دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مشتق‌ها روی جبرهای باناخ و توسیع باناخ مدول‌ها

پژوهشگر:
مختارمحمودیان

استاد راهنما:
دکتر هوگر قهرمانی

استاد مشاور:
دکتر صابر ناصری

آذر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به مادرم که وجودش برایم بزرگترین لطف خداوند است

و

همسر عزیزم که همواره یار، یاور و مشوق من در این راه بود

سپاسگزاری

حمد و سپاس خدای را که بر من منت نهاد تا بار دیگر در مقطع تحصیلی بالاتری بتوانم در محضر اساتید بزرگوار دانشگاه کردستان شاگردی کنم. در اینجا لازم می‌دانم که از اساتید گرامی جناب آقای دکتر هوگر قهرمانی استاد راهنما، و جناب آقای دکتر صابر ناصری استاد مشاورم که با رهنمودهای ارزنده خود در این راه یاری‌ام دادند، صمیمانه سپاسگزارم.

چکیده

یکی از مسائل بنیادی در مورد جبرهای باناخ تعیین گروه کوهمولوژی اول آن با ضرایب در یک مدول می‌باشد. به ویژه اینکه چه موقع گروه کوهمولوژی برابر صفر است. برای بررسی گروه کوهمولوژی اول یک جبر باناخ با ضرایب در یک مدول و تعمیم‌های آن اغلب لازم است هر مشتق پیوسته از یک جبر باناخ به هر مدول آن را به مشتق دیگری از یک جبر باناخ که پوششی برای جبر باناخ اول است، توسیع دهیم. در این پایان نامه مفهوم مرکزساز دوگانه روی مدول‌ها را بررسی می‌کنیم. سپس، جبر مرکزسازهای دوگانه یک مدول را به عنوان توسیع آن در نظر می‌گیریم. با استفاده از این توسیع راه حل‌های کوتاهتر و ساده‌تری برای برخی قضایای میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری ضعیف و میانگین‌پذیری تقریبی جبرهای باناخ ارائه می‌دهیم.

واژهای کلیدی: مرکزساز دوگانه، مشتق مدولی، میانگین‌پذیری، ضرب تانسوری، همانی تقریبی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

این پایان نامه شامل سه فصل اساسی است. فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است که در فصل‌های آینده از آنها استفاده می‌شود. قضایایی که در این فصل بیان شده‌اند، بدون اثبات می‌باشد. اثبات آنها را می‌توان در مراجع داده شده دید.

لازم به تذکر است که در بخش آخر این فصل به تعریف و اثبات قضایایی در مورد ضرب تانسوری بین فضاهای برداری می‌پردازیم. در این بخش ضرب تانسوری تصویری بالانس شده را بین دو فضای باناخ بررسی کرده و مثال‌هایی از ضرب تانسوری، بین فضاهای متفاوت ذکر می‌شود.

فصل دوم شامل دو بخش می‌باشد، که در بخش اول آن به مفهوم مرکزساز دوگانه برای جبرها می‌پردازیم. دراین بخش ملاحظه می‌کنیم که فضای مرکزسازهای دوگانه با تعریف یک عمل دوتایی مناسب به یک جبر یکدار تبدیل می‌شود، که می‌توان جبر اولیه را در آن نشاند. و تحت شرایطی می‌بینیم که این جبر یکدار می‌تواند توسیعی از جبر اولیه باشد. اهم مطالب این فصل از [۲۲] انتخاب شده است.

در بخش دوم این فصل مفهوم مرکزساز دوگانه را برای یک باناخ مدول بررسی می‌کنیم. مانند بخش اول فضای مرکزسازهای دوگانه را تشکیل می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که یک باناخ مدول می‌باشد. دراین بخش قضایای مهمی در مورد مرکزساز دوگانه دوگان یک باناخ مدول بررسی و اثبات می‌شود. و مشاهده می‌کنیم که مرکزساز دوگانه دوگان یک باناخ مدول با دوگان باناخ مدولی دیگر یکریخت است.

در فصل سوم پایان نامه با عنوان ((کاربردها)) به کاربرد قضیه‌هایی از فصل دوم در حل و اثبات برخی قضیه‌ها در مورد میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری ضعیف و تقریبی، جبرهای سگال و جبرهای تصویری دوطرفه و یکدست دوطرفه می‌پردازیم. البته این قضایا قبلا ثابت شده‌اند و در این فصل با استفاده مفهوم مرکزساز دوگانه و تکنیک توسیع باناخ مدول‌ها راه حل‌های کوتاهتری برای آنها ارائه می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و نیازمندیها

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه ناتهی V را یک فضای برداری روی میدان F گویند، هرگاه V تحت عملی (که با +نشان می‌دهیم) گروهی آبلی باشد، و برای هر $\lambda \in F$ و $v \in V$، عنصر λv در V وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و $v, w \in V$،

۱) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$

۲) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

۳) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

۴) $۱v = v$ (که در آن ۱ عنصر یکه تحت عمل ضرب F است).

