بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی

گرایش آنالیز عددی

عنوان:

محاسبه تجزیه UL ناقص به عنوان محصول فرعی الگوریتم فاکتورسازی معکوس تقریبی پسرو

استاد راهنما:

دکتر امین رفیعی

استاد مشاور:

دکتر عبدالله قلی زاده

پژوهشگر:

فاطمه شهلایی

آبان ماه ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

ستایش می‌کنم آن سرچشمه علم و فضیلت را که قدرت آموختن به من عطا فرمود تا بتوانم این پایان نامه را به پایان برسانم .

وظیفه خود می‌دانم از اساتید ارجمندم جناب دکتر امین رفیعی و آقای جعفرزاده که دانش و آگاهی خود را در اختیارم قرار دادند و مرا در انجام این پایان نامه یاری کردند، قدردانی کنم و تشکر ویژه از جناب دکتر رفیعی که با صبر و حوصله تمام پیگیر کارهای من بودند.

هم‌چنین لازم می‌دانم از پدر و مادرم که همیشه پشتیبان من و همسرم که مایه دلگرمی و مشوق من در پایان رساندن این پایان نامه بودند، تشکر کنم.

از خداوند متعال عمر طولانی همراه با عزت و سلامتی برایشان خواستارم.

چکیده

در این پایان نامه، یک تجزیه UL ناقص (IUL[۱]) برای ماتریس A ارائه می‌شود. این تجزیه IUL، به عنوان پیش شرط[۲] برای دستگاه خطی $AX = b$ به کار می‌رود. از آنجایی که این پیش شرط IUL جدید، به عنوان محصول فرعی الگوریتم BFAPINV[۳] [۱۸، ۲۱] محاسبه می‌شود، آن را پیش شرط IULBF[۴] می‌نامیم. در الگوریتم BFAPINV، ماتریس های W، Z و D به ترتیب بالا مثلثی یکانی[۵]، پایین مثلثی یکانی[۶] و قطری به گونه‌ای تولید می‌شوند که $A^{-۱} \approx ZD^{-۱}W$. با استفاده از ماتریس‌های W، Z و D تولید شده توسط الگوریتم BFAPINV، فاکتورهای L و U پیش شرط IULBF محاسبه خواهند شد به طوری که ماتریس بالا مثلثی یکانی U، تقریبی از $W^{-۱}$ و ماتریس پایین مثلثی L، تقریبی از $DZ^{-۱}$ خواهد بود.

به منظور بررسی کیفیت پیش شرط IULBF، آن را با پیش شرط دیگری به نام ILUFF[۷] مقایسه خواهیم کرد. پیش شرط ILUFF [۱۷]، به عنوان محصول فرعی الگوریتم FFAPINV[۸] [۱۸، ۲۰] در سال ۲۰۱۰ توسط خجسته و روحانی محاسبه شده است . با به کار بردن شیوه‌های متفاوت فرایند حذف درایه‌های فاکتورهای W، Z، L و U، نسخه‌های متفاوت پیش شرط‌های ILUFF و IULBF حاصل خواهند شد.

هدف اصلی این پایان نامه، بررسی و مقایسه کیفیت نسخه‌های متفاوت پیش شرط‌های ILUFF و IULBF با یکدیگر است.

[۱] Incomplete UL decomposition
[۲] Preconditioner
[۳] Backward Factored APproximate INVerse
[۴] IUL factorization obtained from Backward Factored APproximate INVerse
[۵] Unit upper triangular
[۶] Unit lower triangular
[۷] ILU factorization obtained from Forward Factored APproximate INVerse
[۸] Forward Factored APproximate INVerse

کلمات کلیدی

۰۱ تجزیه LU ناقص ۰۲ تجزیه UL ناقص ۳ . پیش شرط سازی

۰۴ حذف بر پایه معکوس ۰۵ روش‌های زیر فضای کریلف ۰۶ الگوریتم ILUFF

۰۷ الگوریتم IULBF.

پیشگفتار

در بسیاری از محاسبات علمی و مهندسی، حل دستگاه معادلات خطی یکی از بخش‌های مهم و کلیدی می‌باشد.

