جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری


**دانشگاه شیخ بهایی**

**دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر**


**پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد ریاضیات مالی**

**عنوان**

# ارزش‌گذاری اختیار معامله‌ی سبد اروپایی تحت مدل دارایی پرش- انتشار و تقریب نوسان‌پذیری موضعی به روش بسط مجانبی


**پژوهشگر**

**الهام محمدی نجف‌آبادی**

**استاد راهنما**

**دکتر عبدالساده نیسی**

**استاد مشاور**

**دکتر رضا مختاری**


**مردادماه ۱۳۹۱**

بسم الله الرحمن الرحیم

# تقدیم به:

**پدر و مادر عزیزم**

**که در کلامشان محبت و در نگاهشان صداقت دیده‌ام. آن‌ها که لحظه لحظه عمر و تمام هستی‌شان را به امید فرزندانشان فدا کرده و سپید موی گشتند تا سپیدروی بمانم.**

# سپاسگزاری

با تشکر و قدردانی از استاد ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر عبدالساده نیسی به واسطه زحمات و تلاش‌های بی شائبه و راهنمایی‌های مدبرانه ایشان و همچنین استاد مشاورم جناب آقاب دکتر رضا مختاری به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و محبت‌های بی دریغشان در انجام و تصحیح این پایان‌نامه.

# چکیده

در این پایان‌نامه در مورد قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی سبد اروپایی و تقریب نوسان‌پذیری موضعی تحت مدل دارایی پرش- انتشار بحث می‌کنیم. بنابراین ثابت می‌کنیم قیمت اختیار در یک معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی جزئی صدق می‌کند. مهم‌ترین ایده‌ی روش تقریب تحلیلی، پیدا کردن متغیرهای تصادفی ساده برای تقریب زدن ارزش سبد و سپس استفاده‌ی آن در تولید یک شکل بسته‌ی رابطه‌ی ارزش‌گذاری است.

سپس روش بسط مجانبی را برای تقریب نوسان‌پذیری موضعی با استفاده از جواب‌های بسته، و تقریب اختیار معامله‌ی سبد بیان می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: ارزش‌گذاری اختیار معاملات سبد؛ مدل پرش- انتشار نوسان‌پذیری موضعی؛ معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی جزئی پیشرو؛ بسط مجانبی.

# فهرست مطالب

## عنوان


مقدمه....................................................................................................................................... ۱

## فصل اول: مفاهیم و کلیات

۱-۱ مقدمه............................................................................................................................. ٤

۱-۲ فضای احتمال.................................................................................................................. ٤

۱-۳ امید شرطی...................................................................................................................... ۸

۱-٤ فرآیندهای تصادفی............................................................................................................ ۹

۱-۵ فرآیند پواسون................................................................................................................. ۱۲

۱-٦ اندازه‌های تصادفی............................................................................................................ ۱۵

۱-۷ اختیار معاملات............................................................................................................... ۱۸

## فصل دوم: معادلات دیفرانسیل تصادفی

۲-۱ مقدمه............................................................................................................................ ۲٤

۲-۲ مقدمات لازم برای تعریف انتگرال تصادفی ایتو.................................................................... ۲٤

۲-۳ انتگرال تصادفی ایتو......................................................................................................... ۲٦

۲-٤ انتگرال تصادفی و فرمول ایتو.............................................................................................. ۳۲

۲-۵ معادلات دیفرانسیل تصادفی................................................................................................ ۳۳

۲-٦ وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی................................................................ ۳٦

## فصل سوم: معادلات دیفرانسیل تصادفی با پرش و مدل دارایی پایه


۳-۱ مقدمه........................................................................................................................................ ٤٤

۳-۲ فرآیندهای لوی........................................................................................................................ ٤٤

۳-۲-۱ اهمیت فرآیندهای لوی........................................................................................................ ٤٥

۳-۲-۲ اندازه پرش‌های فرآیند پواسون مرکب.................................................................................... ٤٦

۳-۳ فرآیندهای پرش- انتشار............................................................................................................ ٤۹

۳-۳-۱ فرآیند پرش- انتشار مرتون.................................................................................................... ۵۲

