بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی محض، گرایش نظریه معادلات دیفرانسیل**

**عنوان**

# روش‌های تحلیلی و تقریبی برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری

استاد راهنما

**پروفسور محمد جهانشاهی**

پژوهشگر

مسعود محمدپور زنجانی

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: محمدپورزنجانی نام: مسعود

---

عنوان: روش‌های تحلیلی و تقریبی برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری

---

استاد راهنما: پروفسور محمد جهانشاهی

---

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: نظریه معادلات دیفرانسیل

---

دانشگاه: شهید مدنی آذربایجان دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۱۰۷

---

واژگان کلیدی: مسائل اشتورم-لیوویل، معادلات دیفرانسیل کسری، روش تحلیلی-تقریبی

---

**چکیده**

این پایان‌نامه، مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول به تعاریف کلی و مفاهیم اولیه در مورد معادلات دیفرانسیل عادی می‌پردازیم. در فصل دوم نظریه اشتورم-لیوویل را بیان و به بررسی حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته و نتایج و قضایای مهم آن را ارائه داده‌ایم. در فصل سوم پنج روش تحلیلی-عددی از جمله روش تجزیه آدومیان، روش تحلیلی هموتوپی، روش اختلال هموتوپی، روش تکراری و روش تبدیل دیفرانسیل را برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری بکار می‌بریم، و در فصل چهارم به ارائه برنامه‌های کامپیوتری این روش‌ها و مقایسه نتایج پرداخته‌ایم.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

# پروردگارا...

مرا ایمانی عطا کن که نگران روزیم نباشم، مانند کودکی که نگران وعده بعدی غذایش نیست، زیرا به مهربانی مادرش ایمان دارد.

مرا بازدار از اینکه انسان بینوا را فرومایه پندارم، یا گمان کنم که انسان توانگر، فضل و برتری دارد ...

در مقابل، مرا بازدار از اینکه انسان توانگر را متکبر و بخیل پندارم و یا گمان کنم که بینوایان همواره فضل و برتری دارند ...

چیزی که از تو می‌خواهم تعادل است ...

که بدانم شریف کسی است که فرمانبرداری تو او را شرافت بخشیده باشد و عزیز کسی است که از بندگی تو عزت یافته باشد ...

# سپاس‌گزاری...

در ابتدا خداوند قادر و قهار را سپاس می‌گویم که یادش، آرامش‌بخشم در لحظات ناشکیبایی بوده است.

با سپاس فراوان از کلیه آموزگاران، دبیران و اساتید همه مقاطع تحصیلی خود، و سپاس ویژه از آقای دکتر محمد جهانشاهی بابت راهنمایی در انجام پایان‌نامه، از خانواده‌ام برای فراهم کردن شرایط و محیط لازم و از کلیه دوستانی که در مراحل مختلف مرا یاری کردند، اعلام می‌کنم.

مسعود محمدپور زنجانی
۱۳۹۳

# فهرست مطالب


**فهرست مطالب** **چ**

**۱ پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی** **۱**

۱.۱ مقدمه ۱

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۴

۳.۱ روش تکرار پیکارد ۵

۴.۱ مسائل خوش طرح ۶

۵.۱ معادلات انتگرال ۶

۱.۵.۱ معادلات انتگرال ولترا و فردهلم ۷

**۲ آشنایی با نظریه اشتورم-لیوویل و حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل کسری** **۸**

۱.۲ معادله اشتورم-لیوویل ۸

۲.۲ توابع پایه‌ای در حساب کسری ۱۷

۱.۲.۲ تابع گامای اویلر ۱۷

۲.۲.۲ تابع بتا ۱۹

۳.۲.۲ تابع میتاگ-لفلر ۲۰

۳.۲ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری ۲۱

۱.۳.۲ انتگرال کسری ریمان-لیوویل ۲۱

۲.۳.۲ مشتق کسری ریمان-لیوویل ۲۲

۳.۳.۲ قاعده لایبنتز برای مشتق کسری ۲۴

۴.۳.۲ مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل روی نیم محور حقیقی مثبت و روی محور حقیقی ۲۴