دستگاه معادلات خطی

$$AX = b, \tag{۱}$$

را در نظر بگیرید که $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، ماتریسی نامتقارن، با بعد بزرگ و تنک[۹] باشد. هم چنین $X, b \in \mathbb{R}^n$ هستند. روش‌های زیر فضای کریلف[۱۰] از جمله روش‌های تکراری برای حل دستگاه (۱) می‌باشند [۱۵]. الگوریتم GMRES[۱۱]، نمونه‌ای از روش‌های زیر فضای کریلف است.

به منظور شتاب بخشیدن در روند یافتن جواب X، از ماتریس‌های پیش شرط استفاده می‌شود [۱، ۲، ۱۰، ۱۶، ۱۷]. با استفاده از ماتریس پیش شرط، دستگاه (۱) به دستگاه پیش شرط شده تبدیل می‌شود و سپس دستگاه پیش شرط شده توسط روش‌های زیر فضای کریلف حل می‌شود.

از جمله پیش شرطها می‌توان به پیش شرط ILUFF اشاره کرد که دارای فاکتور L، ماتریس پایین مثلثی یکانی و U، ماتریس بالا مثلثی می‌باشد. پیش شرط ILUFF تقریبی از ماتریس A به صورت زیر ارائه می‌دهد

$$A \approx LU.$$

مبنای ساختن پیش شرط ILUFF، الگوریتم FFINV[۱۲] می‌باشد [۲۰]. در الگوریتم FFINV ماتریس‌های W، Z و D به ترتیب پایین مثلثی یکانی، بالا مثلثی یکانی و قطری به گونه‌ای محاسبه

[۹] Sparse
[۱۰] Krylov subspace methods
[۱۱] Generalized Minimum RESidual
[۱۲] Forward Factored INVerse

می‌شوند که

$$WAZ = D. \quad (۲)$$

اگر در الگوریتم FFINV برخی از درایه‌های ماتریس‌های W و Z حذف شوند، آن‌گاه رابطه

$$WAZ \approx D, \quad (۳)$$

برقرار است و الگوریتم FFAPINV نامیده می‌شود. همزمان با ساخته شدن ماتریس‌های W، Z و D، درایه‌های ماتریس‌های L و U به عنوان محصول فرعی از الگوریتم FFAPINV تولید می‌شوند. در الگوریتم BFINV[۱۳] [۸، ۹]، ماتریس‌های W، Z و D به ترتیب بالا مثلثی یکانی، پایین مثلثی یکانی و قطری به گونه‌ای محاسبه می‌شوند که رابطه (۲) برقرار می‌باشد. اگر در الگوریتم BFINV، برخی از درایه‌های ماتریس‌های W و Z حذف شوند، آن‌گاه رابطه (۳) برقرار است و الگوریتم BFAPINV نامیده می‌شود. در این پایان نامه تجزیه UL ناقص جدید ماتریس A، که IULBF نامیده می‌شود به عنوان محصول فرعی الگوریتم BFAPINV محاسبه خواهد شد. پیش شرط IULBF تقریبی از A به صورت

$$A \approx UL,$$

ارائه می‌دهد که U، ماتریس بالا مثلثی یکانی و L ماتریس پایین مثلثی می‌باشد.

مطالب این پایان نامه در سه فصل بیان می‌شود.

در فصل اول، ابتدا روش‌های زیر فضای کریلف و الگوریتم GMRES بیان می‌شوند. سپس، انواع متفاوت پیش شرط‌ها برای دستگاه‌های خطی بیان می‌شوند. در ادامه پیش شرط RIF[۱۴] [۲]، که به عنوان محصول فرعی الگوریتم AINV[۱۵] [۱] تولید می‌شود توضیح داده خواهد شد. در انتهای این فصل مبنای ریاضی روش حذف کردن بر پایه معکوس ارائه می‌گردد.

در فصل دوم، ابتدا الگوریتم‌های FFINV و BFINV بیان می‌شوند. سپس، چگونگی ساخته شدن پیش شرط‌های ILUFF و IULBF، به ترتیب به عنوان محصولات فرعی الگوریتم‌های FFAPINV

[۱۳] Backward Factored INVerse

[۱۴] Robust Incomplete Factorization

[۱۵] Approximate INVerse

و BFAPINV ارائه می‌شود.

