بسم الله الرحمن الرحيم

١١٠٠٦٦

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

آنتروپی تسالیس و نظریه اطلاعات

نگارش:

اکرم گل سرخی

استاد راهنما:

دکتر امیرحسین درونه

مهر ۱۳۸۷

تقدیم به

همسر عزیزم و

فرزند دلبندم

قدردانی و تشکر

سپاس خدای را که دیگر بار مرا در مسیر یادگیری دانش قرار داد.

برخود لازم می دانم قدردان فداکاری ها و محبت های بی دریغ پدر و مادرم باشم که بی شک پیشرفت هایم را در تمامی مراحل زندگی مدیون آنها هستم .همواره از خداوند متعال پاداشی عظیم برای آنهاخواستارم .

از استاد بزرگوارم ،جناب آقای دکتر امیرحسین درونه که‌همواره از نظر علمی و فکری راهنما و پشتوانه من بودند ،تشکر و قدردانی می کنم ،که این مسیر بدون راهنمایی های مشفقانه ایشان هرگز طی نمی شد. برای ایشان آرزوی موفقیت های روزافزون دارم .

همچنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر محمد محمودی و جناب آقای دکتر سیامک خادمی که قبول زحمت فرموده و پایان نامه مرا مطالعه نمودند ،سپاسگزارم .

چکیده

در این مبحث تلاش بر این است که یک خط ممتد از نظریه اطلاعات کامل و آنتروپی طرح شده د ر آن ، به آمار نافزونور و اطلاعات ناکامل تعمیم داده شود.

آنتروپی تسالیس به صورت گسترده ای برای توصیف سامانه هایی با اندازهٔ کوچک و یا سامانه هایی که اجزایشان برهمکنش بلندبرد دارند ، به کار می رود . برخی سوالات و ویژگیهای نظری مکا نیک آماری نافزونور تسالیس مورد بحث قرار گرفته ، مبنای نظری توزیع نمایی تعمیم یافته تسالیس و نگرانیهای موجود در بهنجارش قراردادی و توزیع احتمال نظیر آن بحث و بررسی شده است ، راه برون رفت از این نگرانیها و مشکلات نظری با ارایه یک بهنجارش ناکامل که اجازه می دهد توزیع تعمیم یافته تسالیس به روشی قابل قبول استنتاج شود ، نشان داده شده است .

ما با استفاده از اصول نظریه اطلاعات ناکامل شکلی جدید و متقارن از این آنتروپی را پیشنهاد کرده ایم . همچنین اصول ترمودینامیک را با استفاده از این شکل جدید بدست آورده ایم .

فهرست

فصل اول

مکانیک آماری بر پایه نظریه اطلاعات

۱.۱ ترمودینامیک و مکانیک آماری

مطالعهٔ هر موضوعی در فیزیک با جدا کردن ناحیهٔ محدودی از فضا یا قسمت محدودی از ماده از محیط آن آغاز می شود . قسمت برگزیده که مورد توجه قرار می گیرد، سامانه، وهرچه که در خارج آن قرار دارد و در نحوهٔرفتار آن نقش مستقیم دارد، محیط خوانده می شود . وقتی سامانه انتخاب شد، قدم بعدی توصیف آن برحسب کمیت هایی است که به رفتار سامانه یا برهمکنشهای آن با محیط ، یا هردو مربوط اند . به طور کلی برای توصیف سامانه ها دو دیدگاه وجود دارد که پذیرفتنی است : دیدگاه ماکروسکوپیک [۱] و دیدگاه میکروسکوپیک [۲][۱].گر چه ممکن است این طور به نظر رسد که این دو دیدگاه بسیار متفاوت و با یکدیگر ناسازگارند، لیکن رابطه ای بین آنها وجود دارد و وقتی هر دو دیدگاه در مورد یک سامانه به کار روند، باید نتیجه یکسانی بدست دهند . رابطه بین این دو دیدگاه در این واقعیت نهفته است که ویژگیهای محدودی که مستقیماً

