



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایدارسازی فرآیندهای صنعتی تاخیردار با استفاده

از قضیه Hermite-Biehler

اساتید راهنما:

دکتر حمید رضا علیخانی

دکتر علی مددی

دانشجو:

محمد شهبواری گلرخ

۱۳۹۰

تقدیم بہ

پدرو ماد عزیزم و روح برادر کرامیم

بدین وسیله اینجانب از زحمات بی شائبه اساتید راهنمای عزیز، آقایان دکتر علیخانی و دکتر مددی که در به پایان رساندن این پروژه بنده را یاری کردند و از وقت با ارزش خودشان برای راهنمایی بنده استفاده کردند تشکر و قدردانی به عمل می آورم. همچنین از پدر و مادر عزیزم که حمایت های لازم مخصوصاً حمایت روحی را از من به جا آوردند سپاس گزاری می کنم.

چکیده

آنالیز پایداری سیستم‌ها و فرآیندهای بدون تاخیر ساده می‌باشد. زیرا تعداد ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته محدود است. اما وقتی که تاخیر به دلایل مختلف وارد سیستم می‌شود آنالیز پایداری سیستم را دچار مشکل می‌کند. زیرا این بار تعداد ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته نامحدود می‌شود. در حالت بدون تاخیر معادله مشخصه سیستم یک چندجمله‌ای خواهد بود که پایداری آن با روش‌های شناخته شده نظیر روث-هرویتز امکان پذیر است. در صورت وارد شدن تاخیر به سیستم، معادله مشخصه دیگر چندجمله‌ای نخواهد بود که آن را شبه چندجمله‌ای می‌نامیم. Pontryagin جزء اولین محقق‌هایی بود که راجع به ریشه‌های این شبه چندجمله‌ای‌ها بحث کرد. در اینجا قضیه Hermite-Biehler یا به اختصار قضیه H-B مطرح می‌شود که نسخه اصلی آن برای پایداری چندجمله‌ای‌ها به کار گرفته می‌شود. این محقق نسخه تعمیم یافته‌ای از این قضیه مطرح کرد که قابل استفاده برای این شبه چندجمله‌ای‌ها می‌باشد. در تحقیقات قبلی کنترلر PID به فرآیند مرتبه اول و مرتبه دوم تاخیردار اعمال شده و با استفاده از این قضیه تعمیم یافته H-B، فضای پایدار کننده بهره‌های کنترلر طوری تعیین شده است که معادله مشخصه سیستم پایدار هرویتز شود. ما در این پایان‌نامه کنترل کننده مرتبه اول به فرآیندهای مرتبه اول و مرتبه دوم تاخیردار اعمال می‌کنیم. همچنین، خانواده کنترلر PID و کنترل کننده مرتبه اول به فرآیندهای مرتبه اول و دوم انتگرالی تاخیردار اعمال می‌کنیم. در همه این حالات فضای پایداری بهره‌های کنترلر را طوری تعیین می‌کنیم که معادله مشخصه سیستم حلقه بسته پایدار هرویتز شود.

کلید واژه‌ها

فرآیند صنعتی (Industrial Process) ، سیستم تاخیردار (Time-Delay System) ، قضیه H-B (Hermite-Biehler Theorem) ، پایداری (Stability) ، کنترلر PID (PID Controller)

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: مقدمه.....
۱-۱	سیستم های تاخیردار و شبه چندجمله ای ها.....
۲-۱	قضیه H-B برای شبه چندجمله ای ها.....
۳-۱	مروری بر کارهای پیشین.....
فصل دوم: پایدارسازی فرآیند انتگرالی تاخیر دار مرتبه اول با خانواده کنترلر PID و	
۱۳	کنترل کننده مرتبه اول.....
۱-۲	پایدارسازی با کنترلر P.....
۲-۲	پایدارسازی با کنترلر PD.....
۳-۲	پایدارسازی با کنترلر PI.....
۴-۲	پایدارسازی با کنترلر PID.....
۵-۲	پایدارسازی با کنترل کننده مرتبه اول.....
فصل سوم: پایدارسازی فرآیند انتگرالی مرتبه دوم تاخیر دار با خانواده کنترلر PID و	
۵۵	کنترل کننده مرتبه اول.....
۱-۳	پایدارسازی با کنترلر P.....
۲-۳	پایدارسازی با کنترلر PI.....
۳-۳	پایدارسازی با کنترلر PD.....
۴-۳	پایدارسازی با کنترلر PID.....
۵-۳	پایدارسازی با کنترل کننده مرتبه اول.....
فصل چهارم: پایدارسازی فرآیند مرتبه اول تاخیر دار با کنترل کننده مرتبه اول.....	
۱-۴	سیستم حلقه باز پایدار ($T > 0$).....
۲-۴	سیستم حلقه باز ناپایدار ($T < 0$).....