قرارداد ۲.۱.۱. کلیه فضاهای برداری در این پایان نامه روی میدان اعداد مختلط که با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم، تعریف شده‌اند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم E،F دو فضای برداری باشند. نگاشت $f : E \longrightarrow F$ را خطی می‌نامند هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $e_۱, e_۲ \in E$ داشته باشیم:

$$f(\alpha e_۱ + \beta e_۲) = \alpha f(e_۱) + \beta f(e_۲)$$

در این پایان نامه فرض برآن است که خواننده با مفهوم توپولوژی آشناست.

تعریف ۴.۱.۱. اگر X،Y دو فضای توپولوژیک باشند، نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گویند هرگاه برای هر مجموعه باز مانند G درY، $f^{-1}(G)$ در X باز باشد.

قرارداد ۵.۱.۱. اگر X, Y فضاهای برداری باشند، در این صورت فضای برداری شامل تمام نگاشت‌های خطی از X به توی Y را با $\mathcal{L}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X ، Y و E سه فضای برداری باشند. نگاشت $g : X \times Y \longrightarrow E$ را دوخطی می‌نامند، هرگاه برای هر $x \in X$ نگاشت $y \longmapsto g(x, y)$ و برای هر $y \in Y$ نگاشت $x \longmapsto g(x, y)$، به ترتیب نگاشتهایی خطی از Y به E و از X به E باشند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X،Y و E سه فضای توپولوژیک باشند. نگاشت دو خطی $g : X \times Y \longrightarrow E$ را پیوسته جزئی می‌نامند، هرگاه برای هر $x \in X$ نگاشت $y \longmapsto g(x, y)$ و برای هر $y \in Y$ نگاشت $x \longmapsto g(x, y)$، به ترتیب نگاشتهایی پیوسته از Y به E و از X به E باشند.

تعریف ۸.۱.۱. اگر X فضای برداری باشد آنگاه نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی X گویند، هرگاه داشته باشیم:

$$\|x\| \geqslant 0 \qquad \forall x \in X$$

$$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in X$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \qquad \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$$

در این حالت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. فضای برداری $\mathfrak{A}$ را همراه با نگاشت دوخطی $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ که $(a, b) \longmapsto a.b$ یک جبر می‌نامند، هرگاه برای هر $x, y, z \in \mathfrak{A}$ و اسکالر λ دارای خواص زیر باشد:

خاصیت شرکت پذیری: $(xy)z = x(yz)$

$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$

هرگاه جبر $\mathfrak{A}$ دارای عنصر $e \in \mathfrak{A}$ باشد بطوریکه

$$e.x = x.e = x \qquad x \in \mathfrak{A}$$

آنگاه جبر $\mathfrak{A}$ را یکدار و عنصر e را عنصر یکه (یا همانی) جبر $\mathfrak{A}$ می‌نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر $\mathfrak{A}$ را نرم‌دار گویند هرگاه روی $\mathfrak{A}$، یک نرم مانند $\|.\|$ با خاصیت زیر تعریف شده باشد.

$$\|a.b\| \leq \|a\|\|b\|$$

تعریف ۱۱.۱.۱. یک زیر جبر $\mathfrak{B}$ از جبر $\mathfrak{A}$ یک زیر فضای خطی است بطوریکه برای هر $b, \acute{b} \in \mathfrak{B}$ داشته باشیم $b\acute{b} \in \mathfrak{B}$.

تعریف ۱۲.۱.۱. جبر نرم‌دار $(\mathfrak{A}, \|.\|)$ را **جبر باناخ** [۱] می‌نامند هرگاه این فضا با متر تولید شده بوسیله نرم $\|.\|$ کامل باشد. یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

قرارداد ۱۳.۱.۱. مجموعه تمام نگاشتهای خطی کراندار از فضای نرم‌دار X به توی فضای نرم‌دار Y را با $\mathcal{B}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم و برای هر $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ نرم آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|A\| = sup\{\|Ax\| \mid \|x\| \leq ۱\}$$

لازم به ذکر است که اگر A نگاشتی دوخطی از $X \times Y$ به یک فضای نرم‌دار دیگر باشد، نرم آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\| = sup\{\|A(x,y)\| \,;\, \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱\}$$