[۱] macroscopic

[۲] microscopic

قابل اندازه گیری هستند و مشخص کردن آنها همان توصیف ماکروسکوپیکی سامانه است، در واقع میانگین های زمانی تعداد زیادی از مشخصه های میکروسکوپیکی در یک مدت زمان هستند . مثلاً کمیت ماکروسکوپیکی فشار عبارت است از میانگین آهنگ تغییرات اندازه حرکت ناشی از تمام برخوردهای ملکولی در واحد مساحت . علم ترمودینامیک با مطالعه تجربی رفتار ماکروسکوپیک سامانه های فیزیکی رشد کرد . اندازه گیری کمیت های ماکروسکوپیک یکی از کارهایی است که در ترمودینامیک صورت می گیرد یعنی ما به اندازه گیری کمیت هایی مانند حجم، دما، فشار و... می پردازیم . در مکانیک کلاسیک بر عکس ترمودینامیک به اندازه گیری کمیت های میکروسکوپیک اهمیت می دهیم کمیت هایی چون سرعت ذره، مکان ذره‌و... .از آنجا که تعداد زیادی از میکروحالت ها با هم تشکیل یک ماکروحالت می دهند ما به دنبال رابطه ای بین کمیت های میکروسکوپیک مکانیک کلاسیک وکمیت های ماکروسکوپیک ترمودینامیک هستیم . بدین ترتیب بود که مکانیک آماری[۳] پل واسطی بین مکانیک کلاسیک و ترمودینامیک شد .

روش های مکانیک آماری برای نخستین بار در نیمهٔ دوم قرن گذشته، بیشتر توسط بولتزمن در آلمان و گیبس در ایالات متحده تدوین یافت . با ابداع نظریه کوانتومی در سال های نخستین قرن حاضر بوز ، انیشتین ، فرمی و دیراک ایده های اولیه بولتزمن را اصلاحاتی کردند و موفق شدند برخی از نارساییهای آمار بولتزمن را از بین ببرند . روش آماری رابطهٔ بسیار نزدیکی با ترمودینامیک و نظریه جنبشی دارد . برای سامانه هایی از ذرات که در آنها بتوان انرژی ذرات را تعیین کرد، با روش های آماری می توان معادلهٔ حالت یک جسم و معادلهٔ انرژی آن را بدست آورد[۲].

مکانیک آماری برخلاف نظریه جنبشی به جزئیاتی نظیر برخورد ملکول ها با یکدیگر یا با یک سطح نمی پردازد، بلکه در عوض از این واقعیت استفاده می کند که تعداد ملکول ها بسیار زیاد است و ویژگیهای میانگین تعداد زیادی ملکول را می توان حتی در غیاب هر گونه اطلاعی دربارهٔ ملکول ها محاسبه کرد. بدین ترتیب یک آمارگر می تواند مثلاً بدون در نظر گرفتن وضع سلامتی تک تک افراد، با دقت زیادی میانگین طول عمر کسانی که در یک سال خاص در یک کشور به دنیا آمده اند را برای یک شرکت بیمه پیش بینی کند[۳]. بولتزمن

[۳] statistical mechanics

(۱۹۰۶–۱۸۴۴) اولین کسی بود که در تبیین آنتروپی [۴] از دیدگاه میکروسکوپیکی موفق شد . وی به خوبی به نظریهٔ جنبشی گازها آگاهی داشت . او این نظریه را بسط داد و روش بسیار مستدلی را برای بررسی خواص ترمودینا میکی سامانهٔ متشکل از تعداد زیادی ملکول های مشابه، ارائه کرد . وی در واقع بنیان گذار موضوعی بود که امروزه به مکانیک آماری مرسوم است . به عبارت دیگر فرض براین است که هر یک از اتم ها از قوانین مکانیک پیروی می کنند و با اتخاذ یک روش آماری مناسب می توان خواص اتم ها را که متناظر با خواص ترمودینامیکی این مجموعه از ذرات هستند، نتیجه گرفت[۴]. مثلاً دما که کمیتی ماکروسکوپیک است به عنوان معیاری متوسط از انرژی جنبشی تمام ذرات سامانه تعبیر می شود . آنتروپی ترمودینامیک نیز با استفاده از مکانیک آماری به صورت $S = kln\Omega$ می باشد که Ω تعداد کل میکرو حالت های سامانه ی مورد نظر است .این معادله ارتباط بین ترمودینامیک آماری و مکانیک کلاسیک را برقرار می کند . مقدار عددی ضریب تناسب را به گونه ای انتخاب می کنند که مقادیر کلاسیک و آماری آنتروپی با هم توافق داشته باشند . سایر کمیت های ماکروسکوپیک مانند دما T و فشار P سامانه به صورت زیر به کمیت آماری Ω مربوط می شوند :

$$\frac{1}{kT} = \frac{\partial ln\Omega}{\partial E}$$

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{\partial ln\Omega}{\partial V}$$