فصل پنجم: پایدارسازی فرآیند مرتبه دوم تاخیر دار با کنترل کننده مرتبه اول.....۱۲۷

فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات.....۱۴۱

۱-۶- نتیجه گیری.....۱۴۱

۲-۶- پیشنهادات.....۱۴۷

ضمیمه.....۱۵۰

مراجع.....۱۵۶

فهرست شکل ها

صفحه	عنوان
۲	۱-۱
۲	۲-۱ : مخزن گرم کننده به همراه یک لوله بلند
۳	۳-۱ : نمایش تاخیر
۳	۴-۱ : ظاهر شدن تاخیر در خروجی
۳	۵-۱ : ظاهر شدن تاخیر در خروجی
۴	۶-۱ : ظاهر شدن تاخیر درون حلقه
۴	۷-۱ : سیستم با چندین تاخیر
۱۵	۱-۲
۱۷	۲-۲ : ناحیه پایداری به ازای $0 < K_p < \frac{\pi}{2KL}$
۱۸	۳-۲ : ناحیه پایداری به ازای $K_p = \frac{\pi}{2KL}$
۱۸	۴-۲ : ناحیه پایداری به ازای $\frac{\pi}{2KL} < K_p < K_p^{(1*)}$
۲۶	۵-۲ : فضای K_p و K_d به ازای $L = 4$ و بهره های مختلف A
۲۶	۶-۲ : فضای K_p و K_d به ازای $A = 4$ و تاخیرهای مختلف L
۲۹	۷-۲ : نمودار $f(z) = z \sin(z)$ و $ALK_p = -4$
۳۰	۸-۲ : نمودار $f(z) = z \sin(z)$ و $ALK_p = 1$
۳۱	۹-۲ : نمودار $f(z) = z \sin(z)$ و $ALK_p = 5$
۳۳	۱۰-۲ : فضای K_p و K_i به ازای $A = 1$ و تاخیرهای مختلف L
۳۴	۱۱-۲ : فضای K_p و K_i به ازای $L = 1$ و بهره های مختلف A
۳۷	۱۲-۲ : ناحیه پایداری K_i و K_d به ازای $A = 0.25$ ، $L = 4$ و $K_p = 1$
۳۸	۱۳-۲ : ناحیه پایداری K_i و K_d به ازای $A = 0.25$ ، $L = 4$ و $K_p = \frac{\pi}{2AL}$
۳۸	۱۴-۲ : ناحیه پایداری K_i و K_d به ازای $A = 0.25$ ، $L = 4$ و $K_p = 1.7$
۴۲	۱۵-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۴-۲) و $AK = 1$
۴۳	۱۶-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۴-۲) و $AK = -1$
۴۳	۱۷-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۵-۲) و $AK = 10$ و $0 < z < 2\pi$
۴۴	۱۸-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۵-۲) و $AK = 10$ و $0 < z < 6\pi$
۴۵	۱۹-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۵-۲) و $AK = -10$
۴۶	۲۰-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۷-۲) و $AK = 1$
۴۷	۲۱-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۸-۲) و $AK = 1$
۴۷	۲۲-۲ : نمودار $f(z)$ با معادله (۴۹-۲) و $AK = 3$