۵.۳.۲ مشتق کسری کاپوتو . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۵
۶.۳.۲ مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۷
۷.۳.۲ خاصیت جابجایی در مشتق کسری ریمان-لیوویل . . . . . . . . . . . . . . ۲۷
۴.۲ معادلات دیفرانسیل کسری . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۲۹
۵.۲ بررسی وجود و یگانگی جواب مسائل اشتورم-لیوویل کسری . . . . . . . . . . . . . ۳۱

**۳ روش‌های تحلیلی-تقریبی برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری ۳۵**
۱.۳ روش تجزیه آدومیان برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری . . . . . . . . . . . . ۳۵
۲.۳ روش تحلیلی هموتوپی برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری . . . . . . . . . . . ۴۱
۳.۳ روش اختلال هموتوپی برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری . . . . . . . . . . . ۵۰
۴.۳ روش تکراری برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری . . . . . . . . . . . . . . ۵۸
۵.۳ روش تبدیل دیفرانسیل برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری . . . . . . . . . . . ۶۵

**۴ برنامه‌های کامپیوتری و مقایسه روش‌ها ۷۵**
۱.۴ برنامه‌های کامپیوتری . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۵
۱.۱.۴ تجزیه آدومیان . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۵
۲.۱.۴ تحلیلی هموتوپی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۷۹
۳.۱.۴ اختلال هموتوپی . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸۳
۴.۱.۴ تکراری . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸۵
۵.۱.۴ تبدیل دیفرانسیل . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸۶
۲.۴ مقایسه روش‌ها . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ۸۸

**مراجع ۹۱**

**واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۳**

**واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۶**

# فصل ۱

# پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

## ۱.۱ مقدمه

پدیده‌های طبیعی زیادی به صورت یک معادله خطی و غیر خطی با شرایط مرزی و اولیه قابل بیان می‌باشند. بسیاری از این معادلات جزو دسته‌بندی معادلات اشتورم-لیوویل قرار می‌گیرند یا با تغییراتی قابل تبدیل به معادله اشتورم-لیوویل هستند. مسایل اشتورم-لیوول که به مسایل مقدار ویژه نیز موسوم هستند در خیلی از مسایل فیزیکی و مهندسی و ریاضیات کاربردی ظاهر می‌شوند. به خاطر این موضوع این مسایل در کانون توجه ریاضیدانان و فیزیکدانان قرار گرفته و تاکنون کتابها و مقالات زیادی در این زمینه نوشته شده‌اند. این مسایل اولین بار توسط ریاضیدانان حدود ۱۷۰ سال قبل مطرح شدند [۲۳، ۲۶]، از آن موقع به بعد به جرأت می‌توان گفت هزاران مقاله، پایان‌نامه ارشد و رساله دکتری در این مسایل نوشته شده است. هدف از حل این مسایل در حالت مستقیم پیدا کردن مقادیر ویژه و توابع ویژه‌ی عملگر اشتورم-لیوویل می‌باشد که در حالت کلی برای معادلات مرتبه دوم عادی به صورت

$$\frac{-d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] + q(x)y = \lambda\omega(x)y$$

همراه با شرایط مرزی موضعی به فرم

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0 \qquad c_1^2 + c_2^2 > 0$$
$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0 \qquad d_1^2 + d_2^2 > 0$$

روی بازه $[a, b]$ نوشته می‌شود.

از طرفی معادلات دیفرانسیل کسری با پیدایش انتگرال و مشتق کسری در سالهای اخیر پیشرفت زیادی کرده است و کتاب ها و مقالات متعددی در این زمینه نوشته شده‌اند[۹، ۱۳]. سوال اصلی که منجر به تعریف حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری می‌گردد، عبارت است از:

"آیا می‌توان عدد صحیح $n$ مربوط به مرتبه مشتق را به یک عدد کسری توسیع داد؟ آیا مشتق حاصل معنی‌دار خواهد بود؟"

سپس سوال تبدیل شد به:"آیا $n$ می‌تواند هر عدد کسری، اصم یا مختلط باشد؟"

لایبنتز[۱] برای اولین بار نماد $\frac{d^ny}{dx^n}$ را برای مشتق معرفی کرد. شاید بازی ساده وی با نمادها بود که هوپیتال[۲] را برای سوال کردن از او در سال ۱۶۹۵ برانگیخت: "چه اتفاقی خواهد افتاد اگر $n$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ باشد؟" در سال ۱۸۱۲ لاپلاس [۳] یک عملگر مشتق کسری به مفهوم انتگرال را معرفی کرد و در سال ۱۸۱۹ اولین اثر را در مورد مشتق از هر مرتبه ای به چاپ رساند.