۳-۳-۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی پرش- انتشار............................................................................... ۵۳

۳-٤ مدل دارایی پایه....................................................................................................................... ۵٤

۳-٤-۱ مدل حرکت براونی............................................................................................................. ۵۵

۳-٤-۲ مدل نوسان‌پذیری تصادفی.................................................................................................... ۵۵

۳-٤-۳ مدل هستون...................................................................................................................... ۵٦

۳-٤-٤ مدل هال- وایت تک عاملی................................................................................................... ۵۷

۳-٤-۵ مدل دارایی پایه‌ی پرش- انتشار برای مسئله‌ی اختیار معامله‌ی سبد............................................ ۵۹


## فصل چهارم: معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی جزئی پیشرو برای ارزش‌گذاری اختیار خرید سبد اروپایی


٤-۱ مقدمه........................................................................................................................................ ٦۲

٤-۲ مدل بلک- شولز- مرتون............................................................................................................ ٦۲

٤-۲-۱ مفروضات مدل بلک- شولز- مرتون........................................................................................ ٦۳

٤-۲-۲ تغییرات تدریجی ارزش سبد سرمایه....................................................................................... ٦۳

۴-۲-۳ تغییرات تدریجی ارزش اختیار معامله........................................................................۶۵
۴-۲-۴ معادل قرار دادن تغییرات تدریجی..............................................................................۶۶
۴-۳ معادلات دیفرانسیل انتگرالی جزئی..............................................................................۶۹
۴-۴ معادلات انتگرالی جزئی پیشرو برای قیمت اختیار خرید اروپایی........................................۷۰
۴-۴-۱ چارچوب کلی..................................................................................................۷۰
۴-۴-۲ مدل‌های لوی موضعی..........................................................................................۷۶
۴-۴-۳ بازیابی توابع سرعت موضعی از قیمت‌های اختیار معامله...................................................۸۰

## فصل پنجم: تقریب تابع نوسان‌پذیری موضعی و ارزش سبد سرمایه

۵-۱ مقدمه..........................................................................................................۹۰
۵-۲ نوسان‌پذیری....................................................................................................۹۰
۵-۳ صفحه‌های نوسان‌پذیری معین......................................................................................۹۲
۵-۳-۱ نوسان‌پذیری ضمنی..............................................................................................۹۳
۵-۳-۲ صفحه‌های نوسان‌پذیری ضمنی.....................................................................................۹۶
۵-۳-۳ صفحه‌های نوسان‌پذیری حقیقی موضعی............................................................................۹۷
۵-۴ تقریب تابع نوسان‌پذیری موضعی به روش بسط مجانبی..........................................................۱۰۲

نتیجه‌گیری و پیشنهادات...........................................................................................۱۰۹
مراجع............................................................................................................۱۱۰

# فهرست شکل‌ها

## عنوان

شکل ۳-۱  تحول لگاریتم قیمت SLM (NYSE) ، ۱۹۹۳-۱۹۹۶ در مقایسه با یک مسیر نمونه‌ای حرکت براونی با بازده و نوسان‌پذیری یکسان............................................................................۵۰

شکل ۳-۲   مسیر نمونه‌ای فرآیند پرش – انتشار مرتون.............................................................۵۳

شکل ۵-۱  نوسان‌پذیری حقیقی و ضمنی قبل و بعد از اخبار مهم مورد انتظار..............................۹۳

شکل ۵-۲  نوسان‌پذیری‌های ضمنی و ساختار نوسان‌پذیری حقیقی که پایدار هستند.................۹۶

شکل ۵-۳  نوسان‌پذیری‌های ضمنی با زمان انقضاء و قیمت توافقی...........................................۹۷

شکل ۵-٤  سطح نوسان‌پذیری موضعی محاسبه شده از قیمت اختیار خرید اروپایی...............۱۰۱

جدول ۵- ۱  قیمت‌های بازار اختیار خرید اروپایی و نوسان‌پذیری ضمنی.................................۹٤