۴۸	$0 < z < 2$ و $AK = -0.5$ و (۵۰-۲) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۳-۲
۴۹	$0 < z < 6\pi$ و $AK = -0.5$ و (۵۰-۲) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۴-۲
۴۹	$0 < z < 2$ و $AK = -50$ و (۵۱-۲) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۵-۲
۵۰	$0 < z < 2$ و $AK = -50$ و (۵۱-۲) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۶-۲
۵۴	فضای پایدارسازی K و τ_1 به ازای $A = L = 1$ و ۳ مقدار از τ_2	۲۷-۲
۶۰	$AL^2K_p = -8$ و $f(z) = z^2 \cos(z)$ نمودار	۱-۳
۶۰	$0 < z < 2$ و $AL^2K_p = 0.3$ و $f(z) = z^2 \cos(z)$ نمودار	۲-۳
۶۱	$2 < z < 16$ و $AL^2K_p = 0.3$ و $f(z) = z^2 \cos(z)$ نمودار	۳-۳
۶۷	فضای K_p و K_d به ازای $L = 1$ و بهره های مختلف A	۴-۳
۶۷	فضای K_p و K_d به ازای $A = 1$ و تاخیرهای مختلف L	۵-۳
۷۱	فضای پایدارسازی K_i و K_d بدون اعمال قید $K_i < AK_p K_d$	۶-۳
۷۱	فضای پایدارسازی K_i و K_d با اعمال قید $K_i < AK_p K_d$	۷-۳
۷۵	$0 < z < 2\pi$ و $AK = 0.3$ و (۳۶-۳) با معادله $f(z)$ نمودار	۸-۳
۷۶	$2\pi < z < 6\pi$ و $AK = 0.3$ و (۳۶-۳) با معادله $f(z)$ نمودار	۹-۳
۷۶	$6\pi < z < 10\pi$ و $AK = 0.3$ و (۳۶-۳) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۰-۳
۸۱	فضای پایداری K و τ_1 به ازای $\tau_2 = A = L = 1$	۱۱-۳
۸۱	فضای پایداری K و τ_1 به ازای $A = L = 1$ و $\tau_2 = 10$	۱۲-۳
۸۵	$0 < z < 4\pi$ و $AK = 2$ و (۹-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱-۴
۸۶	$4\pi < z < 10\pi$ و $AK = 2$ و (۹-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲-۴
۸۸	$AK = -10$ و (۹-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳-۴
۸۸	$AK = 20$ و (۹-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۴-۴
۸۹	$0 < z < 4\pi$ و $AK = 19$ و (۱۰-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۵-۴
۹۰	$4\pi < z < 10\pi$ و $AK = 19$ و (۱۰-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۶-۴
۹۲	$AK = -100$ و (۱۰-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۷-۴
۹۲	$AK = 300$ و (۱۰-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۸-۴
۹۴	$AK = 1$ و (۱۴-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۹-۴
۹۴	$AK = 2$ و (۱۵-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۰-۴
۹۵	$AK = 4$ و (۱۶-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۱-۴
۹۶	$0 < z < 2$ و $AK = -1.05$ و (۱۷-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۲-۴
۹۷	$0 < z < 8\pi$ و $AK = -1.05$ و (۱۷-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۳-۴
۹۸	$AK = 15$ و (۱۷-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۴-۴