لاکروکس[۴] ، نزدیک دو صفحه از ۷۰۰ صفحه مقاله خود را به این موضوع اختصاص داد که او یک مساله ریاضی محض از مرتبه صحیح را به صورت $y = x^m$ تعمیم داد که در آن $m$ عددی صحیح است. لذا با قرار دادن

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

و بکار بردن نماد لژاندر[۵] به عنوان تعمیم فاکتوریل رابطه‌ی

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-n+۱)}x^{m-n}$$

بدست می‌آید. پس برای $y = x$ و $n = \frac{۱}{۲}$ مثال زیر را ارائه کرد.

$$\frac{d^{\frac{۱}{۲}}y}{dx^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

گرچه لایبنتز، اویلر[۶]، لاپلاس، لاکروکس و فوریه[۷] اشاره‌هایی به مشتق از هر مرتبه‌ای داشتند، اما اولین کسی که عملگرهای مشتق کسری را مورد استفاده قرار داد آبل[۸] بود. او حساب دیفرانسیل کسری را برای حل معادلات انتگرال به دست آمده از مدل سازی مساله تاتوکرون[۹] به کار برد و یک مقدار ثابت $k$ را به صورت $k = \int_۰^x (x-t)^{\frac{-۱}{۲}} f(t)dt$ در نظر گرفت. اگر مضرب $\frac{۱}{\Gamma(\frac{۱}{۲})}$ را نیز برای انتگرال فوق در نظر بگیریم حاصل همان مشتق مرتبه $\frac{۱}{۲}$ برای مقدار $k$ خواهد بود. لیوویل[۱۰] اولین کسی بود که برای حل معادلات دیفرانسیل شامل مشتقات کسری تلاش هایی انجام داد [۱۶] .

[۱]Leibniz
[۲]Hopital
[۳]Laplace
[۴]Lacroix
[۵]Legendre
[۶]Euler
[۷]Fourier
[۸]Abel
[۹]Tatokoroun
[۱۰]Liouville

در این پایان‌نامه با پنج روش تحلیلی-تقریبی از جمله روش تجزیه آدومیان، تحلیلی هموتوپی، اختلال هموتوپی، روش تکراری و تبدیل دیفرانسیل برای حل مسائل اشتورم-لیوویل کسری آشنا و برای هر روش یک مسئله اشتورم-لیوویل منظم و یک مسئله اشتورم-لیوویل منفرد حل خواهیم کرد. شایان ذکر است مقالاتی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارتند از: [۷، ۱۱، ۱۲، ۲۱، ۲۴].

## ۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

هر رابطه‌ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم، که دو دسته هستند، اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله را معادله دیفرانسیل عادی و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل جزئی می‌نامند.

**تعریف ۱.۲.۱.** مرتبه یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مشتق موجود در معادله است.

**تعریف ۲.۲.۱.** اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان نسبت به مشتقات موجود در معادله به فرم چندجمله‌ای نوشت، آنگاه توان بالاترین مشتق موجود در معادله را درجه معادله دیفرانسیل گوییم.

**تعریف ۳.۲.۱.** هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند، جواب معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

**تعریف ۴.۲.۱.** تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه $n$ گوییم، هرگاه

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

**تعریف ۵.۲.۱.** هر معادله دیفرانسیل به فرم

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0.$$

را که درآن $p(x,y)$ و $q(x,y)$، هر دو تابع همگن از درجه $n$ باشد، یک معادله دیفرانسیل همگن نامیده می‌شود.

**تعریف ۶.۲.۱.** هر معادله دیفرانسیل به فرم

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0.$$

را کامل گوییم، هرگاه تابعی مانند $u(x,y)$ وجود داشته باشد که روابط زیر برقرار باشند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = q(x,y).$$

**تعریف ۷.۲.۱.** یک معادله دیفرانسیل خطی نامیده می شود، هرگاه نسبت به متغیر وابسته و مشتقات آن خطی باشد و ضرایب معادله تنها به متغیرهای مستقل بستگی داشته باشند.