در فصل سوم، شیوه‌های متفاوت فرایند حذف کردن درایه‌های ماتریس‌های L، U، W و Z در الگوریتم‌های ILUFF و IULBF بیان می‌شود. یکی از این شیوه‌های حذف کردن درایه‌های ماتریس‌های L، U، W و Z بر مبنای حذف کردن بر پایه معکوس است که با جزئیات بیشتری بررسی خواهد شد. در انتهای این فصل، به منظور بررسی کیفیت نسخه‌های متفاوت پیش شرط‌های ILUFF و IULBF، آن‌ها را به عنوان پیش شرط چپ برای دستگاه‌های خطی متفاوت که ماتریس ضرایب آن‌ها از مرجع [۵] انتخاب شده است، به کار برده و دستگاه‌های پیش شرط شده را با روش زیر فضای کریلف GMRES(16) حل می‌کنیم.

در این پایان نامه، نمادهای $A_{:,j}$ و $A_{j,:}$ به ترتیب نشان دهنده ستون j ام و سطر j ام ماتریس دلخواه A می‌باشند.

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم اولیه

۱.۱ روش‌های زیر فضای کریلف

فرض کنید X_0، جواب ابتدایی دستگاه خطی

$$AX = b, \qquad (۱.۱)$$

باشد که $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $X, b \in \mathbb{R}^n$. با در نظر گرفتن $r_0 = b - AX_0$، زیر فضای کریلف $K_m(A, r_0)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$K_m = K_m(A, r_0) = span\{r_0, Ar_0, ..., A^{m-1}r_0\}.$$

در واقع زیر فضای کریلف شامل همه بردارهای $\mathbb{R}^n$، به شکل $p(A)r_0$ می‌باشد. p چند جمله‌ای برحسب A و از درجه نا بیشتر از $m-1$ است. فرض کنید $v_1 = r_0/\|r_0\|_2$ باشد. در این صورت الگوریتم آرنولدی [۱] پایه یکا متعامد[۲] برای زیر فضای کریلف K_m خواهد ساخت. الگوریتم آرنولدی به شکل زیر است.

الگوریتم ۱.۱. الگوریتم آرنولدی

1. *Inpute: a vector* v_1, $\|v_1\|_2 = 1$.
2. ***for*** $j = 1$ *to* m ***do***
3. *Compute* $w_j = Av_j$

[۱] Arnoldi
[۲] Orthonormal

4. ***for*** $i = 1$ *to* j ***do***
5. $\quad h_{ij} = (w_j, v_i)$
6. $\quad w_j = w_j - h_{ij} v_i$
7. ***end for***
8. $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$. *If* $h_{j+1,j} = 0$ *Then stop*
9. $v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$
10. ***end for***
11. *output:* $V_{m+1} = [v_1, ..., v_{m+1}] \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$ *and* $\hat{H}_m = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{(m+1)\times m}$.

گزاره ۱.۱. فرض کنید $V_m = [v_۱, ..., v_m]$، ماتریس $n \times m$ ای باشد که بردارهای $v_۱, ..., v_m$ ستون‌های اول تا m ام ماتریس $V_{m+۱}$ حاصل از الگوریتم آرنولدی باشد. همچنین بردار w_m و درایه‌های ماتریس بالا هسنبرگی $\hat{H}_m = (h_{ij})$ توسط الگوریتم ۱.۱ تولید شوند. علاوه بر این فرض کنید ماتریس H_m از حذف آخرین سطر ماتریس $\hat{H}_m$ به دست آید. در این صورت، رابطه‌های زیر برقرار است

$$\begin{aligned} AV_m &= V_m H_m + w_m e_m^T, \\ &= V_{m+۱} \hat{H}_m, \\ V_m^T A V_m &= H_m. \end{aligned}$$

اثبات. به مرجع [۱۵] نگاه کنید. □

روش‌های زیر فضای کریلف نمونه‌ای از روش‌های تصویری می‌باشند که X_m، جواب تقریبی دستگاه (۱.۱) در زیر فضای $X_۰ + K_m$ جستجو می‌شود با این شرط که بردار مانده $(b - AX_m)$ بر زیر فضای m بعدی دیگری مانند L_m عمود شود. انتخاب‌های متفاوتی برای L_m وجود دارد که یکی از آن‌ها $L_m = AK_m$ است. با انتخاب $L_m = AK_m$، جواب تقریبی X_m، در زیر فضای $X_۰ + K_m$ جستجو می‌شود در حالیکه بردار مانده بر زیر فضای AK_m عمود است.