در روابط بالا V حجم وE انرژی درونی سامانه و $\beta = \frac{1}{kT}$ که در آن k ثابت بولتزمان می باشد .

۲.۱ بی نظمی – آنتروپی – اطلاعات

هر گاه در سامانه ای کار یا انرژی جنبشی به علت وجود اصطکاک، مقاومت‌الکتریکی، چسبندگی و...تلف شو دحرکات نامنظم ملکول ها افزایش می یابد . هر گاه مواد مختلفی با یکدیگر مخلوط یا در هم حل یا در داخل یکدیگر پخش شوند مکان های ملکول ها در فضا ترتیب نامنظم تری اختیار می کنند . صخره ها خرد می شوند، چوب می پوسد، چرم متلاشی می شود، رنگ پوسته پوسته می زند، آهن زنگ می زند، فلزات خرده

[۴] entropy

می شوند و مردم پیر می شوند . تمام این فرآیندها شامل گذار از یک نوع نظم به بی نظمی بیشتر است . به عبارتی این گذار بدین گونه بیان می شود که می گویند آنتروپی جهان افزایش می یابد . بی نظمی ملکول ها و آنتروپی به موازات هم تغییرمی کنند و اگربی نظمی را باتعداد راههای متفاوتی که از آنها می توان به یک حالت ماکروسکوپیک خاص رسید اندازه بگیریم می توان کمیت Ω را میزانی از بی نظمی درنظرگرفت . درحقیقت Ω تعداد راههای رسیدن به یک حالت ماکروسکوپیک خاص است . پس معادله $S = kln\Omega$ رابطه ساده بین آنتروپی و بی نظمی است .می توان تعداد راههای ممکن برای رسیدن به یک حالت ماکروسکوپیک خاص را به گونه ای دیگر نیز تعبیر کرد . فرض کنید از شما بخواهند که اسم کوچک شخصی را حدس بزنید . راههای انتخاب اسامی مردان وزنان به طور گیج کننده ای زیاد است . اگر هیچ نشان یا رهنمونی وجود نداشته باشد تعداد راههایی که می شود اسم را حدس زد خیلی زیاد است واطلاعات در دسترس کم . حال فرض کنید که به ما گفته می شود شخص مورد نظر یک مرد است . فوراً راههای انتخاب اسامی کاهش می یابد در حالیکه اطلاعات افزایش یافته است . اگر به ما گفته شود که اسم این مرد با (ه) شروع می شود اطلاعات باز هم افزایش یافته و تعداد راههای انتخاب کاهش خیلی زیادی یافته به عبارتی هرچه تعداد راههای رسیدن به یک حالت خاص کمتر باشد اطلاعات در دسترس بیشتر است . پس هرچه بی نظمی ملکولی در سامانه ای کاهش یابد ، اطلاعات ما از سامانه موردنظر افزایش یافته و آنتروپی کاهش می یابد و بالعکس .

اولین بار شانن رابطه ای را معرفی کرد که نقطه شروع تمامی مسایل مکانیک آماری شد. رابطه $S = -k\sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln(p_i)$ به آنتروپی شانن مشهور است .