۹۹	$AK = -50$ و (۱۷-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۵-۴
۱۰۰	$0 < z < 2\pi$ و $AK = -5$ و (۱۸-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۶-۴
۱۰۱	$2\pi < z < 10\pi$ و $AK = -5$ و (۱۸-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۱۷-۴
۱۰۵	$L = 3$ و $T = \tau_2 = 0.2$ به ازای $a(z)$ نمودار	۱۸-۴
۱۰۵	$L = 3$ و $T = \tau_2 = 0.2$ به ازای $f(z)$ و $a(z)$ نمودارهای	۱۹-۴
۱۰۷	$\tau_2 = -1$ و $T = L = 1$ به ازای $f(z)$ و $a(z)$ نمودارهای	۲۰-۴
۱۰۸	$L = \tau_2 = 1$ و $A = 5$ ، $T = 0.5$ به ازای τ_1 و K ناحیه پایداری	۲۱-۴
۱۰۸	$\tau_2 = 0.1$ و $L = 1$ ، $A = 5$ ، $T = 0.35$ به ازای τ_1 و K ناحیه پایداری	۲۲-۴
۱۱۰	$AK = -2$ و (۲۶-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۳-۴
۱۱۱	$0 < z < 1.3$ و $AK = -1.5$ و (۲۷-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۴-۴
۱۱۲	$1.3 < z < 8\pi$ و $AK = -1.5$ و (۲۷-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۵-۴
۱۱۳	$AK = -1.5$ و (۲۸-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۶-۴
۱۱۴	$0 < z < 0.2$ و $AK = -0.9999$ و (۲۹-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۷-۴
۱۱۵	$0.2 < z < 8\pi$ و $AK = -0.9999$ و (۲۹-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۸-۴
۱۱۶	$0 < z < 1$ و $AK = 0.5$ و (۳۰-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۲۹-۴
۱۱۶	$1 < z < 8\pi$ و $AK = 0.5$ و (۳۰-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳۰-۴
۱۱۸	$0 < z < 0.6$ و $AK = -1.02$ و (۳۱-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳۱-۴
۱۱۸	$0.6 < z < 8\pi$ و $AK = -1.02$ و (۳۱-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳۲-۴
۱۱۹	$AK = -40$ و (۳۲-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳۳-۴
۱۲۰	(۳۳-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳۴-۴
۱۲۲	$AK = 2$ و (۳۴-۴) با معادله $f(z)$ نمودار	۳۵-۴
		فضای پایداری سازی K و τ_1 به ازای $A = 5$ ، $T = -10$ ، $L = 1$ و	۳۶-۴
۱۲۵	$\tau_2 = -\frac{37}{18}$	
		فضای پایداری سازی K و τ_1 به ازای $A = 5$ ، $T = -10$ ، $L = 1$ و	۳۷-۴
۱۲۶	$\tau_2 = -12$	
۱۳۱	$AK = -0.5$ و (۱۰-۵) با معادله $f(z)$ نمودار	۱-۵
۱۳۱	(۱۱-۵) با معادله $f(z)$ نمودار	۲-۵
۱۳۲	$0 < z < 2$ و $AK = -3$ و (۱۲-۵) با معادله $f(z)$ نمودار	۳-۵
۱۳۳	$2 < z < 8\pi$ و $AK = -3$ و (۱۲-۵) با معادله $f(z)$ نمودار	۴-۵
۱۴۲		۱-۶

۱۴۲	۲-۶
۱۴۳	۳-۶
۱۴۴	۴-۶
۱۴۴	۵-۶
۱۴۵	۶-۶
۱۴۵	۷-۶
۱۴۶	۸-۶
۱۴۶	۹-۶

فهرست جداول

صفحه	عنوان
۵۸	۱-۳ : جدول روٹ-هرویتز برای چندجمله ای (۷-۳).....
۶۸	۲-۳ : جدول روٹ-هرویتز برای شبه چندجمله ای (۲۷-۳) با فرض $L = 0$
۷۳	۳-۳ : جدول روٹ-هرویتز برای شبه چندجمله ای (۳۲-۳) با فرض $L = 0$
۱۲۸	۱-۵ : جدول روٹ-هرویتز برای شبه چندجمله ای (۲-۵) با فرض $L = 0$

پیش گفتار

در این پایان نامه از قضیه H-B استفاده خواهیم کرد که در فصل اول آن را معرفی می کنیم. همچنین در فصل اول قبل از معرفی این قضیه راجع به سیستم های تاخیردار و شبه چندجمله ای ها بحث می کنیم. سپس از این قضیه در فصول بعد که در هر کدام تابع تبدیل حلقه باز خاصی در نظر گرفته می شود، استفاده خواهیم کرد. در فصل دوم تابع تبدیل، انتگرالی مرتبه اول است که خانواده کنترلر PID و کنترل کننده مرتبه اول به آن اعمال می شود. در فصل سوم تابع تبدیل، انتگرالی مرتبه دوم است که خانواده کنترلر PID و کنترل کننده مرتبه اول به آن اعمال می شود. فصل چهارم دارای تابع تبدیل مرتبه اول است که کنترل کننده مرتبه اول به آن اعمال می شود. در فصل پنجم کنترل کننده مرتبه اول به تابع تبدیل که مرتبه دوم است، اعمال می شود. تمامی این توابع تبدیل دارای ترم تاخیر هستند و در هر فصل فضایی بر حسب بهره های کنترلر طوری به دست می آید که معادله مشخصه سیستم حلقه بسته پایدار هر ویتز شود. پس از پایان این ۵ فصل نتیجه گیری و پیشنهادات و نیز مراجع را خواهیم داشت.