گزاره ۲.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ باشد. $X_m \in X_\circ + K_m$، جواب تقریبی حاصل از روش زیر فضای کریلفی است که $L_m = AK_m$ می‌باشد اگر و تنها اگر

$$R(X_m) = \min_{X\in X_\circ + K_m} R(X),$$

که $R(X) = \|b - AX\|_2$ تعریف می‌شود.

اثبات. به مرجع [۱۵] نگاه کنید. □

۲.۱ الگوریتم GMRES

با توجه به اینکه ستون‌های ماتریس $V_m = [v_1, ..., v_m]$ پایه‌ای برای زیر فضای کریلف K_m می‌باشند در این صورت اگر $X \in X_\circ + K_m$ باشد، آن‌گاه بردار X به شکل

$$X = X_\circ + V_m y,$$

نوشته می‌شود، که $y \in R^m$ است. در الگوریتم GMRES، بردار $X_m \in X_\circ + K_m$ به‌گونه‌ای جستجو می‌شود که

$$\|b - AX_m\|_2 = \min_{X\in X_\circ + K_m} \|b - AX\|_2.$$

بنابراین طبق گزاره ۲.۱، $X_m \in X_\circ + K_m$، جواب تقریبی دستگاه (۱.۱) با استفاده از روش زیر فضای کریلفی است که $L_m = AK_m$ می‌باشد.

با فرض $\beta = \|r_\circ\|_2$، $v_1 = r_\circ/\beta$ و استفاده از گزاره ۱.۱ داریم

$$b - AX = b - A(X_\circ + V_m y) = r_\circ - AV_m y = \beta v_1 - V_{m+1}\hat{H}_m y = V_{m+1}(\beta e_1 - \hat{H}_m y).$$

از آنجایی که ستون‌های ماتریس V_{m+1}، بردارهای یکا متعامد می‌باشند، بنابراین

$$\|b - AX\|_2 = \|\beta e_1 - \hat{H}_m y\|_2.$$

الگوریتم GMRES بردار y_m را به گونه‌ای محاسبه می‌کند که به ازای $y = y_m$، نرم دوی بردار $(\beta e_1 - \hat{H}_m y)$ کمینه می‌شود، بنابراین X_m ای که به صورت

$$X_m = X_\circ + V_m y_m,$$

تعریف می‌شود جواب تقریبی دستگاه (۱.۰) است.

با توجه به آنکه m، بعد زیر فضای کریلف می‌باشد، الگوریتم GMRES که جواب دستگاه $AX = b$ را در زیر فضای کریلف m بعدی جستجو می‌کند را با نماد GMRES(m) نمایش می‌دهند. الگوریتم GMRES(m) به شکل زیر است.

الگوریتم ۲.۱. الگوریتم *GMRES(m)* برای یافتن جواب تقریبی دستگاه $AX = b$ با جواب اولیه $X_\circ$

1. *Compute* $r_0 = b - AX_0, \quad \beta = \|r_0\|_2 \quad$ *and* $v_1 = r_0/\beta$
2. *Define the* $(m+1) \times (m)$ *matrix* $\hat{H}_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m}$. *set* $\hat{H}_m = 0$.
3. ***for*** $j = 1$ *to* m ***do***
4.   *Compute* $w_j = Av_j$
5.   ***for*** $i = 1$ *to* j ***do***
6. $h_{ij} = (w_j, v_i)$
7. $w_j = w_j - h_{ij} v_i$
8.   ***end for***
9. $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$. *If* $h_{j+1,j} = 0$ *set* $m = j$ *and go to 12*
10. $v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$
11. ***end for***
12. *Define* $V_m = [v_1, ..., v_m]$.
13. *Compute* y_m *the minimizer of* $\|\beta e_1 - \hat{H}_m y\|_2$ *and define* $X_m = X_0 + V_m y_m$ *as the approximate solution.*