برای تصدیق صحبت هایی که در این بخش شد به مثال زیرتوجه کنید :

در ریختن یک تاس مجموعه میکروحالت ها را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\{x_i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

اکنون فرض کنید در یک بازی ناجوانمردانه تاس را طوری طراحی کنیم که‌به دلیل نامتقارن بودن تاس امکان آمدن برخی از وجوه آن بیشتر است . بر اساس طراحی تاس مجموعه احتمال رخدادهای بالا می تواند به یکی از

صورتهای زیر باشد :

$$p^{(1)} = \{1, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$p^{(2)} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0\right\}$$

$$p^{(2)} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0\right\}$$

در مجموعه احتمال $p^{(1)}$ با قطعیت کامل می توان گفت چه رخدادی اتفاق می افتد هر چه احتمال رخدادهای دیگر افزایش یابد تعیین حالت تاس رفته رفته دشوارتر می شود به عبارت دیگر عدم قطعیت در تعیین حالت تاس افزایش می یابد . با هر یک از مجموعه های احتمال عدم قطعیتی متناظر است که میزان آگاهی ما را از پیش بینی رخدادهای آینده نشان می دهد .

حال فرض کنید در یک بازی جوانمردانه تاس را طوری طراحی کنیم که احتمال روی دادن تمامی وجوه آن برابر باشد . مجموعه احتمال متناظر با این حالت را می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$p = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$$

در این وضعیت عدم قطعیت در تعیین حالت تاس به بیشترین مقدار خود رسیده است .با توجه به مجموعهٔ احتمال رخدادهای فوق و با کمک از آنتروپی شانن می توان آنتروپی هر یک از حالت های فوق را محاسبه کرد.
نتایج محاسبات در زیر آورده شده است :

$$S^{(1)} = 0$$

$$S^{(2)} = 0.63$$

$$S^{(3)} = 1.01$$

$$S = 1.8$$

با توجه به مقادیر بالا به این واقعیت مهم می رسیم که می رسیم که با افزایش اطلاعات آنتروپی کاهش می یابد.

فصل دوم

آنتروپی و نظریه اطلاعات

۱.۲ آنتروپی شانن

همواره بررسی و مطالعه سامانه‌ای از ذرات با بررسی متغیرهای تصادفی متناظربا آن مرتبط است. مثلاً در یک سامانه گازی سرعت یک ذره متغیری تصادفی است. تعیین وضعیت دقیق چنین سامانه هایی عملا غیرممکن است اما می توان با توجه به شرایط و قیود حاکم بر این سامانه ها حالت های محتمل آن را بدست آورد. در این صورت می گوییم آگاهی ما از این سامانه کامل نیست و ما نسبت به تعیین وضعیت دقیق سامانه دچار جهل نسبی هستیم . در اینجا از جهل خود نسبت به تعیین وضعیت دقیق سامانه به عنوان عدم قطعیت یاد می کنیم .
سامانه ای را در نظر بگیرید که دارای میکروحالت های $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ است و هرمیکروحالت دارای احتمال وقوعی است که مجموعه این احتمال ها را با $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ نشان می دهیم.چنین مجموعه‌ای از میکرو حالتها واحتمال های وابسته به آن را یک آنسامبل[۱] می گوییم.
با توجه به مثالی که در فصل قبل بررسی شد تعریف کمیتی که معیاری از جهل ما نسبت به تعیین

[۱] ensemble

رخدادهای تصادفی را نشان دهد ضروری به نظر می رسد،(از این به بعد به جای Ω از n استفاده می کنیم) تابع $H(p_1,p_2,...,p_n)$ را به عنوان تابعی که میزان عدم قطعیت توزیع احتمال $\{p_1,p_2,...,p_n\}$ را نمایش می دهد تعریف می کنیم این تابع باید دارای خصوصیات زیر باشد[٦] :

۱. تابع $H = H(p_1,p_2,...,p_n)$ باید تابعی پیوسته و مشتق پذیر از توزیع احتمال [۲] $\{p_1,p_2,...,p_n\}$ باشد .

به دلیل آنکه کمیت های ترمودینامیکی ماکروسکوپیک سامانه پیوسته هستند اگر در نقطه ای ناپیوستگی وجود داشته باشد مشتق در آن نقطه نامحدود می باشد وما می خواهیم که کمیت های ترمودینامیکی فیزیکی باشند .

۲. اگر همه ی p_i ها برابر باشند آنگاه کمیت $I(n) = H(1/n,1/n,...,1/n)$ کمیتی یکنوا و صعودی از n می باشد .n تعداد میکروحالت ها است .