# تاریخچه و مقدمه

اختیار معامله‌ی سبد، یک اختیار معامله‌ی غیر استاندارد (غیر معمولی) است که بازدهی نهایی آن به ارزش سبد سرمایه‌ی دارایی بستگی دارد. شبیه‌سازی مونت کارلو[1] اغلب برای قیمت‌گذاری اختیار معاملات سبد که ساده، دقیق اما زمان‌بر است، به‌کار می‌رود. اخیراً تحقیقات وسیعی برای روش‌های قیمت‌گذاری سریع و دقیق انجام می‌شود. بیشترین تحقیقات در این زمینه نشان می‌دهند که قیمت‌های دارایی پایه، حرکت براونی هندسی را دنبال می کنند. پس ارزش سبد به مجموع متغیرهای لگ نرمال (نرمال لگاریتم) وابسته است. مهم‌ترین ایده‌ی روش تقریب تحلیلی، پیدا کردن متغیرهای تصادفی ساده برای تقریب زدن ارزش سبد و سپس استفاده‌ی آن در تولید یک شکل بسته‌ی فرمول ارزش‌گذاری است. تقریب متغیر تصادفی به تطبیق برخی لحظه‌های ارزش سبد نیاز دارد. در سال ۱۹۹۲ لوی[2] از یک متغیر لگ نرمال (نرمال لگاریتمی) برای تخمین ارزش سبد با تطبیق اولین و دومین لحظه استفاده کرده است. نتیجه به‌شکل قابل توجهی رضایت‌بخش بود؛ اما هیچ خطای تقریبی وجود نداشت. در سال ۱۹۹٤ کورن[3] ایده‌ی تطبیق زمان شرطی و بهبود متغیر را معرفی کرده است. قیمت‌گذاری اختیار معامله به دو بخش تقسیم می شود: یکی می‌تواند به طور دقیق محاسبه شود و دیگری با روش مطابقت زمان شرطی به‌طور تقریبی محاسبه می‌شود. در سال ۱۹۹۵ راجرز وشی[4] کران‌های پایینی و بالایی را اثبات کرده‌اند. در سال ۲۰۰٦ لرد[5] تحقیقی درباره‌ی روش‌های قیمت‌گذاری برای اختیار معاملات سبد ارائه داده است. این اقدامات باعث توسعه‌ی بیشتر مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی کلی شد. در سال ۲۰۰٤ آلبرکر و پردوتا[6] گامای معکوس نرمال روش لوی را معرفی کردند و در سال ۲۰۰۷ فلاموریس و گیا موریدیس [7] در مورد مدل پرش- انتشار برنولی بحث کردند. در سال ۲۰۰۹ ایکس یو و ژنگ[8] یک مدل پرش- انتشار برای فرآیند قیمت‌گذاری دارایی پیشنهاد کرده‌اند. خاصیت ابتکاری این طرح این است که جدا از حرکت‌های براونی وابسته، دو نوع پرش پواسون وجود دارد: یک پرش اصولی که روی قیمت‌گذاری‌های دارایی تأثیر می‌گذارد و پرش‌های ویژه که فقط روی قیمت‌گذاری‌های دارایی خاصی تأثیر می‌گذارند. چنین مدلی می‌تواند به خوبی پدیده‌ی وسعت بازار و وقایع منحصر به فردش را توصیف کند. آنها روش تقریب دقیق جزئی[9] را برای پیدا کردن یک حل تقریبی فرم بسته که قرار گرفتن بین کران‌های پایینی و بالایی را تضمین می‌کند، استفاده کرده‌اند. این آزمون‌های عددی نشان می‌دهند که روش تقریب دقیق جزئی در مقایسه با دیگر روش‌ها از جمله کران پایینی، گامای معکوس و تخمین‌های نرمال لگاریتمی کارایی برتری دارد.