اگر با اجرای یکبار الگوریتم GMRES(m) و محاسبه $X_m = X_\circ + V_m y_m$، نرم باقیمانده مطلوب حاصل نشود، آنگاه الگوریتم فراخوانی مجدد GMRES(m)[۳] اجرا می‌شود. به عبارت دیگر در انتهای

[۳] Restarted GMRES(m)

هر گام، اگر بردار X_m در شرط توقف صدق نکند، $X_\circ = X_m$ در نظر گرفته می شود و الگوریتم GMRES(m) به ازای $X_\circ$ جدید دوباره فراخوانی می‌شود. الگوریتم فراخوانی مجدد GMRES(m) به شکل زیر است.

الگوریتم ۳.۱. الگوریتم فرا خوانی مجدد *GMRES(m)*

1. *Compute* $r_0 = b - AX_0, \quad \beta = \|r_0\|_2$ *and* $v_1 = r_0/\beta$
2. *Generate the Arnoldi basis and the matrix* $\hat{H}_m$ *using the Arnoldi algorithm starting with* v_1
3. *Compute* y_m *which minimizes* $\|\beta e_1 - \hat{H}_m y\|_2$ *and* $X_m = X_0 + V_m y_m$
4. *If the stopping criterion is statisfied then Stop, else* $X_0 := X_m$ *and Go to 1*

۳.۱ پیش شرط‌ها

پیش شرط‌ها از لحاظ ساختاری به سه دسته پیش شرط صریح[۴]، پیش شرط ضمنی[۵] و پیش شرط ترکیبی[۶] تقسیم بندی می‌شوند.

پیش شرط صریح: ماتریس M را پیش شرط صریح دستگاه (۱.۱) گویند هرگاه $M \approx A^{-۱}$ باشد. پیش شرط صریح M را می‌توان به عنوان پیش شرط چپ یا راست مورد استفاده قرار داد. اگر پیش شرط M به عنوان پیش شرط چپ مورد استفاده قرار گیرد، آن‌گاه دستگاه پیش شرط شده‌ی چپ

$$MAX = Mb,$$

را خواهیم داشت. اگر پیش شرط M به عنوان پیش شرط راست مورد استفاده قرار گیرد، آن‌گاه دستگاه پیش شرط شده‌ی راست

$$AMu = b, \qquad Mu = X,$$

[۴] Explicit preconditioner
[۵] Implicit preconditioner
[۶] Hybrid preconditioner

را خواهیم داشت. پیش شرط AINV [۱]، از جمله پیش شرط‌های صریح می‌باشد که تقریبی از A^{-1} به صورت

$$A^{-1} \approx M = ZD^{-1}W^{T}, \tag{۲.۱}$$

را محاسبه می‌کند که در آن ماتریس‌های W و Z بالا مثلثی یکانی و D ماتریس قطری می‌باشند. الگوریتم FFAPINV، پیش شرط صریح دیگری برای دستگاه (۱.۱) به صورت

$$A^{-1} \approx M = ZD^{-1}W, \tag{۳.۱}$$

ارائه می‌کند که ماتریس‌های W، Z و D به ترتیب پایین مثلثی یکانی، بالا مثلثی یکانی و قطری می‌باشند.

به عنوان مثالی دیگر از پیش شرط‌های صریح دستگاه (۱.۱)، می‌توان به پیش شرط حاصل از الگوریتم BFAPINV اشاره کرد. در الگوریتم BFAPINV، ماتریس‌های W، Z و D به ترتیب بالا مثلثی یکانی، پایین مثلثی یکانی و قطری به گونه‌ای تولید می‌شوند که تقریبی از A^{-1} به صورت (۳.۱) ظاهر می‌شود.