نرمی که به این صورت تعریف می‌شود نرم یکنواخت نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را یک انقباض گوییم هرگاه :

$$\|T(x)\| \leq \|x\| \qquad \forall x \in X$$

تعریف ۱۵.۱.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ یک نگاشت باشد، بستار مجموعه‌ی $\{x \in X \,:\, f(x) \neq ۰\}$ را محمل f می‌نامند و آنرا با نماد$suppf$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. زیرفضای خطی $I \subseteq \mathfrak{A}$ یک ایده ال چپ (راست) در جبر $\mathfrak{A}$ است هرگاه :

$$\mathfrak{A}.I \subseteq I \qquad (I.\mathfrak{A} \subseteq I)$$

[۱] Banach

یعنی

$$ab \in I \qquad (ba \in I) \qquad\qquad a \in \mathfrak{A}, b \in I$$

و I را ایده‌آل دوطرفه یا به اختصار ایده‌آل می‌نامند هرگاه ایده‌آل چپ و راست باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد. فضای برداری X همراه با نگاشت دوخطی $\mathfrak{A} \times X \longrightarrow X$ که $(a, x) \longmapsto a.x$ با خاصیت زیر، یک $\mathfrak{A}$ -مدول چپ نامیده می‌شود.

$$a.(b.x) = (ab).x \qquad a, b \in \mathfrak{A}, x \in X$$

به همین صورت فضای برداری X را همراه با نگاشت دوخطی $X \times \mathfrak{A} \longrightarrow X$ که $(x, a) \longmapsto x.a$ و دارای خاصیت زیر باشد، یک $\mathfrak{A}$ -مدول راست می‌نامند.

$$(x.a).b = x.(ab) \qquad a, b \in \mathfrak{A}, x \in X$$

فضای برداری X همراه با نگاشت‌های دوخطی ذکر شده در بالا که تحت آنها به $\mathfrak{A}$ -مدول چپ و $\mathfrak{A}$ -مدول راست تبدیل می‌شود و همچنین دارای خاصیت زیر است، یک $\mathfrak{A}$ - دومدول گفته می‌شود.

$$a.(x.b) = (a.x).b \qquad a, b \in \mathfrak{A}, x \in X$$

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد، فضای باناخ X، یک باناخ $\mathfrak{A}$ - دومدول نامیده می‌شود هرگاه X، $\mathfrak{A}$ - دو مدول باشد، همچنین وجود داشته باشد $k > ۰$ بطوریکه

$$\|ax\| \leq k\|a\|\|x\| \qquad , \qquad \|xa\| \leq k\|a\|\|x\| \qquad a, b \in \mathfrak{A}, x \in X$$

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد. اگر باناخ $\mathfrak{A}$ - دو مدول X، چنان باشد که $\mathfrak{A}.X.\mathfrak{A}$ در X چگال باشد یعنی

$$\overline{\mathfrak{A}.X.\mathfrak{A}}^{\|\cdot\|_X} = X$$

آنرا $\mathfrak{A}$ - دو مدول اصلی می‌نامند. در حالت خاص اگر $\mathfrak{A}.X.\mathfrak{A} = X$ یعنی

$$X = \{axb | a, b \in \mathfrak{A}, x \in X\}$$

X را شبه یکدار می نامند.

بدیهی است که اگر X شبه یکدار باشد آنگاه اصلی نیز می‌باشد. نتیجه دیگری که در مورد یک $\mathfrak{A}$ - دومدول شبه یکدار مانند X می‌توان گرفت این است که برای هر $x \in X$ وجود دارند $y, z \in X, a, b \in \mathfrak{A}$ بطوریکه

$$a.y = x = z.b$$

تعریف ۲۰.۱.۱. مجموعه تمام نگاشت‌های مختلط مقدار مانند $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ که f خطی و کراندار و X یک فضای نرم‌دار باشد، دوگان X نامیده می‌شود و آن را با X^* نشان می‌دهیم.

تعاریف مدولی زیر را برای X^* در نظر بگیرید:

$$< x, a.f >:=< x.a, f > \qquad < x, f.a >:=< ax, f > \qquad \forall a \in \mathfrak{A}, x \in X, f \in X^*$$

ملاحظه می‌شود که اگر X ، $\mathfrak{A}$ - مدول چپ باشد X^* ، $\mathfrak{A}$ - مدول راست و اگر X، $\mathfrak{A}$ - مدول راست باشد آنگاه X^* ، $\mathfrak{A}$ - مدول چپ می‌باشد.

بدیهی است که اگر X باناخ $\mathfrak{A}$ - دو مدول باشد X^* نیز باناخ $\mathfrak{A}$ - دو مدول می‌باشد.

چند مثال برای دومدول‌ها:

- $X = \{۰\}$ همواره یک $\mathfrak{A}$ - دو مدول می‌باشد.
- اگر $\mathfrak{A}$یک جبر باشد، آنگاه یک $\mathfrak{A}$ - دو مدول است.
- اگر $\mathfrak{B}$ زیر جبری از $\mathfrak{A}$ باشد، آنگاه $\mathfrak{A}$یک $\mathfrak{B}$- دو مدول است.
- اگر I یک ایده ال در جبر $\mathfrak{A}$ باشد، آنگاه I یک $\mathfrak{A}$- دومدول است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو جبر باشند. نگاشت خطی $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ را یک همریختی می‌نامند هرگاه برای هر $x, y \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم :

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

در صورتی که همریختی φ پوشا باشد آنرا برو ریختی، اگر یک‌به‌یک باشد تکریختی و اگر دو سویی باشد آنرا یکریختی می‌نامند.

