وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

جبرواره‌های لی باناخ و ساختارهای دیراک

توسط:
فاطمه گیلانی‌فر

استادان راهنما:
دکتر سید علی تقوی
دکتر ابوالفضل طالشیان

شهریور ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

جبروارههای لی باناخ و ساختارهای دیراک

توسط:

فاطمه گیلانیفر

پایاننامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایاننامه با درجه: **خوب**

دکتر سید علی تقوی استادیار ریاضی محض گرایش هندسه، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما اول)

دکتر ابوالفضل طالشیان استادیار ریاضی محض گرایش هندسه، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه مازندران (استاد راهنما دوم)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش نظریه معادلات دیفرانسیل، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان(داور اول)

دکتر مرتضی ابطحی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر الهه ظهوریان آزاد استادیار ریاضی کاربردی گرایش نظریه احتمال، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

مولایم صاحب الزمان که اگر نمایان شود آرامش و عدالت بر ظرف زمان طلاکوب می شود.

و به دامان سبز مادرم و دستان پر مهر پدرم که هر چه آموختم در مکتب عشقشان بود.

و به همسرم اسطوره زندگیم که در سایه همیاری و همدلی او به این منظور نایل شدم.

و به گل نازم، امید بخش جانم، دخترم سناء که آسایش او آرامش من است.

سپاسگزاری

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او گذاردن نتوانند.

و سپاس از استادان راهنمای فرهیخته و فرزانه ام جناب آقایان دکتر ابوالفضل طالشیان و دکتر سید علی تقوی که با راهنمایی های کارساز و ارزنده شان روشنگر راهم شدند و اگر یاریشان نبود این مجموعه به انجام نمی رسید و بدون شک منزلت و مقامشان، اجل آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه شان، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم.

و سپاس از سرکار خانم دکتر الهه ظهوریان که به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی قبول زحمت نمودند.

و همچنین از استادان فرزانه جناب آقایان دکتر مرتضی ابطحی و دکتر سید امین اصفهانی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و در پایان سپاس از پدر و مادر عزیزم، همسر مهربانم و فرزند دلبندم و همه کسانی که در این تلاش شبانه روز یاریم کردند تا حاصل این تلاش ها به بار نشیند.

چکیده

جبروارههای لی باناخ و ساختارهای دیراک

به وسیلهی:
فاطمه گیلانیفر

رستهای (کتگوری) از کلاف‌های برداری باناخ متکی (آنکرد) را در نظر می‌گیریم و در مورد مفهوم نیمه افشانه‌ها بحث می‌کنیم. بر اساس مجموعه برش‌هایی از یک کلاف برداری باناخ متکی (آنکرد)، یک براکت لی با خواصش به مفهوم جبرواره لی می‌شود. ثابت می‌کنیم جبرواره‌های لی تشکیل یک رسته (کتگوری) می‌دهد.
یک ساختار دیراک روی یک خمینه باناخ M به صورت یک زیرکلاف از کلاف مماس بزرگ $TM \oplus T^*M$ تعریف می‌شود که نسبت به متر طبیعی استاندارد مساوی با متمم عمودش می‌باشد و نسبت به براکت کورنت بسته است.
اگر E یک جبرواره لی و E^* دوگانش باشد، فرم دوخطی و متقارن را روی کلاف برداری $E \oplus E^*$ تعریف می‌کنیم و می‌گوییم که زیرکلافی از این کلاف برداری یک ساختار دیراک ضعیف است، اگر مساوی متمم عمودش باشد.

هدف اصلی ما این است که هر ساختار دیراک که نسبت به نوعی براکت کورانت بسته می‌باشد با یک تکیه‌گاه (آنکر) طبیعی داده شده، یک جبرواره لی است.

کلمات کلیدی : کلاف برداری متکی (آنکرد) ، جبرواره‌های لی باناخ، ساختارهای دیراک

فهرست مطالب

پیشگفتار

موضوع اصلی این پایان‌نامه راجع به مفهوم جبرواره‌های لی باناخ و همچنین ساختارهای دیراک و ارتباط بین آنهاست که در سال ۲۰۱۳ در [۸] کلاف‌های برداری متکی (آنکرد)، نیمه‌افشانه‌ها و منحنی‌های مجاز مورد بررسی قرار گرفته و در مورد ارتباط بین منحنی‌های مجاز و نیمه‌افشانه‌ها قضایایی مطرح شده است.