پیش شرط ضمنی: ماتریس M را پیش شرط ضمنی دستگاه (۱.۱) گویند هرگاه $A \approx M$ باشد. پیش شرط ضمنی M را می‌توان به عنوان پیش شرط چپ یا راست مورد استفاده قرار داد. اگر پیش شرط M به عنوان پیش شرط چپ مورد استفاده قرار گیرد، آنگاه دستگاه پیش شرط شده‌ی چپ

$$M^{-1}AX = M^{-1}b, \tag{۴.۱}$$

را خواهیم داشت. اگر پیش شرط M به عنوان پیش شرط راست مورد استفاده قرار گیرد، آنگاه دستگاه پیش شرط شده‌ی راست

$$AM^{-1}u = b, \qquad M^{-1}u = X,$$

را خواهیم داشت. به عنوان مثال‌هایی از این نوع پیش شرط، می‌توان به پیش شرط‌های RIF [۲]، ILUC [۱۰]، ILUT [۱۶] و ILUFF [۱۷] اشاره کرد.

پیش شرط RIF، به عنوان محصول فرعی از پیش شرط AINV محاسبه می شود. به عبارت دیگر همزمان با ساخته شدن فاکتورهای Z ، W و D در رابطه (۲.۱)، عامل‌های L و U نیز محاسبه خواهند شد و رابطه‌ی

$$A \approx M = LDU,$$

برقرار است. پیش شرط ILUFF ساختاری به صورت

$$A \approx M = LU,$$

دارد که فاکتورهای L و U این پیش شرط به عنوان محصول فرعی از الگوریتم FFAPINV محاسبه می شوند.

پیش شرط IULBF ارائه شده در این پایان نامه مثال دیگری از پیش شرط های ضمنی می‌باشد که در فصل دوم به طور کامل معرفی خواهد شد.

پیش شرط ترکیبی: این نوع پیش شرط را می‌توان هم به عنوان تقریبی برای ماتریس A، و هم به عنوان تقریبی برای ماتریس A^{-1} دانست. فرض کنید با استفاده از این نوع پیش شرط، دستگاه $AX = b$ به دستگاه پیش شرط شده تبدیل شود. برای حل دستگاه پیش شرط شده با استفاده از روش‌های زیر فضای کریلف، در هر تکرار داخلی، هم نیاز به حل دستگاه با روش جایگذاری پیشرو (پسرو) و هم نیاز به ضرب ماتریس−بردار خواهد بود.

در این پایان نامه از پیش شرط‌های RIF، ILUFF و IULBF به عنوان پیش شرط چپ برای دستگاه‌های خطی مختلف استفاده شده است و دستگاه خطی پیش شرط شده حاصل به صورت (۴.۱) می‌باشد. به منظور حل دستگاه خطی پیش شرط شده‌ی (۴.۱) با روش GMRES(m)، نیاز به تغییراتی در الگوریتم GMRES(m) خواهیم داشت. الگوریتم GMRES(m) برای حل دستگاه خطی (۴.۱) به شکل زیر است.

الگوریتم ۴.۱. الگوریتم *GMRES(m)* برای حل دستگاه $M^{-1}AX = M^{-1}b$

1. *Compute* $r_0 = M^{-1}(b - AX_0)$, $\quad \beta = \|r_0\|_2 \quad$ *and* $v_1 = r_0/\beta$

2. *Define the* $(m+1)\times(m)$ *matrix* $\hat{H}_m = \{h_{ij}\}_{1\le i\le m+1, 1\le j\le m}$. *set* $\hat{H}_m = 0$.
3. ***for*** $j = 1$ *to* m ***do***
4. *Compute* $w = M^{-1}Av_j$
5. ***for*** $i = 1$ *to* j ***do***
6. $h_{ij} = (w, v_i)$
7. $w = w - h_{ij}v_i$
8. ***end for***
9. $h_{j+1,j} = \|w\|_2$. *If* $h_{j+1,j} = 0$ *set* $m = j$ *and go to 12*
10. $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$
11. ***end for***
12. *Define* $V_m = [v_1, ..., v_m]$
13. *Compute* y_m *the minimizer of* $\|\beta e_1 - \hat{H}_m y\|_2$ *and* $X_m = X_0 + V_m y_m$.
14. *If the stopping criterion is satisfied then Stop, else* $X_0 := X_m$ *and GoTo 1*