۱.۱.۱ همانی تقریبی

بسیاری از جبرهایی که با آنها کار می‌کنیم به طور طبیعی یکدار نیستند اما ممکن است دارای همانی تقریبی و همانی تقریبی کراندار باشند. مهمترین استفاده آن، قضیه‌های تجزیه برای این چنین جبرها می‌باشد. یک قضیه در این مورد قضیه تجزیه**(کوهن-هیویت)** [۲] برای جبرهای باناخ با همانی تقریبی چپ کراندار می‌باشد. ابتدا کوهن نشان داد هر جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار چپ قابل تجزیه است. (یعنی هر عضو آن را می‌توان به صورت ضرب دو عضو دیگر نوشت) که هیویت این را برای مدول‌ها هم توسیع داد. بعدها افراد دیگری چون **آلان** [۳] و **سینکلر**[۴] در این مورد تعاریف و قضایای دیگری ارائه دادند. [۷]

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید $(\mathfrak{A}, \|.\|)$ یک جبر باناخ باشد، تور (e_α) در $\mathfrak{A}$ را یک همانی تقریبی چپ (راست) برای $\mathfrak{A}$ گویند، هرگاه به ازای هر $a \in \mathfrak{A}$:

$$\lim_\alpha e_\alpha.a = a \qquad (\lim_\alpha a.e_\alpha = a)$$

چنانچه (e_α) همانی تقریبی چپ و راست باشد آنرا همانی تقریبی گویند.

همانی تقریبی (e_α) را کراندار گوییم، هرگاه وجود داشته باشد $M > ۰$ به طوریکه

$$\sup_\alpha \|e_\alpha\| \leq M$$

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید X یک $\mathfrak{A}$ - دو مدول باشد تور (e_α) در $\mathfrak{A}$ یک همانی تقریبی برای X است، هرگاه (e_α) یک همانی تقریبی برای $\mathfrak{A}$ باشد و برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\lim_\alpha e_\alpha.x = \lim_\alpha x.e_\alpha = x$$

اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ با تقریب همانی کراندار (e_λ) و X یک باناخ $\mathfrak{A}$ -دومدول اصلی باشد، برای هر

[۲] Cohen-Hewitt
[۳] Allan
[۴] Sinclair

$x \in X$ داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda} e_\alpha x &= \lim_{\alpha} e_\alpha \lim_{\lambda} a_\lambda x_\lambda b_\lambda \\ &= \lim_{\alpha}\lim_{\lambda} e_\alpha a_\lambda x_\lambda b_\lambda \\ &= \lim_{\lambda}\lim_{\alpha} e_\alpha a_\lambda x_\lambda b_\lambda \\ &= \lim_{\lambda} a_\lambda x_\lambda b_\lambda = x\end{aligned}$$

بنابراین اگر X، $\mathfrak{A}$ -دومدول اصلی باشد آنگاه هر همانی تقریبی $\mathfrak{A}$ یک همانی تقریبی برای X می‌باشد. در پایان این بخش به چند قضیه در مورد همانی تقریبی اشاره می‌کنیم که در ادامه از آنها استفاده می‌شود. برای اثبات این قضیه ها به [۳] مراجعه شود.

قضیه ۲۴.۱.۱. *(تجزیه کوهن) فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ با همانی تقریبی چپ کراندار باشد. اگر $z \in \mathfrak{A}$ و $\delta > 0$ دلخواه باشند، آنگاه $x, y \in \mathfrak{A}$ وجود دارند بطوریکه $z = xy$ و $\|z - y\| \leqslant \delta$ و y به کوچکترین ایده‌آل بسته $\mathfrak{A}$، شامل z، متعلق است.*

قضیه ۲۵.۱.۱. *فرض کنید $\mathfrak{A}$ جبری باناخ باشد که دارای همانی تقریبی کراندار برای باناخ $\mathfrak{A}$ - دومدول X است. در اینصورت اگر $z \in X$ و $\delta > 0$ دلخواه باشند، آنگاه $a \in \mathfrak{A}$ و $y \in X$ وجود دارند بطوریکه $z = ay$ و $\|z - y\| \leqslant \delta$.*