---

[1] Monte Calrlo
[2] Levy
[3] Curran
[4] Rogers&Shi
[5] Lord
[6] Albercher&Predota
[7] Flamouris&Giamouridis
[8] Xu&Zheng
[9] PEA

محدودیت روش تقریب دقیق جزئی این است که به طور حیاتی به متغیر بهینه‌ای که از تقریب ارزش سبد و فرم بسته‌ی حل قیمت‌گذاری‌های دارایی منفرد ایجاد می‌شود بستگی دارد. این روش برای عملیات کلی ممکن نیست برای مثال اگر قیمت‌گذاری‌های دارایی منفرد، برخی از مدل‌های نوسان‌پذیری موضعی را دنبال کند، بنابراین در کل هیچ‌کدام از حل-های شگل بسته‌ی روش تقریب دقیق جزئی وجود ندارد که کاربرد عملی داشته باشد.

در سال ۱۹۹٤ دوپایر[1] نشان داد که هیچ مدل انتشاری با نوسان‌پذیری تصادفی نمی‌تواند با یک مدل نوسان‌پذیری موضعی، بدون تغییر قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی اروپایی جا به جا شود. در حقیقت، در سال ۱۹۸٦ گی اون گی[2] تعادل تعادل یک مدل بدون مارکف و یک مدل مارکف را کشف کرد و ثابت کرد که توزیع‌های وابسته‌ی هر یک از فرآیندهای ایتو می‌توانند با فرآیند نوسان‌پذیری موضعی مارکف مطابق شوند.

در این پایان‌نامه در مورد قیمت‌گذاری اختیار معاملات سبد اروپایی برای مدل پرش- انتشار نوسان‌پذیری موضعی بحث می‌کنیم. اصلی‌ترین ایده، کاهش مشکل مدل پرش- انتشار نوسان‌پذیری موضعی چند بعدی به مدل پرش- انتشار نوسان‌پذیری تصادفی یک بعدی است. سپس یک معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی جزئی پیشرو برای قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی سبد با یک امید شرطی نامعلوم، یا تابع نوسان‌پذیری موضعی و در نهایت به‌کار بردن روش بسط مجانبی برای تقریب تابع نوسان‌پذیری را نتیجه می‌گیریم [٤٠].

این پایان‌نامه تلاشی در جهت پیوند میان دنیای ریاضیات مالی و بازارهای سرمایه از طریق معرفی پیشرفته‌ترین و نوین‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله می‌باشد. مدل بلک- شولز (۱۹۷۳) بی‌شک معروف‌ترین مدل قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله است. این مدل مبتنی بر نظریه‌ی مدرن علوم مالی و در بردارنده‌ی فرضیاتی است که در بازارهای بسیار بزرگ و پیچیده ناتوان از پاسخ‌گویی است. در راستای هرچه نزدیک‌تر نمودن مدل‌های ریاضی با واقعیت‌های بازارها، فرآیندهای جدیدی مبتنی بر فرآیندهای معروف و شناخته شده‌ی لوی معرفی شده‌اند. این فرآیندها در دو رده‌ی عمده، فرآیندهای پرش- انتشار و فرآیندهای پرش محض و براساس نظریه‌ی فرامدرن علوم مالی شکل گرفتند.

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل است. در فصل اول تعاریف و کلیات و مفاهیم ریاضی لازم را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم به معرفی معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌پردازیم. در فصل سوم معادلات دیفرانسیل تصادفی با پرش و مدل دارایی پایه را معرفی خواهیم کرد. در فصل چهارم معادله‌ی دیفرانسیل انتگرالی جزئی پیشرو برای قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی را معرفی می‌کنیم. فصل پنجم شامل تقریب نوسان‌پذیری موضعی و ارزش سبد سرمایه با استفاده از روش بسط مجانبی خواهد بود.

---

[1] Dupire
[2] Gyongy

# فصل اول

# مفاهیم و کلیات

## ۱-۱ مقدمه

بی‌شک بررسی تحولات پیچیده‌ی بازارهای مالی و نیاز روزافزون به گسترش بازارهای سرمایه و استفاده‌ی هر چه بیشتر از ابزارهای مشتقه، آگاهی از زمینه‌های ریاضی، آمار و اقتصاد را طلب می‌کند و بنابراین ریاضیات مالی علمی در محل اشتراک ریاضی، آمار و اقتصاد است. این پایان‌نامه تلاشی است در جهت فراهم‌آوری ابزارها و ساخت زیربنای لازم برای مطالعه‌ی مدل‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله، به‌همین منظور در این فصل تعاریف، کلیات و مفاهیم ریاضی لازم برای معرفی مدل‌های مالی و قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی سبد اروپایی و تقریب نوسان‌پذیری موضعی که در فصل‌های آینده بیان خواهیم کرد، را جمع‌آوری کرده‌ایم.