**تعریف ۸.۲.۱.** مسئله مقدار اولیه، شامل یک معادله دیفرانسیل به همراه یک یا چند شرط اولیه است و هدف آن به دست آوردن تابعی است که در معادله دیفرانسیل و شرط‌های اولیه مربوطه صدق کند. شرط‌های اولیه، شرط‌های کوشی نیز نامیده می شوند.

**تعریف ۹.۲.۱.** یک مسئله مقدار مرزی، عبارت است از یک معادله دیفرانسیل به همراه یک مجموعه محدودکننده به نام شرایط مرزی و یک جواب مسئله مقدار مرزی جوابی از معادله مذکور است که در شرایط مرزی صدق می‌کند.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** اگر معادله دیفرانسیل به همراه یک یا چند شرط مرزی و اولیه به طور همزمان باشد، مسئله را یک مسئله مقدار اولیه-مرزی می‌نامیم.

مسائل مقدار اولیه، مدل ریاضی آن دسته از مسائل فیزیک و مهندسی هستند که نسبت به زمان طرح شده اند، در حالی که مسائل مرزی به آن دسته از مسئله‌هایی که مستقل از زمان بوده و نسبت به متغیرهای مکان (فضا) طرح شده‌اند، مربوط می باشند و در نهایت مسائل مقدار مرزی - اولیه مسئله‌هایی هستند که وابسته به متغیرهای زمان و مکان هستند.

## ۳.۱ روش تکرار پیکارد

معادلات دیفرانسیل بسیاری وجود دارند که نمی‌توان آنها را بوسیله یک روش استاندارد یا روش‌های ساده‌ای که جواب دقیق بدهند، حل نمود. ولی می‌توان از یک روش تقریبی برای پیدا کردن جواب تقریبی استفاده نمود. در زیر به بررسی روش تقریبی که به روش تکرار پیکارد[۱۱] موسوم است، می‌پردازیم و جواب تقریبی یک مسئله با شرط مرزی به صورت

$$y^{'} = f(x,y) \qquad y(x_\circ) = y_\circ \tag{۱.۱}$$

را بدست می‌آوریم و فرض می‌کنیم که (۱.۱) در فاصله شامل $x_\circ$ دارای یک جواب باشد. با انتگرال‌گیری از (۱.۱) داریم:

$$y(x) = y_\circ + \int_{x_\circ}^{x} f(s, y(s))ds \tag{۲.۱}$$

و به ازاء $x = x_\circ$ داریم:

$$\begin{aligned} y(x_\circ) &= y_\circ + \int_{x_\circ}^{x_\circ} f(s, y(s))ds \\ &= y_\circ + \circ \end{aligned}$$

و به علاوه با مشتق‌گیری از (۲.۱) نسبت به $x$ داریم:

$$y^{'} = f(x,y)$$

[۱۱] Picard

از طرفی برای مقادیر $x$ نزدیک $x_۰$، مقادیر $y$ در نزدیکی $y_۰$ می‌باشد. بنابراین اولین تقریب $y_۱$، از $y$ به وسیله تعویض $y$ با $y_۰$ در سمت راست (۲.۱) بدست می‌آید:

$$y_۱(x) = y_۰ + \int_{x_۰}^{x} f(s, y_۰(s))ds \tag{۳.۱}$$

و با تعویض $y_۰$ با $y_۱$ در سمت راست (۵.۱)، دومین تقریب به صورت زیر می‌باشد.

$$y_۲(x) = y_۰ + \int_{x_۰}^{x} f(s, y_۱(s))ds \tag{۴.۱}$$

و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، تقریب $n$-ام به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$y_n(x) = y_۰ + \int_{x_۰}^{x} f(s, y_{n-۱}(s))ds \tag{۵.۱}$$

در نتیجه یک دنباله از تقریبات بدست می‌آید، که این دنباله به جواب معادله (۱.۱)، همگرا است.

## ۴.۱ مسائل خوش طرح

**تعریف ۱.۴.۱.** یک مسئله ریاضی خوش طرح نامیده می شود هرگاه شرایط زیر را داشته باشد:

۱- **وجود**: حداقل یک جواب وجود داشته باشد.