نتیجه ۲۶.۱.۱. *فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ با همانی تقریبی چپ کراندار باشد. اگر $\{z_n\}$ دنباله‌ای در $\mathfrak{A}$ باشد که $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$، آنگاه $a, y_n \in \mathfrak{A}$ وجود دارند بطوریکه*

$$z_n = a\, y_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

۲.۱.۱ مشتق‌ها روی جبرهای باناخ

تعریف ۲۷.۱.۱. اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باشد، نگاشت خطی $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ را یک مشتق روی جبر $\mathfrak{A}$ گویند هرگاه در شرط زیر (لایپ نیتز) صدق کند:

$$D(ab) = a.D(b) + D(a).b \qquad \forall a, b \in \mathfrak{A}$$

مجموعه‌ی تمام مشتق‌های روی $\mathfrak{A}$ را با $\Delta(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک باناخ $\mathfrak{A}$- دومدول باشد. نگاشت خطی و کراندار $D:\mathfrak{A}\longrightarrow X$ یک مشتق مدولی (یا به اختصار مشتق) نامیده می‌شود، هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$D(ab)=a.D(b)+D(a).b \qquad \forall a,b\in\mathfrak{A}$$

مثال ۲۹.۱.۱. فرض کنیم $x\in X$ دلخواه باشد. نگاشت خطی $ad_x:\mathfrak{A}\longrightarrow X$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$ad_x(a)=a.x-x.a \qquad \forall a\in\mathfrak{A}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} ad_x(ab) &= ab.x-x.ab \\ &= ab.x-x.ab+a.x.b-a.x.b \\ &= a.(b.x-x.b)+(a.x-x.a).b \\ &= a.ad_x(b)+ad_x(a).b \end{aligned}$$

یعنی برای هر $x\in X$، ad_x یک مشتق از $\mathfrak{A}$ به X می‌باشد. این دسته از مشتق‌ها را **مشتق داخلی** می‌نامند.

قرارداد ۳۰.۱.۱. مجموعه تمام مشتق‌های مدولی از جبر باناخ $\mathfrak{A}$ به باناخ $\mathfrak{A}$ -دومدول X را با نماد $Z^1(\mathfrak{A},X)$ و مجموعه تمام مشتق‌های داخلی را با نماد $B^1(\mathfrak{A},X)$ نشان می‌دهیم.

$Z^1(\mathfrak{A},X)$ یک زیر فضای بسته از $\mathcal{L}(\mathfrak{A},X)$ و $B^1(\mathfrak{A},X)$ یک زیر فضای (نه لزوما بسته) از $Z^1(\mathfrak{A},X)$ می‌باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱. اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و X یک باناخ $\mathfrak{A}$- دومدول باشد، آنگاه فضای برداری

$$H^1(\mathfrak{A},X):=\frac{Z^1(\mathfrak{A},X)}{B^1(\mathfrak{A},X)}$$

گروه اول کوهمولوژی هاخشیلد[5] $\mathfrak{A}$ با ضرایب در X، نامیده می‌شود.

[5]Hochschild

از آنجا $Z^1(\mathfrak{A},X)$ و $B^1(\mathfrak{A},X)$ زیر فضا می‌باشند شاید نام فضا برای $H^1(\mathfrak{A},X)$ بهتر از گروه بود، اما به هرحال این گونه نام گذاری شده است. البته تعریف اول هاخشیلد در این زمینه تنها برای جبرهای دلخواهی بود که هیچ گونه توپولوژی روی آنها تعریف نشده بود. برای استفاده‌ی این مفهوم روی جبرهای باناخ به مطالبی از آنالیز تابعی نیاز داشت که بعدها به وسیله کامویتس [۶] اضافه شد.

۳.۱.۱ نتایجی از آنالیز تابعی

در این بخش به تعریف توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره می‌پردازیم. همچنین چند قضیه و لم از آنالیز تابعی که درآینده مورد نیاز می‌باشند، اشاره می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ و E^* دوگان آن باشد. برای هر $f \in E^*$ نگاشت $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_f(x) =< x, f > \qquad\qquad x \in E$$

کوچکترین توپولوژی روی E را که درآن خانواده تمام نگاشت های $(\varphi_f)_{f\in E^*}$ پیوسته باشند **توپولوژی ضعیف** می‌نامند، وبا نماد $\sigma(E, E^*)$ نشان داده می‌شود.

قرارداد ۳۳.۱.۱. اگر $\{x_n\}$ دنباله ای درفضای باناخ Eباشد، همگرایی دنباله $\{x_n\}$ برای توپولوژی ضعیف $\sigma(E, E^*)$ به x را با نماد $x_n \xrightarrow{w} x$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای درفضای نرم‌دار E باشد، آنگاه :*

آ) $x_n \xrightarrow{w} x$ *اگر و تنها اگر برای هر* $f \in E^*$ *با توپولوژی معمولی* $< x_n, f > \longrightarrow < x, f >$.