۳. اگر مجموعه توزیع احتمال ها را به گونه ای دسته بندی کنیم که $\omega_1 = p_1 + p_2 + ... + p_k$ و$\omega_2 = p_{k+1} + p_{k+2} + ... + p_{k+m}$ و... آنگاه برای تابع $H(p_1,p_2,...,p_n)$ باید داشته باشیم :

$$H(p_1,p_2,...,p_n) = H(\omega_1,\omega_2,...) + \omega_1 H(\frac{p_1}{\omega_1},\frac{p_2}{\omega_1},...,\frac{p_k}{\omega_1}) + \omega_2 H(\frac{p_{k+1}}{\omega_2},\frac{p_{k+2}}{\omega_2},...,\frac{p_{k+m}}{\omega_2}) + ... \quad (۲.۱)$$

که $H(\omega_1,\omega_2,...)$ عدم قطعیت در پیش بینی دسته ای از رخدادها است و $H(\frac{p_i}{\omega_k},\frac{p_{i+1}}{\omega_k},...)$ عدم قطعیت در تعیین رخداد حالت های وابسته به یک دسته است . اگر مجموعه ی میکروحالت ها را به L دسته تقسیم بندی کنیم طوری که دسته اول دارای n_1 میکروحالت ودسته دوم دارای n_2 میکروحالت و... ودسته Lام دارای n_L میکروحالت باشد خواهیم داشت :

$$n_1 + n_2 + ... + n_L = n$$

یا

$$\sum_{j=1}^{L} n_j = n$$

[۲] probability distribution

ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که L دسته با احتمالهای نابرابر داریم بنابراین مجموعه L دسته به صورت زیر است :

$$\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L\}$$

اکنون حالتی را در نظر می گیریم که L دسته با احتمالهای برابر داریم بنابراین خواهیم داشت :

$$H\left(p_1, p_2, ..., p_n\right) = H\left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L\right) + \sum_{j=1}^{L} \omega_j H\left(\frac{1}{\omega_j}, ..., \frac{1}{\omega_j}\right) \qquad (۲.۲)$$

با استفاده از شرط دوم می توان نوشت :

$$I(n) = H\left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L\right) + \sum_{j=1}^{L} \omega_j I(n_j)$$

$$I(\sum_{j=1}^{L} n_j) = H\left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L\right) + \sum_{j=1}^{L} \omega_j I(n_j) \qquad (۲.۳)$$

در حالت خاص : وقتی که n_j ها برابر باشند (یعنی L دسته n تایی داریم) :

$$I(Ln) = I(L) + I(n) \qquad (۲.۴)$$

با توجه به‌رابطه بالا رابطه ای که برای $I(n)$ پیشنهاد می کنیم :

$$I(n) = k \ln n$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه (۲.۳) می توان نوشت :

$$k \ln n = H(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L) + \sum_{j=1}^{L} \omega_j k \ln n_j$$

$$H(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_L) = k \ln n - \sum_{j=1}^{L} \omega_j k \ln n_j$$

$$= -\sum_{j=1}^{L} \omega_j k \ln(\frac{1}{n}) - \sum_{j=1}^{L} \omega_j k \ln n_j$$

$$= -k \sum_{j=1}^{L} \omega_j \ln(\frac{n_j}{n})$$

$$= -k \sum_{j=1}^{L} \omega_j \ln(\omega_j)$$

اگر به جای ω_j از p_i استفاده کنیم می توانیم رابطه بالا را به صورت زیر بنویسیم :

$$H(p_1, p_2, ..., p_n) = -k \sum_{j=1}^{L} p_i \ln(p_i) \qquad (۲.۵)$$

رابطه بالا را آنتروپی شانن[۳] می نامند[۵] . جینز[۴] نشان داد که تمام مکانیک آماری را می توان از این آنتروپی نتیجه گرفت[۶] . از آنجا که این عبارت دقیقا همان عبارتی است که برای آنتروپی در مکانیک آماری به کار می رود آن را آنتروپی توزیع احتمال p_i می نامیم از این رو ما اصطلاح آنتروپی و عدم قطعیت را مترادف در نظر خواهیم گرفت .