۲- **یگانگی**: حداکثر یک جواب وجود داشته باشد.

۳- **پیوستگی**: جواب به ازای داده های مساله بطور پیوسته تغییر کند.

چون مدل ریاضی برای مسائل فیزیک و مهندسی در واقع، بیان واقعیتهای حاکم بر مسئله فیزیک و مهندسی در قالب روابط ریاضی است و غالباً مدل ریاضی مسائل فیزیک و مهندسی به صورت مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزی‌اند پس اغلب فیزیکدانان و مهندسان سعی می‌کنند سه ویژگی بالا را در حل مسئله‌های خود مدنظر داشته باشند.

## ۵.۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر انتگرال قرار دارد. یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $u$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود، بصورت زیر است.

$$f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)\ dt = ۰ \tag{۶.۱}$$

در معادله (۶.۱) تابع مجهول، یعنی $u(x)$ تنها در زیر علامت انتگرال ظاهر شده است. در حالت های دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم وجود داشته باشد.

### ۱.۵.۱ معادلات انتگرال ولترا و فردهلم

شکل کلی معادله انتگرال فردهلم که در آن حد پایین و حد بالای انتگرال به ترتیب اعداد ثابت $a$ و $b$ هستند، بصورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\ dt \quad a \le x, t \le b \tag{۷.۱}$$

$K(x,t)$ هسته انتگرال، تابع $f(x)$ بخش ناهمگن معادله و $\lambda$ یک پارامتر معلوم می باشد. بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرال فردهلم به دو دسته تقسیم می شوند:

۱. وقتی که $\phi(x) = ۰$ معادله (۷.۱) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\ dt = ۰$$

معادله فوق را معادله انتگرال فردهلم خطی نوع اول می نامند.

۲. وقتی که $\phi(x) = ۱$ معادله (۷.۱) به شکل زیر خواهد بود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\ dt = ۰$$

معادله فوق را معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم می نامند.

**تعریف ۱.۵.۱.** شکل کلی معادله انتگرال ولترای نوع دوّم به صورت زیر می‌باشد:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_۰}^{x} k(x,t)y(t)dt.$$

که در آن $k(x,t)$ هسته و $f(x)$ جمله‌ای ناهمگن می‌باشد. اگر سمت چپ رابطه فوق برابر صفر شود، آنگاه معادله انتگرال تبدیل به ولترای نوع اوّل می‌شود.

**تذکر:** در حالت کلی در معادله انتگرال فردهلم و ولترا خطی نوع اول، تابع مجهول تنها بصورت خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می شود، اما در معادله انتگرال فردهلم و ولترا خطی نوع دوم، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم خارج علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شده است. ویژگی ذکر شده باعث می شود که روش هایی چون روش تقریبات متوالی، روش تجزیه، روش جایگذاری متوالی و ... را برای حل و بررسی معادلات انتگرال نوع دوم به کار ببریم، در حالی که برای معادلات نوع اول کاربرد این روش ها امکان پذیر نیست.

# فصل ۲

# آشنایی با نظریه اشتورم-لیوویل و حسابان کسری و معادلات دیفرانسیل کسری

در این فصل ابتدا مسایل اشتورم-لیوویل عادی را معرفی می‌کنیم[۲۳] و در ادامه به مفاهیم و خاصیت‌های مشتق و انتگرال کسری و معادلات دیفرانسیل کسری می‌پردازیم[۱، ۹، ۱۳، ۱۶، ۱۷].

## ۱.۲ معادله اشتورم-لیوویل

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن را در حالت کلی می‌توانیم به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$a_۱(x)\frac{d^۲y}{dx^۲}+a_۲(x)\frac{dy}{dx}+[a_۳(x)+\lambda]y=۰ \qquad (۱.۲)$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$p(x)=\exp[\int^x \frac{a_۲(t)}{a_۱(t)}dt]$$
$$q(x)=\frac{a_۳(x)}{a_۱(x)}p(x)$$
$$s(x)=\frac{p(x)}{a_۱(x)}$$