سال ۲۰۱۱ در [۱۱] راجع به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر و مفهوم جبرواره‌های لی باناخ بحث شده و به این نتیجه رسیده که جبرواره‌های لی باناخ به صورت نوعی ساختار جبرواره لی روی کلاف‌های برداری باناخ متکی (آنکرد) است و همچنین بیان می‌کند که مفهوم جبرواره لی به رسته‌ای از کلاف‌های برداری باناخ توسعه یافته است.

در [۱۹] مطالبی در مورد جبرواره‌های لی و خواص آن بیان شده است.

سال ۲۰۱۴ در [۹] ساختارهای دیراک روی جبرواره‌های لی باناخ مورد بررسی قرار گرفته و ارتباط بین آنها را مشخص می‌کند.

و اینجانب مطالبی را در راستای کار این بزرگواران ارائه می‌دهم و در خاتمه در صورت وجود نواقص و غلط‌های چاپی از خوانندگان گرامی پوزش می‌طلبم.

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱-۱ مفاهیم اولیه

در فصل اول با مفاهیم و قضایایی آشنا می‌شویم که دانستن آنها برای درک بهتر مطالب فصل‌های بعدی ضروری است.

تعریف ۱.۱.۱. [۶] اگر در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی تعریف شود، یعنی

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \to \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

آنگاه $E^n = (\mathbb{R}^n, \langle \, , \, \rangle)$ را فضای اقلیدسی n -بعدی می‌نامند.

مثال ۲.۱.۱. [۶] فضای ۲ -بعدی حقیقی (استانده) یا صفحه ۲ -بعدی $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(X, Y) \to \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

در مورد $\mathbb{R}^۳$ نیز روابط فوق را می‌توان استفاده کرد:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^۳ \times \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \to \langle X,Y\rangle = \sum_{i=۱}^{۳} x_i y_i$$

به همین ترتیب، $\mathbb{R}^n$ با تعریف ضرب داخلی روی خودش تبدیل به E^n ، یعنی فضای اقلیدسی n -بعدی می شود. از طرفی $(E^n,+,\cdot)$ یک فضای برداری است.

تعریف ۳.۱.۱. [۱۸] فضای برداری X فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود، هرگاه ضرب داخلی روی X که با نگاشت

$$\begin{cases} g : X \times X \to R \\ (X,Y) \to \langle x,y\rangle \end{cases}$$

معرفی می‌شود، دارای خواص زیر باشد:

۱- برای هر $۰ \neq x \in X$ ، $\langle x,x\rangle > ۰$ و $\langle ۰,۰\rangle = ۰$؛

۲- برای هر x,y $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$؛

۳- برای هر $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ $\langle \lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲, y\rangle = \lambda_۱ \langle x_۱,y\rangle + \lambda_۲ \langle x_۲,y\rangle$.

تعریف ۴.۱.۱. [۶] فرض می‌کنیم X یک مجموعه غیرتهی و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. اگر

۱) $X,\emptyset \in \tau$؛

۲) برای هر u,v در τ ، $u \cap v \in \tau$؛

۳) برای هر i در I ، $u_i \in \tau$، $\cup u_i \in \tau$

آنگاه τ را روی X یک توپولوژی و (X,τ) را یک فضای توپولوژی می‌نامند و اعضای τ را مجموعه‌های باز می‌نامیم.

مثال ۵.۱.۱. [۲] فضای اقلیدسی E^n یک فضای توپولوژیک است.

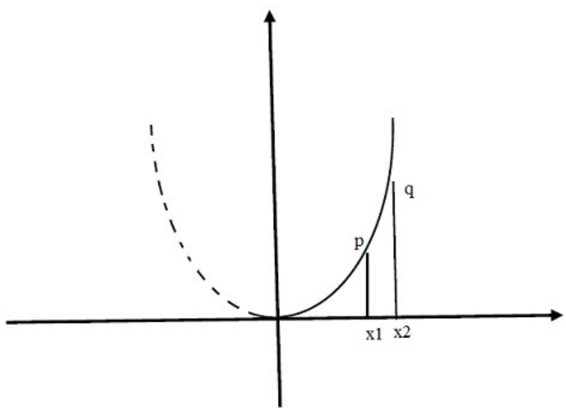
تعریف ۶.۱.۱. [۴] هرگاه X, Y دو فضای توپولوژی بوده و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آنگاه می‌گوییم f پیوسته است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-۱}(V)$ مجموعه بازی در X باشد.

