd G$، آن‌گاه G/N نیز پوچ‌توان است.

تبصره. عکس مطلب فوق برقرار نیست یعنی اگر گروه‌های N و G/N پوچ‌توان باشند لزومی ندارد G نیز پوچ‌توان باشد. برای مثال گروه‌های A_3 و S_3/A_3 پوچ‌توان‌اند در حالی که می‌دانیم گروه S_3 پوچ‌توان نیست.

۱-۲-۴۰ قضیه. فرض کنید G یک گروه و N یک زیرگروه مرکزی G است یعنی $N \leq Z(G)$، و G/N یک گروه پوچ‌توان است. در این‌صورت G نیز پوچ‌توان است.

برهان. رجوع شود به صفحه ۳۰۰ از[2].

۱-۲-۴۱ نتیجه. اگر گروه خارج قسمتی $G/Z(G)$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه گروه G نیز پوچ‌توان است.

۱-۲-۴۲ قضیه. حاصل‌ضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروه‌های پوچ‌توان، پوچ‌توان است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۰-۱-۵ از[1].

۱-۲-۴۳ قضیه. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان و H زیرگروه سره از آن باشد. در این‌صورت $H \neq N(H)$.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۰-۱-۶ از[1].

۱-۲-۴۴ نتیجه. اگر گروه پوچ‌توان G زیرگروه ماکسیمالی مانند M داشته باشد، آن‌گاه $M \lhd G$ و G/M یک گروه دوری از مرتبه‌ی یک عدد اول است.

۱-۲-۴۵ قضیه. فرض کنید G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. دراین‌صورت گزاره‌های زیر دو به دو معادل‌اند:

(i) G پوچ‌توان است؛

(ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است؛

(iii) هر p- زیر گروه سیلوی G نرمال است؛

(iv) هر دو عضو G که مرتبه آن‌ها نسبت به هم اول است، جابه‌جا می‌شوند؛

(v) G حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۰-۱-۸ از[1].

۱-۲-۴۶ تعریف. فرض کنید G یک گروه است. دنباله‌ی $\{\Gamma_n(G)\}_{n=1}$ از زیرگروه‌های G را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_1(G) = G \quad , \quad \Gamma_n(G) = [G \, , \, \Gamma_{n-1}(G)] \quad (n > 1)$$

به آسانی به استقراء ثابت می‌شود که به ازای هر n $(n \geq 1)$، $\Gamma_n(G)$ یک زیرگروه مشخصه و در نتیجه نرمال در G است.