با استفاده از این روابط و جاگذاری $p(x)$ و $q(x)$ و $s(x)$ در معادله (۱.۲) بدست می‌آوریم:

$$\frac{d}{dx}\left[p\frac{dy}{dx}\right]+(q+\lambda s)y=۰$$

که این به معادله اشتورم-لیوویل معروف است. با استفاده از عملگر زیر

$$L\equiv\frac{d}{dx}\left[p\frac{d}{dx}\right]+q$$

معادله (۱.۲) به فرم زیر در می‌آید:

$$L\left[y\right]+\lambda s(x)y=0$$

که در آن $\lambda$ پارامتر مستقل از $x$ بوده و $p(x)$ و $q(x)$ و $s(x)$ توابع حقیقی از متغیر $x$ هستند. به منظور اطمینان از وجود جوابها، فرض می‌کنیم $q(x)$ و $s(x)$ توابع پیوسته و $p(x)$ تابع پیوسته مشق‌پذیر در بازه بسته و محدود $[a,b]$ باشد.

**تعریف ۱.۱.۲.** معادله اشتورم-لیوویل در بازه $[a,b]$ منظم نامیده می‌شود هرگاه توابع $p(x)$ و $s(x)$ در بازه مذکور مقادیر مثبت داشته باشند.

**تعریف ۲.۱.۲.** معادله اشتورم-لیوویل

$$L\left[y\right]+\lambda s(x)y=0 \qquad a\leq x\leq b$$

همراه با شرایط مرزی

$$a_1 y(a)+a_2 y^{'}(a)=0$$
$$b_1 y(b)+b_2 y^{'}(b)=0$$

یک دستگاه منظم اشتورم-لیوویل نامیده می‌شود که در آن $a_1$ و $a_2$ و همچنین $b_1$ و $b_2$ همزمان صفر نبوده و اعداد حقیقی معلومی هستند.

**تعریف ۳.۱.۲.** مقادیر $\lambda$، برای یک دستگاه منظم اشتورم-لیوویل که جواب غیر بدیهی دارد، مقادیر ویژه و جواب‌های متناظر را توابع ویژه می‌نامند.

**مثال ۴.۱.۲.** دستگاه اشتورم-لیوویل

$$y^{''}+\lambda y=0 \qquad 0\leq x\leq \pi$$
$$y(0)=0 \qquad y^{'}(\pi)=0$$

را در نظر بگیرید.

اگر $\lambda>0$ باشد، جواب معادله اشتورم-لیوویل برابر است با:

$$y(x)=Acos\sqrt{\lambda}x+Bsin\sqrt{\lambda}x$$

با بکار بردن شرط $y(0) = 0$ بدست می‌آید $A = 0$ و با بکار بردن شرط $y'(\pi) = 0$ خواهیم داشت $B\sqrt{\lambda}cos\lambda\pi = 0$. و چون $\lambda \neq 0$ است و ما دنبال جواب غیر بدیهی هستیم پس $B \neq 0$ و بدست می‌آید:

$$\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

و از برقراری این رابطه بدست می‌آید:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2} \qquad n = 1, 2, ...$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}$$

و توابع ویژه عبارتند از:

$$\sin(\frac{2n-1}{2})x \qquad n = 1, 2, ...$$

حال برای حالت $\lambda = 0$ داریم $y'' = 0$، بنابراین جواب عمومی عبارت است از:

$$y(x) = A + Bx$$

که با شرط $y(0) = 0$ بدست می‌آید $A = 0$. بنابراین داریم:

$$y(x) = Bx$$

و با شرط $y'(\pi) = 0$ بدست می‌آید $B = 0$ . بنابراین هنگامی که $\lambda = 0$ می‌باشد، تنها جواب معادله دیفرانسیل که در شرایط مسئله صدق کند، جواب بدیهی $y = 0$ است. از این رو $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه‌ی مسئله نیست.

حال برای حالت $\lambda < 0$ داریم $\lambda = -k^2$ که در آن $k > 0$ .در این صورت معادله دیفرانسیل داده شده تبدیل می‌شود به

$$y'' + k^2 y = 0$$

و برای این معادله جواب عمومی عبارت است از:

$$y(x) = A\cosh kx + B\sinh kx$$

و از شرط $y(\circ) = \circ$ بدست می‌آید $A = \circ$ .بنابراین داریم:

$$y(x) = B \sinh kx$$

و از شرط $y'(\pi) = \circ$ بدست می‌آید

$$Ak \cosh k\pi = \circ$$

چون $k > \circ$ و $\cosh \pi \neq \circ$ پس باید $B = \circ$. از این رو تنها جوابی که در شرایط مسئله صدق می‌کند، جواب بدیهی است و بنابراین مسئله دارای مقادیر ویژه منفی نیست.