مقدمه

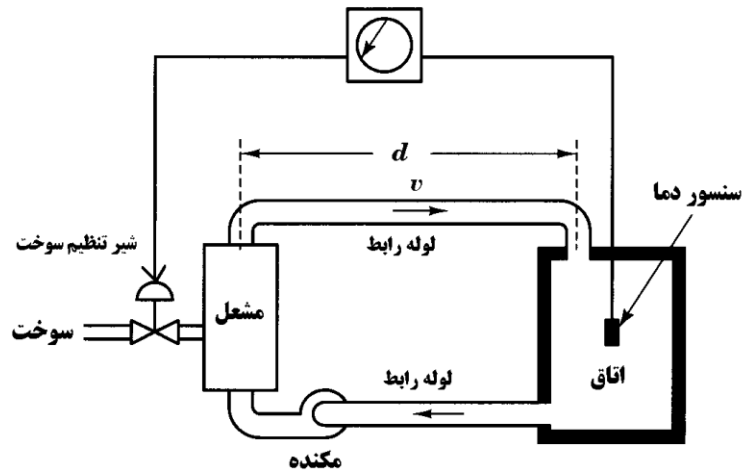
معادلات مشخصه برای سیستم های تاخیردار به عنوان شبه چندجمله ای ها شناخته می شوند. Pontryagin یکی از اولین محقق هایی بود که راجع به این شبه چندجمله ای ها مطالعه کرد. او در [۱] روی ریشه های این شبه چندجمله ای ها و دیگر معادلات غیر جبری بحث کرده است. همچنین او شرایط لازم و کافی را برای منفی شدن بخش حقیقی ریشه های این شبه چندجمله ای به دست آورد و این شرایط را برای مطالعه پایداری کلاس های معینی از شبه چندجمله ای ها استفاده کرد. در ادامه کلاس خاصی از این شبه چندجمله ای ها که مد نظر ما است را معرفی و برای مطالعه پایداری آن از قضیه تعمیم یافته Hermite-Biehler یا به اختصار H-B که در بخش ۱-۲ توضیح می دهیم استفاده می کنیم.

این فصل شامل سه بخش است. بخش ۱-۱ سیستم های تاخیردار و شبه چندجمله ای ها را شرح می دهد. بخش ۱-۲ قضیه تعمیم یافته H-B را معرفی می کند. بخش ۱-۳ کارهای پیشین را مرور می کند. برای اطلاع کافی از کلیه تعمیم های قضیه H-B به [۲] مراجعه کنید.

۱-۱- سیستم های تاخیردار و شبه چندجمله ای ها

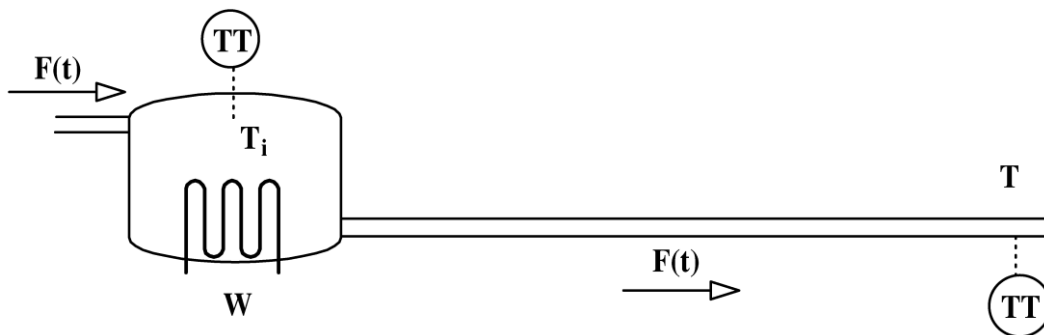
تاخیرها در یک سیستم زمانی ایجاد می شوند که یک سیگنال یا متغیر فیزیکی ناشی شده از بخشی از یک سیستم بعد از یک گذشت زمانی در بخشی دیگر، در دسترس شوند. به عنوان نمونه می توان به دو نمونه فرآیند صنعتی تاخیردار زیر اشاره کرد