تعریف ۷.۱.۱. [۳] فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند، اگر نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته و همچنین تابع معکوس $f^{-۱}$ موجود و پیوسته باشند، آنگاه تابع f از X به Y یک همانسانی (همانریختی یا همئومورفیسم) است. گاهی اینگونه نگاشت را نگاشت توپولوژی (تبدیل توپولوژی) می‌نامند. وقتی f از X به Y یک همانسانی باشد، می‌گوییم X و Y همانسانند.

مثال ۸.۱.۱. [۶] اگر $P = \{(x, y) \mid y = x^۲\} = \{(x, x^۲) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} \phi : p \to R \\ (x, y) = (x, x^۲) \to \phi(x, y) = x \\ \text{یا} \\ (x, x^۲) \to x \end{cases}$$

یک تبدیل توپولوژی است.



$$P = \{(x, y) \mid y = x^۲\} = \{(x, x^۲) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

۱) φ ، $(۱-۱)$ است. چون روی سهمی برای نقاط $p \neq q$ ، تصویرهای مختلف و برای $p = q$ ، تصویرهای مساوی روی X ها به‌دست می‌آید. یعنی φ، $(۱-۱)$ است و نیز داریم

$$x_۱ = x_۲,\ x_۱^۲ = x_۲^۲ \Rightarrow (x_۱, x_۱^۲) = (x_۲, x_۲^۲)$$

۲) φ پوشاست، زیرا به ازای هر $x \in R$، $(x, x^۲)$ در P وجود دارد به قسمی که:

$$\varphi(x, x^۲) = x$$

۳) φ پیوسته است.

۴) چون

$$\begin{cases} \varphi^{-۱} : R \to P \\ x \to \varphi^{-۱}(x) = (x, x^۲) \end{cases}$$

لذا $\varphi^{-۱}$ موجود و پیوسته است. بنابراین φ یک نگاشت توپولوژی است.

تعریف ۹.۱.۱. [۶] فضای توپولوژی (X, τ) را یک فضای هاسدورف می‌گویند، هرگاه برای دو نقطه متمایز x و y به ترتیب همسایگی‌های V_x و V_y وجود داشته باشد به طوریکه:

$$V_x \cap V_y = \emptyset$$

مثال ۱۰.۱.۱. [۶] فضای اقلیدسی E^n در فضای متری یک فضای هاسدورف است. زیرا اگر دو نقطه p و q را در E^n انتخاب کنیم، به ترتیب همسایگی های V_p و V_q وجود دارند به قسمی که $V_p \cap V_q = \emptyset$. کافی است شعاع همسایگی کمتر از $\frac{۱}{۲}d(p, q)$ باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. [۶] فرض کنیم X یک فضای توپولوژی n -بعدی باشد. اگر برای X ویژگی‌های زیر برقرار باشد، X را یک خمینه توپولوژی می‌گویند:

۱) X یک فضای هاسدورف است؛

۲) هر زیرمجموعه باز U در X با E^n یا با زیرمجموعه‌ای باز از E^n همانریخت باشد؛

۳) X به وسیله تعداد شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز پوشانیده شود.

به عنوان مثال E^n و زیرمجموعه‌هایی از فضای اقلیدسی E^n یک خمینه توپولوژی هستند.

تعریف ۱.۱.۱۲. [۶] فرض کنیم U در E^n یک مجموعه باز باشد، اگر تابع f ،$f : U \to R$ از هر مرتبه‌ای دارای همهٔ مشتق‌های جزئی بوده و پیوسته باشند می‌گویند تابع f دیفرانسیل‌پذیر است. چنین تابعی را از ردهٔ C^∞ می‌نامند.

تذکر ۱.۱.۱۳. [۶] قابل توجه است که لازم نیست تابع بینهایت بار دیفرانسیل‌پذیر باشد، ولی چون از هر مرتبه‌ای دارای کلیه مشتق‌های جزئی می‌باشد، می‌گویند f از ردهٔ C^∞ و به جای کلمهٔ دیفرانسیل‌پذیری از کلمهٔ C^∞ استفاده می‌شود.