ب) *اگر* x_n *با توپولوژی معمولی به x همگرا باشد آنگاه* $x_n \xrightarrow{w} x$.

پ) *اگر* $x_n \xrightarrow{w} x$ *و* $f_n \longrightarrow f$ *با توپولوژی معمولی* E^**، آنگاه* $< x_n, f_n > \longrightarrow < x, f >$.

اثبات. مراجعه شود به [۲۵]. □

نکته ۳۵.۱.۱. بازهای (بسته‌های) توپولوژی ضعیف برای توپولوژی معمولی باز (بسته) هستند. هرگاه بعد فضا نامتناهی باشد، توپولوژی ضعیف اکیدا از توپولوژی معمولی کوچکتر است. یعنی بازهایی (بسته‌هایی) برای توپولوژی معمولی هستند که برای توپولوژی ضعیف باز (بسته) نیستند. همچنین دنباله‌هایی هستند که به طور ضعیف همگرا می‌باشند در حالی که با توپولوژی معمولی همگرا نیستند. [۲۵]

[۶] H.kamowitz

لم ۳۶.۱.۱. *فرض کنیم F یک زیر مجموعه محدب از فضای باناخ E باشد. در این صورت F برای توپولوژی ضعیف بسته است اگر و تنها اگر برای توپولوژی معمولی بسته باشد. درنتیجه اگر دنباله $\{x_n\}$ به طور ضعیف به x همگرا باشد، آنگاه یک دنباله از ترکیبات محدب x_nها وجود دارد که به طور قوی به x همگراست.*

اثبات. مراجعه شود به [۶]. □

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ و E^{**} دوگان مضاعف باشد. برای هر $x \in E$ نگاشت $\varphi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$\varphi_x(f) =< x, f > \qquad \forall f \in E^*$$

تعریف می‌کنیم . کوچکترین توپولوژی روی E^* را که در آن خانواده تمام نگاشتهای $(\varphi_x)_{x\in E}$ پیوسته هستند، توپولوژی **ضعیف ستاره** می‌نامند و با نماد $\sigma(E^*, E)$ (یا w^*) نشان داده می‌شود.

قرارداد ۳۸.۱.۱. اگر$\{f_n\}$ دنباله‌ای در E^* باشد، همگرایی دنباله $\{f_n\}$ برای توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(E^*, E)$ به f را با نماد $f_n \xrightarrow{w^*} f$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳۹.۱.۱. *فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در E^*باشد، آنگاه :*

آ) *$f_n \xrightarrow{w^*} f$ برای $\sigma(E^*, E)$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in E$*

$$< x, f_n >\longrightarrow< x, f > .$$

ب) *اگر$f_n \longrightarrow f$ آنگاه $f_n \xrightarrow{w} f$ برای$\sigma(E^*, E^{**})$ و اگر $f_n \xrightarrow{w} f$ برای $\sigma(E^*, E^{**})$ آنگاه $\|f_n\|$ کراندار و$\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

پ) *اگر $f_n \xrightarrow{w^*} f$ و$x_n \longrightarrow x$ آنگاه $< x_n, f_n >\longrightarrow< x, f >$.*

اثبات. مراجعه شود به [۲۵]. □

.

لم ۴۰.۱.۱. *فرض کنیم$E \subset F$ یک زیر فضای باناخ باشد که $\bar{E} \neq F$. آنگاه $f \in F^*$ موجود است بطوریکه برای هر $x \in E$ داشته باشیم $< x, f >= ۰$.*

لم بالا یک نتیجه از قضیه هان باناخ (شکل هندسی) است.[۲۵]

قضیه ۴۱.۱.۱. (نگاشت باز) *فرض کنیم E, F فضاهای باناخ و T عملگر خطی پیوسته و پوشا از E به F باشد. در اینصورت تصویر هر مجموعه باز در E تحت T، یک مجموعه باز در F می‌باشد. به عبارت دیگر ثابت $C > ۰$ موجود است بطوریکه :*

$$T(B_E(۰, ۱)) \supset B_F(۰, C)$$

اثبات. مراجعه شود به [۲۵]. □

از قضیه بالا می‌توان نتیجه گرفت که اگر T خطی پیوسته و دوسویی باشد آنگاه $T^{-۱}$ پیوسته می‌باشد.