۴.۱ پیش شرط AINV

فرض کنید A ماتریس نامتقارن، W و Z ماتریس های بالا مثلثی یکانی و D ماتریس قطری باشد که در رابطه‌ی

$$W^T AZ = D,$$

صدق کنند، بنابراین معکوس ماتریس نامتقارن A دارای تجزیه‌ای به صورت

$$A^{-1} = ZD^{-1}W^T, \tag{۵.۱}$$

می‌باشد. الگوریتم پیمایش راست[۷] و پیمایش چپ[۸] $A-$دو مزدوج سازی[۹] را می‌توان برای محاسبه تجزیه (۵.۱) به کار برد [۱]. با به کار بردن هر یک از این دو الگوریتم بر روی ستون های دو ماتریس

---

۷ Right-looking
۸ Left-looking
۹ A-biconjugation

نامنفرد $Z^{(\circ)}, W^{(\circ)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$، دو مجموعه از بردارهای $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ و $\{z_i\}_{i=1}^{n}$ به گونه‌ای ساخته می‌شوند که

$$w_i^T A z_j = \left\{ \begin{array}{ll} \circ & i \neq j, \\ d_i & i = j. \end{array} \right.$$

بنابراین اگر ماتریس‌های $W = [w_1, ..., w_n]$ و $Z = [z_1, ..., z_n]$ باشند، آن‌گاه رابطه‌ی (۵.۱) برقرار است. ساده‌ترین انتخاب برای ماتریس‌های $W^{(\circ)}$ و $Z^{(\circ)}$، اختیار کردن آن‌ها برابر با ماتریس همانی می‌باشد. اگر در هنگام ساختن ماتریس‌های W و Z برخی از درایه‌های این دو ماتریس حذف شوند، آن‌گاه تجزیه تقریبی معکوس ماتریس A، به صورت

$$A^{-1} \approx Z D^{-1} W^T,$$

محاسبه خواهد شد که نخستین بار توسط بنزی [10] و توما[11] در سال ۱۹۹۸ ارائه و پیش شرط AINV نامیده شد [۱]. در روند ساختن پیش شرط AINV، اگر از نسخه‌های پیمایش راست و پیمایش چپ الگوریتم A−دو مزدوج سازی استفاده شود، آن‌گاه نسخه‌های پیمایش راست و پیمایش چپ پیش شرط AINV تولید خواهد شد. بدنه و ساختار نسخه پیمایش راست پیش شرط AINV به صورت زیر است.

الگوریتم ۵.۱. بدنه نسخه پیمایش راست پیش شرط *AINV* بر مبنای الگوریتم پیمایش راست A−دو مزدوج سازی

1. ***for*** $i = 1$ *to* n ***do***
2. $\quad w_i^{(0)} = e_i, \qquad z_i^{(0)} = e_i$
3. ***end for***
4. ***for*** $i = 1$ *to* n ***do***
5. $\quad v_i = Ae_i, \qquad u_i = A^T e_i$
6. $\quad q_i^{(i-1)} = (w_i^{(i-1)})^T v_i, \qquad p_i^{(i-1)} = (z_i^{(i-1)})^T u_i$

---
[10] Michele Benzi
[11] Miroslav Tuma

$\textbf{\textit{for}}\ j = i+1\ \textit{to}\ n\ \textbf{\textit{do}}$

$\quad q_j^{(i-1)} = (w_j^{(i-1)})^T v_i, \qquad p_j^{(i-1)} = (z_j^{(i-1)})^T u_i$

$\quad$ *apply a dropping rule to* $q_j^{(i-1)}$ *and to* $p_j^{(i-1)}$

$\quad w_j^{(i)} = w_j^{(i-1)} - (\frac{q_j^{(i-1)}}{q_i^{(i-1)}}) w_i^{(i-1)}, \qquad z_j^{(i)} = z_j^{(i-1)} - (\frac{p_j^{i-1}}{p_i^{(i-1)}}) z_i^{(i-1)}$

$\quad$ *for all* $l \leq i$ *apply a dropping rule to* $w_{lj}^{(i)}$ *and to* $z_{lj}^{(i)}$

end for

end for

Let $z_i = z_i^{(i-1)}, \ \ w_i = w_i^{(i-1)}$ *and* $d_{ii} = p_i = p_i^{(i-1)}$, *for* $1 \leq i \leq n$.