مثال ۱.۱.۱۴. [۶] اگر

$$f : E^۲ \to R$$
$$(x, y) \to f(x, y) = xy$$

آنگاه f از هر مرتبه دارای مشتق‌های جزئی است:

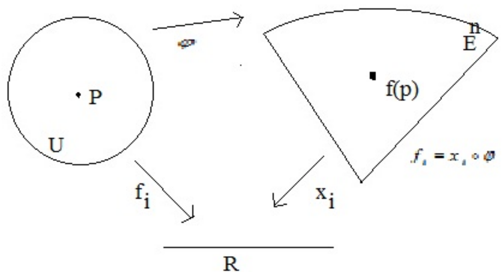
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f^۲}{\partial x \partial y} = ۱, \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial^۲ x} = ۰$$
$$\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} = ۰, \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial x} = ۱, \quad \frac{\partial f^۲}{\partial x \partial y^۲} = ۰, \quad \frac{\partial^۲ f}{\partial y \partial^۲ x} = ۰$$

بنابراین $f \in C^۱(E^۲, R),\ f \in C^۲(E^۲, R),\ f \in C^۳(E^۲, R)$.

تعریف ۱.۱.۱۵. [۶] فرض می‌کنیم U در E^n یک مجموعه باز و $\varphi : U \to E^n$ یک تابع باشد φ را دیفرانسیل‌پذیر می‌نامند، اگر توابع اقلیدسی f_i ، $۱ \leq i \leq n$ ،$f_i = x_i \circ \varphi$ دیفرانسیل‌پذیر باشد.

مثال ۱.۱.۱۶. [۶] $\varphi : E^۲ \to E^۳$ را در نظر بگیرید به طوریکه $\varphi(x, y) = (x^۲ - y^۲, ۳xy, x^۳)$ دیفرانسیل‌پذیری $\varphi = \{(f_۱, f_۲, f_۳) | f_i : E^۲ \to^{C^\infty} R\}$ را بررسی می‌کنیم.

حل:



$$f_3(x,y) = x^3, \qquad f_2(x,y) = 3xy, \qquad f_1(x,y) = x^2 - y^2$$

واضح است که $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(E^2, R)$ و از آنجا $f \in C^\infty(E^2, E^3)$.

تعریف ۱.۱.۱۷. [۳] فرض کنیم U و V زیرمجموعه‌های باز اقلیدسی E^n باشند اگر تابع $g : U \to V$ در ویژگی‌های زیر صدق کند، U و V وابرریخت نامیده می‌شود.

۱) $g \in C^\infty(U, V)$؛

۲) $g^{-1} : V \to U$ وجود داشته باشد و $g^{-1} \in C^\infty(V, U)$ آنگاه g را وابرریختی (دیفئومورفیسم) می‌نامند.

مثال ۱.۱.۱۸. [۶] اگر $\varphi : E^2 \to E^2$ با ضابطه $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2)$ ارایه شود نشان می‌دهیم که φ وابرریختی است.

حل: $f_1 = x_1 e^{x_2} + x_2$ و $f_2 = x_1 e^{x_2} - x_2$ از هر مرتبه‌ای دارای کلیه مشتق‌های نسبی است. لذا $f_1, f_2 \in C^\infty(E^2, R)$ و از آنجا $\varphi \in C^\infty(E^2, E^2)$ از طرفی، برای اینکه φ^{-1} وجود داشته باشد لازم است φ یک‌به‌یک و پوشا باشد. داریم:

الف) φ یک‌به‌یک است، زیرا که

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x'_1, x'_2) \Rightarrow (x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2) = (x'_1 e^{x'_2} + x'_2, x'_1 e^{x'_2} - x'_2)$$

$$\begin{cases} x_1 e^{x_2} + x_2 = x'_1 e^{x'_2} + x'_2 \\ x_1 e^{x_2} - x_2 = x'_1 e^{x'_2} - x'_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2x_2 = 2x'_2$$

از اینجا $x'_2 = x_2$ به‌دست می‌آید. از طرفی چون $x_1 e^{x_2} + x_2 = x'_1 e^{x'_2} + x'_2$ ، لذا $x'_1 = x_1$ نتیجه می‌شود. بنابراین $(x_1, x_2) = (x'_1, x'_2)$ ، یعنی φ یک‌به‌یک است.