قضیه ۴۲.۱.۱. (نمودار بسته) *فرض کنیم E, F فضاهای باناخ و T عملگر خطی از E به F باشد که نمودار T یعنی $G(T) = \{(e, f) \in E \times F \ : \ T(e) = f\}$ در $E \times F$ بسته باشد. در این صورت T پیوسته است.*

اثبات. مراجعه شود به [۲۵]. □

قضیه ۴۳.۱.۱. (باناخ-آلااقلو-بورباکی) [۷] *اگر E یک فضای باناخ باشد آنگاه گوی واحد E^* یعنی مجموعه $B_{E^*} = \{f \in E^* \ : \|f\| \leq ۱\}$ برای توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(E^*, E)$ فشرده است.*

اثبات. مراجعه شود به [۲۵]. □

لم ۴۴.۱.۱. (گلدشتاین [۸]**)** *اگر E یک فضای باناخ باشد و $\iota : E \longrightarrow E^{**}$ تداخل متعارف، آنگاه $\iota(B_E)$ در $B_{E^{**}}$ با توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(E^{**}, E^*)$ چگال است. به عبارتی دیگر اگر E یک فضای باناخ باشد، برای هر $\phi \in E^{**}$ تور $(x_\alpha) \subseteq E$ وجود دارد بقسمی که*

$$\forall \alpha : \quad \|x_\alpha\| \leq \|\phi\| \qquad , \qquad \iota(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} \phi \qquad \sigma(E^{**}, E^*)$$

اثبات. مراجعه شود به [۲۵]. □

۲.۱ ضرب تانسوری

دراین بخش به معرفی ضرب تانسوری فضاهای برداری می‌پردازیم.

---

[۷] Banach-Alaoglu-Bourbaki

[۸] Goldstaine

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم F, E دو فضای برداری باشند. اگر $\mathcal{T}$ یک فضای برداری و $\tau : E \times F \longrightarrow \mathcal{T}$ نگاشتی دو خطی باشد. زوج $(\mathcal{T}, \tau)$ را **ضرب تانسوری** E و F نامیده می‌شود، هرگاه برای هر فضای برداری G و هر نگاشت دوخطی مانند $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ نگاشت خطی یکتا مانند $\psi : \mathcal{T} \longrightarrow G$ وجود داشته باشد به قسمی که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\psi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

یعنی داشته باشیم $\varphi = \psi \circ \tau$.

برای $\mathcal{T}$ از نماد $E \otimes F$ استفاده می‌کنیم. همچنین تعریف زیر را داریم:

$$e \otimes f := \tau(e, f) \qquad \forall\, e \in E\,,\ f \in F$$

اگر $(\mathcal{T}, \tau)$ و $(\acute{\mathcal{T}}, \acute{\tau})$ دو ضرب تانسوری فضاهای برداری باشند، در این صورت با توجه به تعریف نگاشت خطی یکتای $\theta : \mathcal{T} \longrightarrow \acute{\mathcal{T}}$ وجود دارد بطوریکه $\acute{\tau} = \theta \circ \tau$ همچنین نگاشت یکتای $\acute{\theta} : \acute{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{T}$ وجود دارد که $\tau = \acute{\theta} \circ \acute{\tau}$.

با توجه به روابط بالا دیاگرام زیر جابجایی می‌شود:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\acute{\theta}\circ\theta"] \\ & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

همچنین دیاگرام زیر را داریم

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\tau"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "i_{\mathcal{T}}"] \\ & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

پس باتوجه به یکتایی مذکور در تعریف ضرب تانسوری داریم $\acute{\theta} \circ \theta = i_{\mathcal{T}}$ به صورت مشابه می‌توان نشان داد که $\theta \circ \acute{\theta} = i_{\acute{\mathcal{T}}}$ لذا θ یک یکرختی فضاهای برداری می‌باشد و $\mathcal{T}$ و $\acute{\mathcal{T}}$ به عنوان فضاهای برداری یکریختند.

نتیجه ۲.۲.۱. *ضرب تانسوری فضاهای برداری E و F یعنی $(\mathcal{T}, \tau)$ در صورت وجود در حد یکریختی فضاهای برداری یکتاست.*

قضیه ۳.۲.۱. (وجود) *اگر E, F فضاهای برداری باشند، آنگاه ضرب تانسوری آنها یعنی $E \otimes F$ وجود دارد.*

اثبات. فرض کنیم $\tilde{\mathcal{T}}$ فضای برداری تمام نگاشت‌های با محمل متناهی باشد که از $E \times F$ به $\mathbb{C}$ می‌باشند.

همچنین فرض کنیم برای هر $(e, f) \in E \times F$ ، $\delta_{e,f}$ نگاشت چگالی نقطه‌ای درنقطه‌ی (e, f) باشد، یعنی

$$\delta_{e,f}(x,y) = \begin{cases} ۱ & (x,y) = (e,f) \text{اگر} \\ ۰ & (x,y) \neq (e,f) \text{اگر} \end{cases}$$

نگاشت $\tilde{\tau} : E \times F \longrightarrow \tilde{\mathcal{T}}$ که $(e,f) \longrightarrow \delta_{e,f}$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که $\tilde{\tau}$ نگاشتی دو خطی نمی‌باشد.