شکل ۱-۱ یک سیستم حرارتی نشان می دهد که در آن از چرخش هوای داغ برای گرم کردن یک اتاق یا یک محوطه استفاده شده است. در این فرآیند سنسور در فاصله d از مشعل قرار گرفته است و سرعت حرکت هوا در لوله رابط v می باشد. بنابراین تاخیر بین عملکرد مشعل و سنسور به صورت $L = \frac{d}{v}$ است. ورودی این فرآیند زاویه چرخش شیر تنظیم سوخت و خروجی آن دمای اتاق است. [۳]



شکل ۱-۱ [3]

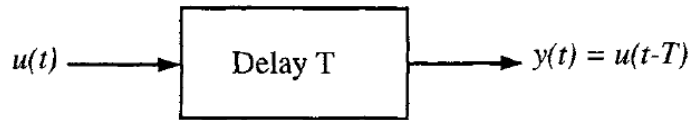
شکل ۱-۲ یک سیستم گرم کننده آب را نشان می دهد. آب درون مخزن با استفاده از یک مقاومت الکتریکی داغ شده و توسط یک پمپ با یک لوله که عایق حرارتی است به خروجی سیستم می رسد. ورودی فرآیند توان مقاومت (W) و خروجی آن دمای (T) در انتهای لوله است و یک مدل خطی می تواند با استفاده از پروسه شناسایی تست گام به گام نزدیک به یک نقطه عملیاتی W_0 و T_0 تعیین شود. زمانی یک گام مثبت به W اضافه می شود، دمای درون مخزن شروع به افزایش می کند. چنانچه لوله در دمای اولیه T_0 پر از آب شد، این تغییر بلافاصله در خروجی مشاهده نشده و نیاز به زمانی است تا آب داغ به انتهای لوله برسد. بنابراین بعد از یک تاخیر زمانی تعریف شده به وسیله سرعت و طول لوله، دمای خروجی T شروع به افزایش می کند. در صورتی که یک سرعت ثابت F در نظر گرفته شود، تاخیر زمانی L می توان با استفاده از F و طول لوله V تخمین زده شود به طوری که $L = \frac{V}{F}$ خواهد شد. [4]



شکل ۱-۲: مخزن گرم کننده به همراه یک لوله بلند [4]

همچنین تاخیرها می توانند به سبب زمان مرتبط با انتقال اطلاعات به مکان های متحرک و یا در سیستم های کنترل دیجیتال به سبب زمان صرف شده در محاسبه سیگنال های کنترل از دیتای اندازه گیری شده ایجاد شوند.

بلوک موجود در شکل ۳-۱ می تواند تاخیر زمانی را نشان دهد.

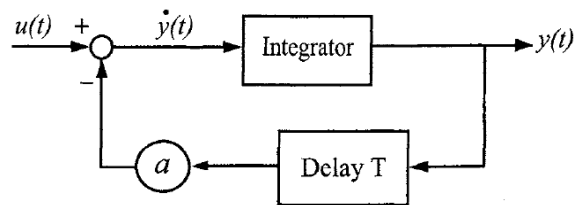


شکل ۳-۱: نمایش تاخیر [5]

در یک سیستم فیدبک دار دینامیک که تاخیر موجود است، معادله سیستم ممکن است فرم زیر را داشته باشد که تاخیر در خروجی ظاهر می شود

$$\dot{y}(t) + ay(t - T) = u(t). \quad (1-1)$$

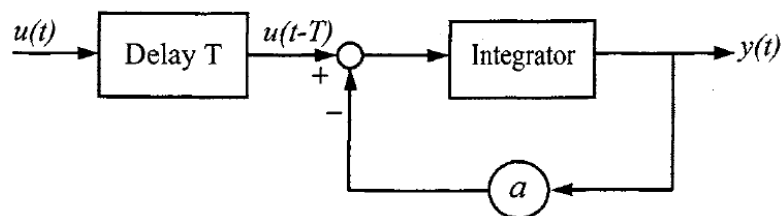
بلوک دیاگرام معادله (۱-۱) در شکل ۴-۱ نمایش داده شده است