ب) به ازای هر $y_1, y_2 \in E^2$ حداقل یک (x_1, x_2) در E^2 وجود دارد به قسمی‌که $\varphi(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. یعنی می‌توانیم روابط زیر را تشکیل دهیم

$$(x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2) = (y_1, y_2)$$

لذا

$$\begin{cases} y_1 = x_1 e^{x_2} + x_2 \\ y_2 = x_1 e^{x_2} - x_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 2x_1 e^{x_2} = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2e^{x_2}}$$

یا این که

$$x_2 = \frac{-y_2 + y_1}{2}, \qquad x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)e^{-x_2}$$

بنابراین

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)e^{\dfrac{y_2 - y_1}{2}}$$

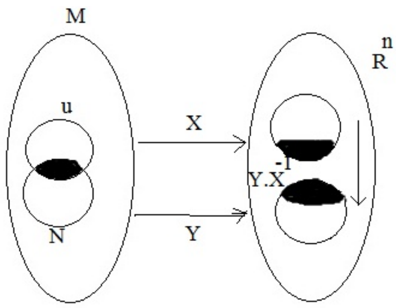
ج) φ^{-1} وجود دارد

$$\varphi(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow \varphi^{-1}(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$
$$\varphi^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{y_1 + y_2}{2} e^{\frac{y_2 - y_1}{2}}, \frac{y_1 - y_2}{2})$$

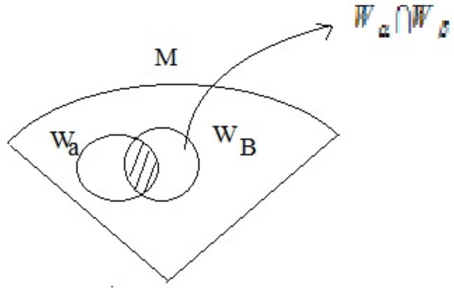
همانطور که دیده می‌شود، φ^{-1} از هر مرتبه‌ای دارای مشتق جزئی و پیوسته است لذا $\varphi^{-1} \in C^\infty(E^2, E^2)$. بنابراین $\varphi, \varphi^{-1} \in C^\infty(E^2, E^2)$ ، پس φ وابرریختی است.

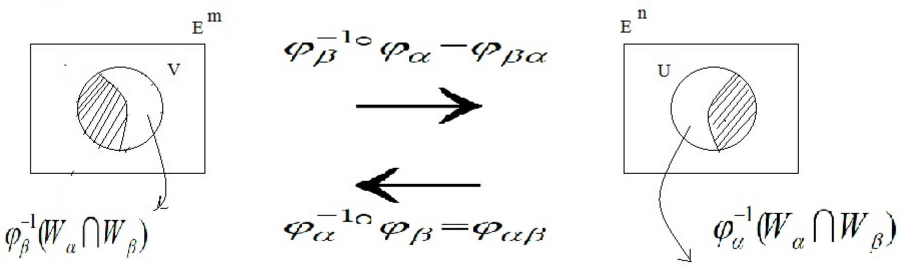
تعریف ۱۹.۱.۱. [۳، ۱۸] فرض کنیم M یک مجموعه n -بعدی و U یک زیرمجموعه باز از M باشد. اگر برد تابع یک‌به‌یک $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه (U, φ) را یک نقشه n -بعدی می‌گویند و با استفاده از توابع تصویری $p_i : R^n \to R$ یک چنین نقشه‌ای روی قلمرویش، U ، یک مجموعه از توابع مختصاتی $x_i = p_i \circ x$ را تعریف می‌کند به طوریکه $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$. همچنین $\varphi(m) = (\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots, \varphi_n(m))$ یک مجموعه مختصاتی موضعی در نقطه $m \in U$ است.

تعریف ۱.۱.۲۰. [۳] به گردایه‌ای از نقشه‌ها که قلمرویشان با هم تمام مجموعه M را می‌پوشاند، یک اطلس از M به R^n گفته می‌شود و با S نمایش می‌دهند. چنین اطلسی را C^∞ می‌نامند، اگر برای هر دو نقشه x و y از اطلس A که اشتراک قلمروهایشان تهی نباشد، $x \circ y^{-1} : R^n \to R^n$ یک وابرریختی باشد.