حا $\tilde{\mathcal{T}}_۰$ را زیر فضای تولید شده توسط تمام عناصری که به فرم زیر هستند، در نظر می‌گیریم:

$$\lambda\delta_{e,f} + \mu\delta_{g,f} - \delta_{\lambda e+\mu g,f} \quad , \quad \lambda\delta_{e,f} + \mu\delta_{e,h} - \delta_{e,\lambda f+\mu h}$$

اکنون قرار می‌دهیم $\mathcal{T} := \frac{\tilde{\mathcal{T}}}{\tilde{\mathcal{T}}_۰}$ و اگر $\pi : \tilde{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{T}$ نگاشت خارج قسمت باشد ، $\tau := \pi \circ \tilde{\tau}$.

با توجه به تعریف $\tilde{\mathcal{T}}_۰$ ، τ یک نگاشت دوخطی از$E \times F$ به $\mathcal{T}$ است، چون

$$\begin{aligned}
\tau(\lambda e + \mu g, f) &= \pi \circ \tilde{\tau}(\lambda e + \mu g, f) \\
&= \pi(\delta_{\lambda e+\mu g,f}) \\
&= \delta_{\lambda e+\mu g,f} + \tilde{\mathcal{T}}_۰ \\
&= \lambda\delta_{e,f} + \mu\delta_{g,f} + \tilde{\mathcal{T}}_۰ \\
&= \lambda\pi(\delta_{e,f}) + \mu\pi(\delta_{g,f}) \\
&= \lambda\pi \circ \tilde{\tau}(e,f) + \mu\pi \circ \tilde{\tau}(g,f) \\
&= \lambda\tau(e,f) + \mu\tau(g,f)
\end{aligned}$$

حال ادعا می‌کنیم که زوج $(\mathcal{T}, \tau)$، ضرب تانسوری E و F می‌باشد.

برای اثبات آن فرض کنیم G فضای برداری دیگر و $\nu : E \times F \longrightarrow G$ یک نگاشت دو خطی باشد.

نگاشت$\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow G$ را چنان تعریف می‌کنیم که

$$\varphi(\delta_{e,f}) = \nu(e,f) \qquad e, f \in F$$

بدیهی است که $\nu = \varphi \circ \tilde{\tau}$ با توجه به اینکه هر عضو $\tilde{\mathcal{T}}$ به صورت ترکیبات خطی از چگالی‌های نقطه‌ای می‌باشد، φ به طور یکتا بوسیله این ویژگی تعیین می‌شود.

حال نگاشت $\psi : \mathcal{T} \longrightarrow G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\psi(x + \tilde{\mathcal{T}}_\circ) := \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{T}$$

با توجه به اینکه φخطی، و روی هر یک از عناصر $\tilde{\mathcal{T}}_\circ$ صفر است، خوشتعریفی ψ به راحتی نشان داده می‌شود. ازطرفی

$$\begin{aligned}\psi \circ \tau(e, f) &= \psi \circ \pi \circ \tilde{\tau}(e, f)\\ &= \psi \circ \pi(\delta_{e,f})\\ &= \psi(\delta_{e,f} + \tilde{\mathcal{T}}_\circ)\\ &= \varphi(\delta_{e,f})\\ &= \nu(e, f)\end{aligned}$$

در نتیجه $\nu = \psi \circ \tau$.

برای نشان دادن یکتایی ψ فرض می‌کنیم $\theta : \mathcal{T} \longrightarrow G$ نگاشت خطی دیگری باشد، که در تساوی $\nu = \theta \circ \tau$ صدق می‌کند. برای هر $(e, f) \in E \times F$ داریم

$$\begin{aligned}\nu(e, f) &= \theta \circ \tau(e, f)\\ &= \theta \circ \pi \circ \tilde{\tau}(e, f)\\ &= \theta \circ \pi(\delta_{e,f})\\ &= \theta(\delta_{e,f} + \tilde{\mathcal{T}}_\circ)\end{aligned}$$

از طرفی در بالا دیدم که $\nu(e, f) = \varphi(\delta_{e,f})$.

بنابراین رابطه θ با φ همان رابطه ψ با φ می‌باشد و چون φ با این ویژگی یکتا بود نتیجه می‌گیریم که $\theta = \psi$. $\square$

تذکر : مجموعه تمام عناصری از $E \otimes F$ که به شکل $e \otimes f$ هستند، یک فضای خطی نمی‌باشد.

قضیه زیر تصور ما را در مورد هر یک از اعضای $E \otimes F$ روشن می‌سازد.

قضیه ۴.۲.۱. *هرگاه F, E دو فضای برداری باشند و $u \in (E \otimes F)$، آنگاه $m \in \mathbb{N}$ و $e_i \in E, f_i \in F$ که $i = ۱, ۲, \cdots, m$ وجود دارند بطوریکه*

$$u = \sum_{i=۱}^{m} e_i \otimes f_i.$$