شکل ۴-۱: ظاهر شدن تاخیر در خروجی [5]

اگر تاخیر در ورودی ایجاد شود معادله سیستم فرم زیر را دارد که بلوک دیاگرام آن در شکل ۵-۱ نمایش داده شده است

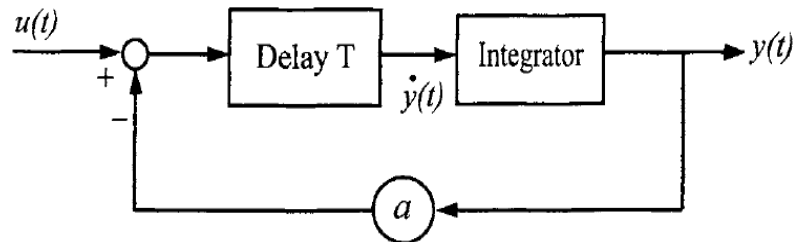
$$\dot{y}(t) + ay(t) = u(t - T). \quad (2-1)$$



شکل ۵-۱: ظاهر شدن تاخیر در ورودی [5]

ممکن است تاخیر درون حلقه ظاهر شود که معادله سیستم فرم زیر را خواهد داشت و بلوک دیاگرام آن در شکل ۶-۱ نشان داده شده است

$$\dot{y}(t) = u(t - T) - ay(t - T), \quad (3-1)$$

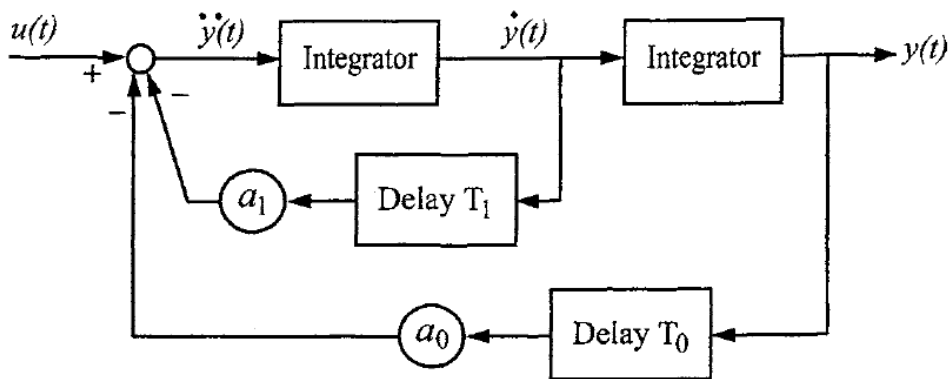


شکل ۶-۱: ظاهر شدن تاخیر درون حلقه [5]

یک سیستم مرتبه بالاتر با چندین تاخیر می تواند با معادله زیر بیان شود

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t - T_1) + a_0 y(t - T_0) = u(t), \quad (4-1)$$

که بلوک دیاگرام معادله (۴-۱) در شکل ۷-۱ نمایش داده شده است



شکل ۷-۱: سیستم با چندین تاخیر [5]

به طور کلی سیستم های خطی دارای تاخیرهای T_1, \dots, T_l در فضای حالت به فرم زیر بیان می شوند

$$x'(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^l A_i x(t - T_i) + Bu(t). \quad (5-1)$$

برای بحث روی پایداری یک چنین سیستم هایی با معادلات (۱-۱) تا (۴-۱) مفید است که $y(t)$ با قرار دادن $u(t) = 0$ تعیین و روی رفتار $y(t)$ در $t \rightarrow \infty$ مطالعه شود. به عنوان مثال سیستم با معادله (۴-۱) در نظر بگیرید که $u(t) = 0$ قرار داده شده است و $y(t) = e^{st}$ جواب پیشنهاد شده باشد که داریم

$$(s^2 + a_1 s e^{-T_1 s} + a_0 e^{-T_0 s}) e^{st} \equiv 0, \quad (6-1)$$

به طوری که s در معادله زیر صادق است

$$s^2 + a_1 s e^{-T_1 s} + a_0 e^{-T_0 s} = 0, \quad (7-1)$$

معادله (۷-۱)، معادله مشخصه سیستم (۴-۱) است و مکان ریشه هایش، پایداری سیستم مذکور را تعیین می کند. در حقیقت اگر ریشه هایی در نیم صفحه بسته راست داشته باشد، سیستم ناپایدار است به طوری که خروجی سیستم بدون کران رشد می کند.