۲.۲ بیشینه کردن آنتروپی

با توجه به رابطه آنتروپی

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

و قیود زیر :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad (۲.۶)$$

و

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \qquad (۲.۷)$$

[۳] Shanon

[۴] Jaynes

رابطه احتمال را بدست می آوریم بدین ترتیب که ابتدا متغیر R رابه صورت زیر تعریف می کنیم :

$$R = S + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1 \right) + \mu(\langle f(x) \rangle - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i))$$

با استفاده از حساب وردش :

$$\frac{\delta R}{\delta p_l} = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\delta p_i}{\delta p_l} \ln p_i + p_i \frac{\frac{\delta p_i}{\delta p_l}}{p_i} - \lambda \frac{\delta p_i}{\delta p_l} + \mu f(x_i) \frac{\delta p_i}{\delta p_l} \right\} = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \delta_{il} \left\{ \ln p_i + 1 - \lambda + \mu f(x_i) \right\} = 0$$

$$\left\{ \ln p_l + 1 - \lambda + \mu f(x_i) \right\} = 0$$

در نتیجه رابطه احتمال به صورت زیر خواهد بود :

$$p_i = e^{-1+\lambda-\mu f(x_i)} \tag{۲.۸}$$

اگر$Z(\mu)$ رابه این صورت تعریف کنیم :

$$Z(\mu) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\mu f(x_i)}$$

خواهیم داشت :

$$\ln Z(\mu) = \lambda'$$

پس توزیع احتمال به صورت زیر خواهد بود :

$$p_i = \frac{e^{-\mu f(x_i)}}{Z(\mu)} \tag{۲.۹}$$

برای قید دوم خواهیم داشت :

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z(\mu)} e^{-\mu f(x_i)} f(x_i)$$

$$= \frac{1}{Z(\mu)} \frac{-\partial}{\partial \mu} \sum_{i=1}^{n} e^{-\mu f(x_i)}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z(\mu) \tag{۲.۱۰}$$

درنهایت برای آنتروپی بدست می آوریم :

$$S = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z(\mu)} e^{-\mu f(x_i)} \ln \frac{1}{Z(\mu)} e^{-\mu f(x_i)}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{1}{Z(\mu)} - \sum_{i=1}^{n} p_i [-\mu f(x_i)]$$

$$= \ln Z(\mu) + \mu \langle f(x_i) \rangle \tag{۲.۱۱}$$

پس کمیت μ را می توان چنین تعریف کرد :

$$\mu = \frac{\partial S}{\partial \langle f(x_i) \rangle} \tag{۲.۱۲}$$

۳.۲ کاربرد در مکانیک آماری

بر پایهٔ نظریه اطلاعات[۵] برای تعیین توزیع احتمال قیدهای مرتبط با مشاهده پذیرها را هنگام بیشینه کردن[۶] آنتروپی به آن می افزاییم و با استفاده از ضرایب لاگرانژ[۷] توزیع احتمال را تعیین می کنیم .

در این بخش با سه نوع آنسامبل میکرو کانونیک[۸] ، کانونیک[۹] و گراند کانونیک[۱۰] آشنا می شویم[۷و۸و۹]. تفاوت این آنسامبل ها به خواص جداره هایی مربوط می شود که سامانه ها را از هم جدا می کند . مثلاً یکی از تفاوت های آنسامبل کانونیک با آنسامبل میکرو کانونیک در این است که در آنسامبل کانونیک انرژی از جداره ها مبادله می شود ولی در آنسامبل میکرو کانونیک چنین مبادله ای وجود ندارد . همچنین تفاوت اساسی آنسامبل کانونیک با آنسامبل گراند کانونیک در این است که در آنسامبل گراند کانونیک ذرات از جداره ها می توانند عبور کنند ولی در آنسامبل کانونیک چنین مبادله ای جایز نیست .

در آنسامبل میکرو کانونیک :

$$< E >= E_i = const \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

با بیشینه کردن آنتروپی تابع توزیع احتمال زیر بدست می آید :

$$p_i = e^{-\lambda}$$

که در آن $\lambda = ln(n)$ می باشد.

در آنسامبل کانونیک :

$$< E >= \sum_{i=1}^{n} E_i = const \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

---

۵ information theory

۶ maximization

۷ Lagrange multiplier

۸ micro canonical

۹ canonical

۱۰ grand canonical