## ۱-۲ فضای احتمال

مطالب این بخش از مراجع [۱۱]، [۱۳]، [۲۷]، [۲۹] و [۳۳] جمع‌آوری شده است.

**۱-۲-۱ تعریف:** یک فضای احتمال، سه‌تایی مرتبی است مانند$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$، که در آن $\Omega$ یک مجموعه‌ی دلخواه و غیر تهی بوده و $\mathcal{F}$ یک $\sigma$- جبر از زیرمجموعه‌های $\Omega$ است. تابع $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$، دارای خواص زیر است:

الف) $\mathbb{P}(\emptyset)=0$،

ب) $\mathbb{P}(\Omega)=1$،

ج) برای هر دنباله‌ی $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $\mathcal{F}$، که اعضای آن دو به دو از هم جدا هستند:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

در این‌صورت مجموعه‌ی $\Omega$ را فضای نمونه، هر عضو $\mathcal{F}$ را پیشامد، هر عضو $\Omega$ را یک پیشامد مقدماتی و $\mathbb{P}$ را اندازه-ی احتمال روی $\mathcal{F}$ می‌نامند.

**۱-۲-۲ تعریف:** یک متغیر تصادفی، روی فضای $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، تابعی است مانند $X: \Omega \to \mathbb{R}$ با این خاصیت که برای هر زیر مجموعه‌ی بورل[1] $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ مثل $B$، داریم:

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

برای هر متغیر تصادفی $X$ می‌توان تابعی مانند $F_{\mathrm{X}}: \mathbb{R} \to [0,1]$ به‌صورت

$$F_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x}) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega | \mathrm{X}(\omega) \leq \mathrm{x}\}$$

تعریف کرد. این تابع را تابع توزیع $X$ می‌نامند. برای تابع توزیع $F_{\mathrm{X}}$ خواص زیر برقرار است:

**الف)** برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a < b$ ، $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$

**ب)** تابع $F_X$ غیر نزولی است و در هر نقطه از سمت راست پیوسته است.

**ج)** $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ .

**۱-۲-۳ تعریف:** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و $\mathcal{F}$ یک σ- جبر روی $\Omega$ باشد، آن‌گاه تابع $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ را یک تابع $\mathcal{F}$- اندازه‌پذیر[2] گوییم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی بورل $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ داشته باشیم:

$$\{\xi \in B\} \in \mathcal{F}$$

**۱-۲-٤ تعریف:** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $n \in \mathbb{N}$ و $\mathcal{B}^n$ یک σ- جبر مجموعه‌های بورل در $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت هر تابع اندازه‌پذیر $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ یک بردار تصادفی نامیده می‌شود.

**۱-۲-۵ تعریف:** فرض می‌کنیم $X: (\Omega, \mathcal{F})$ یک بردار تصادفی است. در این صورت تابع $F_{\mathrm{X}}: \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to [0,1]$ با تعریف

$$F_{\mathrm{X}}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_n) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \leq \mathrm{x}_1, \mathrm{X}_2 \leq \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{X}_n \leq \mathrm{x}_n)$$

را تابع توزیع توأم بردار تصادفی می‌نامند.

[1] Borel
[2] Measurable

**۱-۲-۶ تعریف:** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $X$ یک متغیر تصادفی و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک بورل اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه امید تابع $g(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، که با نماد $E[g(X)]$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت

$$E[g(X)] = \int_\Omega g(X)(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

تعریف می‌شود. اگر $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، در این صورت $\mu_X = E[X]$ با تعریف

$$\mu_X = E[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$$

را امید ریاضی $X$ می‌نامند. حال اگر $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ در این‌صورت $Var[X]$ را با تعریف

$$\sigma_X^2 = Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

واریانس $X$ و $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ را انحراف معیار $X$ می‌نامند.