**تعریف ۵.۱.۲.** معادله اشتورم-لیوویل

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + [q(x) + \lambda s(x)]y = \circ$$

با شرایط مرزی

$$y(a) = y(b) \qquad y^{'}(a) = y^{'}(b)$$

در بازه $[a, b]$ متناوب نامیده می‌شود هرگاه $p(a) = p(b)$ برقرار باشد.

**مثال ۶.۱.۲.** دستگاه اشتورم-لیوویل

$$y^{''} + \lambda y = \circ \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

با شرایط مرزی

$$y(-\pi) = y(\pi) \qquad y^{'}(-\pi) = y^{'}(\pi)$$

را در نظر بگیرید.

ملاحظه می‌کنیم که $p(x) = \exp^{\int^x \frac{\circ}{\backslash} dt}$ پس $p(x) = ۱$ و بنابراین $p(-\pi) = p(\pi)$. حال اگر $\lambda > \circ$ باشد، جواب معادله اشتورم-لیوویل برابر است با:

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

با بکار بردن شرایط مرزی مسئله داریم

$$(۲ \sin \sqrt{\lambda}\pi) B = \circ$$
$$(۲\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\pi) A = \circ$$

پس برای بدست آوردن جواب غیر بدیهی داریم

$$\sin\sqrt{\lambda}\pi = ۰ \qquad A \neq ۰ \qquad B \neq ۰$$

بنابراین مقادیر ویژه عبارتند از:

$$\lambda_n = n^۲ \qquad n = ۱, ۲, ...$$

و چون $\sin\sqrt{\lambda}\pi = ۰$ برای هر مقدار دلخواه $A$ و $B$ برقرار است، پس توابع ویژه عبارتند از:

$$\{\sin nx\}$$

$$\{\cos nx\}$$

که مستقل خطی متناظر با $n^۲$ هستند.
حال برای حالت $\lambda = ۰$ مقدار ویژه برابر صفر هست و تابع ویژه متناظر، تابع ثابت یک هست.
حال برای حالت $\lambda < ۰$ داریم که جواب معادله اشتورم-لیوویل در شرایط مسئله صدق نمی‌کند.

در مثال (۴.۱.۲) دیدیم که معادله ما تنها یک تابع ویژه مستقل خطی متناظر به مقدار ویژه دارد، به این مقدار ویژه از مرتبه تکرار یک یا مقدار ویژه ساده می‌گویند. و در مثال (۶.۱.۲) دیدیم که معادله ما دو تابع ویژه مستقل خطی متناظر به مقدار ویژه $n^۲$ دارد، به این مقدار ویژه از مرتبه تکرار دو می‌گویند.
با استفاده از اتحادهای مثلثاتی زیر

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = ۰ \qquad m \neq n$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = ۰ \qquad \forall m, n \in Z$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = ۰ \qquad m \neq n$$

نتیجه می‌گیریم که توابع ویژه $\cos nx$ و $\sin nx$ در بازه $[a, b]$ نسبت به هم متعامد هستند. رابطه تعامدی عموماً برای توابع ویژه دستگاههای اشتورم-لیوویل برقرار می‌باشد. فرض کنید $\phi(x)$ و $\psi(x)$ توابع با مقادیر حقیقی روی بازه $I$ انتگرال پذیر باشند. توابع $\phi$ و $\psi$ در بازه $I$ نسبت به تابع وزن $\rho(x) > ۰$ متعامد گفته می‌شود هرگاه داشته باشیم

$$(\phi, \psi) = \int_I \phi(x)\psi(x)\rho(x)dx = ۰$$

که در آن بازه $I$ می‌تواند نامحدود نیز باشد. همچنین می‌تواند بازه‌ای باز یا بسته از یک طرف یا هر دو طرف باشد. هرگاه $\phi = \psi$ باشد، نرم $\phi$ را مشخص می‌کند که به صورت زیر است:

$$\| \phi \| = [\int_I \phi^۲(x)\rho(x)dx]^{\frac{۱}{۲}}$$