تعریف ۱.۱.۲۱. [۶] فرض کنیم M یک خمینه توپولوژی n-بعدی و $S = \{(\varphi_\alpha, W_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ یک اطلس M باشد. اگر برای S ، به ازای هر α و β در I، $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ و نیز $\varphi_{\alpha,\beta}$ و $\varphi_{\beta,\alpha}$ از مرتبه C^∞ باشند، آنگاه S را روی M یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر گویند.





چنانچه در شکل مشاهده می‌شود $\varphi_{\alpha,\beta}$ و $\varphi_{\beta,\alpha}$ از مرتبه C^∞ هستند همچنین $\varphi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$ و $\varphi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$ وابرووریختند. یعنی از نظر دیفرانسیل‌پذیری یکی هستند.

تعریف ۲۲.۱.۱. [۶] فرض کنیم M یک خمینه توپولوژی n -بعدی باشد. اگر روی M یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر S ، یا یک اطلس C^∞ تعریف کنیم، M یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر نامیده می‌شود. قابل ذکر است که خمینه به مفهوم خمینه دیفرانسیل‌پذیر است ولی برای زیبائی گفتاری،به جای کلمه خمینه از کلمه خمینه دیفرانسیل‌پذیر استفاده می‌شود.

مثال ۲۳.۱.۱. [۶] برای $I = (-1, 1)$، $S^1 = \{x \in E^2 | d(x, 0) = 1\}$ یک کره باز است که به آن ۱-کره می‌نامند. که ۱-کره در E^2 یک خمینه توپولوژی و حتی یک خمینه دیفرانسیل‌پذیر است.

حل: برای حل این مثال به [۶] مراجعه شود.

تعریف ۲۴.۱.۱. [۱۸] یک بردار مماس X در نقطه $p \in M$ یک نگاشت $X : C^\infty(M) \to R$ است به طوریکه

۱) $X[\alpha f + \beta g] = \alpha X[f] + \beta X[g]$

۲) $X[fg] = X[f]g + fX[g]$

که به ترتیب ویژگی خطی و قاعده لایبینتز[1] نامیده می‌شود.

تعریف ۲۵.۱.۱. [۶] دوتایی $(p; X)$ در M را در نظر می‌گیریم p را نقطه اثر و X را یک بردار مماس در p از M می‌نامند. مجموعه بردارهای مماس در نقطه p از M را به صورت $T_p(M)$ نشان داده و آن را فضای مماس در نقطه p می‌گویند. دوتایی $(p; X)$ را با X_p نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. [۳] اجتماع تمام فضاهای مماس TM در M را کلاف مماس می‌نامند یا کلاف مماس عبارتست از تمام میدانهای برداری مماس اجتماع روی M که معمولاً با $\bigcup TM$ نشان می‌دهند.

[1] Libnitz role

تعریف ۲۷.۱.۱. [۳] اگر $U \subset E^n$ باز باشد تابع $X : U \to \bigcup_{p\in U} T_p(U)$ با ضابطه $X(p) = X_p$ تابعی است که نقاط p از U را به بردار مماس X_p از $\bigcup_{p\in U} T_p(U)$ می‌نگارد و آن را میدان برداری روی U می‌گویند. اگر به جای فضای اقلیدسی E^n یک خمینه مانند M در نظر گرفته شود آنگاه داریم:

$$\begin{cases} x : U \subset M \to \bigcup_{p\in U} T_p(U) \\ p \to X(p) = X_p \in T_pM \end{cases}$$

مجموعه تمام میدانهای برداری روی M را با $\chi(M)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۲۸.۱.۱. دوگان فضای مماس $T_p(M)$ را با $T_p^*(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. [۱۸] اگر x نقشه‌ای از M باشد که قلمرویش شامل یک نقطه ارائه شده از M است، آنگاه بردارهای $\frac{\partial}{\partial x_i}(i = ۱, ..., m)$ برای T_mM تشکیل یک پایه می‌دهند.

تعریف ۳۰.۱.۱. [۱۸] اگر برای هر f در $C^\infty(M)$ ، X در $\chi(m)$ و نقطه p در M ، قرار دهیم $(Xf)_p = X_p(f)$ آنگاه تابع $X(f)$ در $C^\infty(M)$ را مشتق f در جهت میدان برداری X می‌نامند.