**۱-۲-۷ تعریف:** برای بردارهای تصادفی $X$، امید $X$، که با $\mu_X$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت

$$\mu_X = E(X) = (E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n])$$

تعریف می‌شود. در مورد بردارهای تصادفی به‌جای واریانس مفهوم ماتریس کواریانس تعریف می‌شود. ماتریس کواریانس یک بردار تصادفی $X$ که با $\sum$ نمایش داده می‌شود، یک ماتریس $n \times n$ است، که در آن هر درایه‌ی $\sigma_{i,j}$ به صورت

$$\sigma_{i,j} = Cov(X_i, X_j) = E\left[\left(X_i - \mu_{X_i}\right)\left(X_j - \mu_{X_i}\right)\right]$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که $Cov(X_i, X_i) = \sigma_{X_i}^2$.

**۱-۲-۸ تعریف:** دو متغیر تصادفی $X$ و $Y$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را مستقل از یکدیگر (مستقل) می‌گوییم، هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی بورل $A$ و $B$ از $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ داشته باشیم:

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

**۱-۲-۹ تعریف:** متغیرهای تصادفی $X_1$ و $X_2$ و ... و $X_n$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ مستقل هستند اگر برای دنباله‌ای از مجموعه‌ی بورل $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{n}$ داشته باشیم:

$$\mathbb{P}(X_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}_n) = \mathbb{P}\big(X_1 \in \mathcal{B}_1\big) \dots \mathbb{P}(X_n \in \mathcal{B}_n\big)$$

در مورد متغیرهای تصادفی مستقل از یکدیگر گزاره‌های زیر همواره برقرار هستند:

**الف)** اگر متغیرهای تصادفی $X_1$ و $X_2$ و ... و $X_n$ مستقل از یکدیگر باشند، آن‌گاه برای هر $n$ تابع با مقادیر حقیقی $g_1$ و $g_2$ و ... و $g_n$ داریم

$$E[g_1(X_1)g_2(X_2) \dots g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)]E[g_2(X_2)] \dots E[g_n(X_n)]$$

**ب)** اگر متغیرهای تصادفی $X_1$ و $X_2$ مستقل از یکدیگر باشند، $Cov(X_1, X_2) = 0$. عکس این گزاره درست نیست.

**پ)** اگر $Cov(X_1, X_2) = 0$، آن‌گاه متغیرهای تصادفی $X_1$ و $X_2$ را غیرهمبسته (ناهمبسته) می‌نامند.

**۱-۲-۱۰ تعریف:** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. یک فرآیند تصادفی روی این فضا، خانواده‌ای است چون $X = \{X_t\}_{t \in T}$ که در آن به ازای هر $t \in T$، $X_t$ یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد. هر فرآیند تصادفی $X$ تابعی است از دو متغیر $t$ و $\omega$ به‌گونه‌ای که

برای لحظه‌ی ثابت $t$، $X_t = \{X_t(\omega), \omega \in \Omega\}$ متغیر تصادفی است $(X_t(.): \Omega \to \mathbb{R})$ و برای پیشامد ساده و ثابت $\omega \in \Omega$، $X$ تابعی است از متغیر زمان $(X: T \to \mathbb{R})$:

$$X_t = X_t(\omega), t \in T.$$

در حالتی که $\omega \in \Omega$ ثابت در نظر گرفته شود، تابع $X_t(\omega)$ را مسیر نمونه‌ای برای فرآیند تصادفی $X$ می‌نامند.

## ۱-۳ امید شرطی

مطالب این بخش از مراجع [۱٤] و [۲۷] جمع‌آوری شده است.