Return $Z = [z_1, ..., z_n], W = [w_1, ..., w_n]$ *and* $D = diag(d_{ii})$.

برای توضیحات بیش‌تر در مورد نسخه پیمایش چپ پیش شرط AINV به [۱، ۱۱] مراجعه کنید.

۵.۱ پیش شرط RIF

فرض کنید که ماتریس A، علاوه بر تجزیه‌ی (۵.۱)، تجزیه‌ای به صورت زیر نیز داشته باشد:

$$A = LDU, \tag{۶.۱}$$

که در آن U و L^T ماتریس‌های بالا مثلثی یکانی و D یک ماتریس قطری است. بنابراین

$$A^{-۱} = U^{-۱} D^{-۱} L^{-۱}.$$

با توجه به یکتا بودن این تجزیه برای $A^{-۱}$، علاوه بر یکسان بودن ماتریس‌های قطری D در رابطه‌های (۵.۱) و (۶.۱)، رابطه‌های زیر نیز برقرارند:

$$Z = U^{-۱}, \qquad W^T = L^{-۱}.$$

به ازای $j \geq i$، درایه‌های U_{ij} ماتریس U را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی

$$U_{ij} = (D^{-۱} W^T A)_{ij} = \frac{p_j^{(i-۱)}}{p_i^{(i-۱)}}, \tag{۷.۱}$$

محاسبه کرد. همچنین به ازای $j \geq i$ خواهیم داشت [۲، ۱۱، ۱۲]:

$$L_{ji} = (AZD^{-۱})_{ji} = \frac{q_j^{(i-۱)}}{q_i^{(i-۱)}}. \tag{۸.۱}$$

بنابراین اگر ماتریس A، نامتقارن باشد، آن‌گاه ماتریس‌های L و U در تجزیه تقریبی A را می‌توان به عنوان محصولات فرعی نسخه‌های پیمایش راست و چپ پیش شرط AINV تولید کرد. در این حالت، پیش شرط LDU ناقصی محاسبه خواهد شد که RIF نامیده می‌شود. اگر ماتریس‌های L و U پیش شرط RIF، به عنوان محصول فرعی از نسخه پیمایش راست (چپ) پیش شرط AINV تولید شوند آن‌گاه نسخه پیمایش راست (چپ) پیش شرط RIF حاصل خواهد شد. الگوریتم زیر که مبنای آن الگوریتم ۵.۱ است، نسخه پیمایش راست پیش شرط RIF را محاسبه می‌کند [۱۲].

الگوریتم ۶.۱. نسخه پیمایش راست پیش شرط *RIF*

for $i = 1$ *to* n ***do***

$w_i^{(0)} = e_i, \qquad z_i^{(0)} = e_i$

end for

for $i = 1$ *to* n ***do***

$v_i = Ae_i, \qquad u_i = A^T e_i \qquad$ *(if A is not positive definite)*

$v_i = Aw_i^{(i-1)}, \qquad u_i = A^T z_i^{(i-1)} \qquad$ *(if A is positive definite)*

$q_i^{(i-1)} = (w_i^{(i-1)})^T v_i, \qquad p_i^{(i-1)} = (z_i^{(i-1)})^T u_i$

for $j = i+1$ *to* n ***do***

$q_j^{(i-1)} = (w_j^{(i-1)})^T v_i, \qquad p_j^{(i-1)} = (z_j^{(i-1)})^T u_i$

$L_{ji} = \frac{q_j^{(i-1)}}{q_i^{(i-1)}}, \qquad U_{ij} = \frac{p_j^{(i-1)}}{p_i^{(i-1)}}$

apply a dropping rule to L_{ji} and to U_{ij}

$w_j^{(i)} = w_j^{(i-1)} - (\frac{q_j^{(i-1)}}{q_i^{(i-1)}})w_i^{(i-1)}, \qquad z_j^{(i)} = z_j^{(i-1)} - (\frac{p_j^{(i-1)}}{p_i^{(i-1)}})z_i^{(i-1)}$

for all $l \leq i$ apply a dropping rule to $w_{lj}^{(i)}$ and to $z_{lj}^{(i)}$

end for

end for

Let $d_{ii} = p_i^{(i-1)}$, for $1 \leq i \leq n$.