تعریف ۳۱.۱.۱. [۳] برای خمینه‌های M و M' اگر رتبه تابع دیفرانسیل‌پذیر $\varphi : M \to M'$ در هر نقطه از دامنه‌اش با بعد M' مساوی باشد، آنگاه φ یک آبشار [۲] نام دارد.

مثال ۳۲.۱.۱. [۳] تابع دیفرانسیل‌پذیر $f : R^n \to R$ آبشار است اگر و تنها اگر برای هر نقطه z در قلمرویش ماتریس $J_f(z)$ رتبه یک داشته باشد. اگر $g : R \to R$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر اختیاری در R باشد، آنگاه $(z_۱, z_۲) \to z_۱ - gz_۲$ یک آبشار از $R^۲$ بر روی R است.

تعریف ۳۳.۱.۱. [۳] فرض کنیم $\varphi : M \to M'$ یک تابع و p یک نقطه در برد φ باشد، آنگاه مجموعه $\varphi^{-۱}p$ یک فیبر یا لایه از تابع φ است.

---
[۲] Submersion

تعریف ۳۴.۱.۱. [۳] برای خمینه‌های M و M' اگر رتبه تابع دیفرانسیل‌پذیر $\psi : M \to M'$ در هر نقطه از دامنه‌اش با بعد M مساوی باشد، آنگاه ψ یک فروبر [۳] است. در آن صورت تابع مشتق در هر فضای مماس یک‌به‌یک است.

تعریف ۳۵.۱.۱. [۳] فرض کنیم $\varphi : M \to M'$ یک آبشار باشد، برای هر نقطه q در M، $\varphi(q) = p$ در M' باشد، یعنی $\varphi^{-1}(\varphi(q)) = \varphi^{-1}(p)$ ، مجموعه $\varphi^{-1}(p)$ که در آن p یک نقطه ارائه شده در برد φ می‌باشد یک لایه (فیبر) برای آبشار است.

تعریف ۳۶.۱.۱. [۳] یک توزیع p -بعدی از خمینه n -بعدی M یک تابع Ω در M است، به طوریکه Ω_m یک زیرفضای p -بعدی از T_mM باشد $(0 \leq p \leq m)$ و در شرط دیفرانسیل‌پذیری زیر صدق می‌کند. هر نقطه m در قلمروی Ω ، یک همسایگی V روی میدانهای برداری تعریف‌شده $V_1, ..., V_p$ است. هر q در V ، Ω_p به وسیله $X_1q, ..., X_pq$ پدید می‌آید. چنین مجموعه‌ای از میدان‌های برداری، یک پایه برای Ω در نقطه m نامیده می‌شود و میدان برداری صفر، یک توزیع ۱- بعدی در همه جا تولید می‌کند. اما هر توزیع ۱ -بعدی روی M از یک میدان برداری ناشی نمی‌شود.

تعریف ۳۷.۱.۱. [۳] اگر میدان‌های برداری $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ $(\alpha = 1, ..., p)$ یک پایه برای توزیع Ω در M تشکیل دهند، آنگاه به نقشه x از M ، نسبت به توزیع Ω در M ، یک نقشه تخت می‌گویند.

تعریف ۳۸.۱.۱. [۳] یک توزیع Ω روی M انتگرال‌پذیر است، اگر هر نقطه M در قلمروی یک نقشه تخت قرار گیرد.

تعریف ۳۹.۱.۱. [۳] فرض کنیم T یک فضای توپولوژی باشد اگر A وB زیرمجموعه‌هایی باز از T باشند به‌طوریکه $A \cap B = \emptyset$ و$A \cup B = T$ باشند، آنگاه T را یک فضای توپولوژی همبند می‌نامند.

تعریف ۴۰.۱.۱. [۲] فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد رابطه هم‌ارزی $y \sim x$ را در نظر می‌گیریم می‌گوییم $y \sim x$ اگر و تنها اگر یک مجموعه همبند مانند X موجود باشد که شامل xوy باشد. هر یک از کلاسهای هم‌ارزی به وجود آمده با این رابطه هم‌ارزی را یک مولفه همبندی می‌نامیم.

[۳] Imersion