مفهوم امید شرطی یکی از مهم‌ترین مفاهیمی است که در درک موضوعاتی چون مارتینگل‌ها و انتگرال‌های تصادفی نقشی اساسی دارد. فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال باشد. قبل از ارائه‌ی تعریف امید شرطی، به تعریف زیر توجه کنید:

**۱-۳-۱ تعریف:** فرض می‌کنیم $Y$ و $Y_1$ و $Y_2$ متغیر فرآیند تصادفی، بردارهای تصادفی، یا فرآیندهای تصادفی روی $\Omega$ هستند و $\mathcal{F}$ یک $\sigma$- جبر روی $\Omega$ است. در این‌صورت

۱) اگر $\sigma(Y) \subset \mathcal{F}$ ، آن‌گاه می‌توان گفت که اطلاعات مربوط به $Y$ در درون $\mathcal{F}$ قرار دارد یا این که $Y$ بیش از آنچه که در درون $\mathcal{F}$ وجود دارد دارای اطلاعات نیست.

۲) اگر $\sigma(Y_1) \subset \sigma(Y_2)$ ، آن‌گاه گفته می‌شود که $Y_1$ بیش از $Y_2$ دارای اطلاعات نیست.

**۱-۳-۲ تعریف:** یک متغیر تصادفی مثل $Z$ را امید $X$ به شرط معلوم بودن $\sigma$- جبر $\mathcal{F}$ می‌نامند هرگاه، $Z$ بیش از آنچه که در درون $\mathcal{F}$ وجود دارد دارای اطلاعات نباشد، یعنی $\sigma(Z) \subset \mathcal{F}$ ، و $Z$ در شرط

$$E[X1_A] = E[Z1_A] \qquad \forall\, A \in \mathcal{F}$$

صدق کند.

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که این امید شرطی همواره وجود دارد و منحصر به فرد است.

**۱-۳-۳ قضیه (رادون نیکودیم[3]):** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $\mathcal{F}'$ یک $\sigma$-جبر دیگر از زیرمجموعه‌های $\Omega$ ، $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ ، و $X$ یک متغیر تصادفی روی $\Omega$ باشد. اگر $E|X| < \infty$ ، در این صورت یک متغیر تصادفی $Z$ روی $\Omega$ وجود دارد به‌طوری که

**الف)** $\sigma(Z) \subset \mathcal{F}'$

---

[3] Radon Nikodym

ب) $\forall A \in \mathcal{F}'$ ، $\int_A Z(\omega)d\mathbb{p}'(\omega) = \int_A X(\omega)d\mathbb{p}(\omega)$

که در آن $\mathbb{P}' = \mathbb{P}\,|_{\mathcal{F}'}$ . اگر $Z'$ متغیر دیگری باشد که در شرایط الف وب صدق کند، آن‌گاه

$$\mathbb{P}'(Z \neq Z') = 0$$

یعنی متغیر تصادفی $Z$ منحصر به فرد است. متغیر تصادفی $Z$ را امید $X$ به شرط $\mathcal{F}'$ می‌نامند و آن را با $E[X|\mathcal{F}']$ نمایش می‌دهند.

**۱-۳-٤ تعریف (تابع مشخصه):** فرض کنیم $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی باشد، آن‌گاه تابع مشخصه‌ی $X$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_t(z) \equiv \Phi_{X_t} \equiv E\left[e^{iz.X_t}\right], z \in \mathbb{R}^d$$

که درآن $E$ نماد امید ریاضی است.

## ۱-٤ فرآیندهای تصادفی

مطالب این بخش از مراجع [۱]، [٦] و [۲۷] جمع‌آوری شده است.

فرآیند تصادفی، خانواده‌ی $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ از متغیرهای تصادفی است که توسط پارامتر زمان مشخص می‌شود. پارامتر زمان $t$ می‌تواند گسسته و یا پیوسته باشد که در این پایان‌نامه با فرآیندهای تصادفی زمان- پیوسته سروکار خواهیم داشت. برای هر پیشامد $\omega \in \Omega$، مسیر $X(\omega): t \longrightarrow X_t(\omega)$ تابعی از زمان را تعریف می‌کند که مسیر نمونه‌ای فرآیند نامیده می‌شود.

در این قسمت چند فرآیند تصادفی را معرفی می‌کنیم که در نظریه‌ی فرآیندهای تصادفی، فیزیک، علوم مالی و غیره، نقش اساسی دارند.

**۱-٤-۱ تعریف (حرکت براونی):** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضـای احتمـال اسـت و $T = [0, +\infty)$. فرآیندهای تصادفی $W = \{W_t\}_{t\in T}$ را حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر) گوییم، هرگاه شرایط زیـر در مـورد آن برقرار باشد:

۱) این حرکت از صفر شروع می‌شود، یعنی $W_0 = 0$

۲) نموهـای آن مانـا و مسـتقل از یکـدیگر باشـند، یعنـی بـرای هـر $t, s \in T$ و هـر $h \in \mathbb{R}$ بـه‌طـوری کـه $t + h, s + h \in T$ داشته باشیم:

$$W_t - W_s \overset{d}{=} W_{t+h} - W_{s+h}$$

و اینکه برای هر انتخاب $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ از $T$ با $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ , $n \geq 1$، متغیرهای تصادفی

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

مستقل از یکدیگر باشند.

۳) برای هر $t > 0$ ، $W_t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t$ باشد، یعنی $W_t \sim N(0, t)$ .

٤) $W_t(\omega)$ در سرتاسر $T$ تقریبا همه‌جا پیوسته باشد. (با احتمال ۱ هر مسیر آن پیوسته باشد).

**۱-٤-۲ تعریف (حرکت براونی توأم با رانش):** فرض می‌کنیم $B = \{B_t\}_{t\in T}$ یک حرکـت براونـی سـاده باشد، در این‌صورت فرآیند $X_t$ با تعریف

$$X_t = \mu t + \sigma B_t \qquad , \qquad t \geq 0$$

که در آن $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ثابت هستند، را حرکت براونی توأم با رانش می‌نامند.

**۱-٤-۳ تعریف (پالایه[4]):** فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمـال اسـت و $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ خـانواده‌ای از $\sigma$-جبرهایی باشد که همگی در $\mathcal{F}$ قرار دارند. در این صورت $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ را یک پالایه برای $\mathcal{F}$ گوینـد هرگـاه بـه ازای هـر $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t\ ,\ 0 \leq s \leq t$ . در حقیقت هر پالایه زنجیره‌ای غیر نزولی از اطلاعـات اسـت. هرگـاه $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\{0,1,2,\ldots\}}$ دنباله‌ای صعودی از $\sigma$- جبرهای روی $\Omega$ باشد، آن‌گاه این دنباله را نیز یک پالایه می‌نامند.

---
[4] Filtration

**۱-٤-٤ تعریف (فرآیند سازگار[5])**: فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک پالایه برای این فضا، و $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی روی این فضا باشد، در این صورت فرآیند $Y$ را نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار گویند، هرگاه

$$\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t \quad , \qquad \forall\, t \geq 0$$

هر فرآیند تصادفی مانند $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ همواره نسبت به پالایه‌ی طبیعی تولید شده توسط $Y$ یعنی

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s\,, s \leq t),$$

سازگار است. در حقیقت معنای سازگاری با پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ این است که $Y_t$ ها بیش از آنچه که در $\{\mathcal{F}_t\}$ است حاوی اطلاعات نیستند.

**۱-٤-٥ تعریف (زمان توقف[6])**: فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک پالایه برای این فضا باشد. تابع $\tau: \Omega \to [0, +\infty)$ را یک زمان توقف نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ گویند، اگر برای هر $t \in [0, +\infty)$ داشته باشیم

$$\{\omega \in \Omega: \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$$

**۱-٤-٦ تعریف (مارتینگل[7])**: فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال، $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک پالایه برای این فضا، و $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی روی این فضا باشد، در این صورت $X$ را نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک مارتینگل گویند، هرگاه

۱) برای هر $t \geq 0$ ، $E[|X_t|] < \infty$ .

۲) $X$ نسبت به پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار باشد.

۳) برای هر $s, t \in \mathbb{R}$ با $0 \leq s \leq t$ داشته باشیم

$$E[X_t | X_s] = X_s \;,$$

**یعنی** $X_s$ تخمین خوبی برای $X_t$ به شرط معلوم بودن $\mathcal{F}_s$ باشد.

[5] Adapted process
[6] Stopping time
[7] Martingle