معادله مشخصه مرتبط با معادله (۵-۱) می تواند به فرم زیر نشان داده شود

$$\begin{aligned} \delta(s) &\equiv \det(sI - A_0 - \sum_{i=1}^l A_i e^{-T_i s}) \\ &= P_0(s) + \sum_{k=1}^m P_k(s) e^{-L_k s}, \end{aligned} \quad (8-1)$$

که L_k حاصل جمع های T_i هستند و داریم

$$P_0(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i, \quad (9-1)$$

$$P_k(s) = \sum_{i=0}^{n-1} (b_k)_i s^i, \quad (10-1)$$

توجه شود که ترم تاخیر در بالاترین مرتبه مشتق ظاهر نشده است. چنین سیستم هایی، سیستم های تاخیر عقب افتاده نامیده می شوند. وقتی که ترم بالاترین مرتبه مشتق شامل تاخیر باشد، چنین معادله ای داریم

$$y''(t - T_2) + a_1 y'(t - T_1) + a_0 y(t - T_0) = u(t), \quad (11-1)$$

که معادله مشخصه می شود

$$s^2 e^{-T_2 s} + a_1 s e^{-T_1 s} + a_0 e^{-T_0 s} = 0, \quad (12-1)$$

چنین سیستم هایی، سیستم های تاخیر خنثی نامیده می شوند

در هر دو سیستم تاخیر عقب افتاده و خنثی پایداری معادل با وضعیتی است که همه ریشه های معادله مشخصه در نیم صفحه چپ قرار بگیرند. یک تفاوت مهم بین طبیعت ریشه های معادله مشخصه سیستم های تاخیر عقب افتاده و خنثی وجود دارد. در یک

سیستم عقب افتاده فقط می تواند یک تعداد محدود از ریشه ها در نیم صفحه راست داشته باشد که این موقعیت برای همه سیستم های خنثی حفظ نمی شود.

در نهایت یادآوری می شود که در معادلاتی نظیر (۷-۱)، (۸-۱) و (۱۲-۱) تاخیرها ضرایب صحیحی از عامل مثبت τ هستند. در چنین حالاتی گفته می شود تاخیرها متناسب هستند و معادله مشخصه فرم زیر را خواهد داشت

$$\delta(s) = a_0(s) + a_1(s)e^{-\tau s} + a_2(s)e^{-2\tau s} + \dots + a_k(s)e^{-k\tau s}, \quad (13-1)$$

که $a_i(s)$ چندجمله ای هستند.

بنابراین $\delta(s)$ یک چند جمله ای با دو متغیر s و $v \equiv e^{-\tau s}$ می باشد.

در فصول بعد با حالت تک تاخیره معادله مشخصه فوق سرو کار خواهیم داشت که این تاخیر درون حلقه فیدبک ظاهر می شود. حتی برای این وضعیت ساده نیز مسئله پایداری از نقطه نظر نتیجه گیری پیچیده و چالش برانگیز می شود.

۱-۲- قضیه H-B برای شبه چندجمله ای ها

یکی از روش های پایداری سازی این شبه چندجمله ای ها استفاده از تقریب *Padé* است که در آن جمله تاخیر با یک تابع تبدیل مناسب مرتبه اول یا دوم یا مراتب بالاتر تقریب زده می شود. سپس، به کمک یکی از روش های رایج نظیر روث-هرویتز یا قضیه اصلی H-B برای سیستم های بدون تاخیر، پایدار می شود. این روش دارای محدودیت هایی بوده و ممکن است باز هم خروجی سیستم بی کران شود. جهت اطلاعات بیشتر می توانید به [5] و [6] مراجعه کنید. یکی دیگر از روش های پایداری سازی، تکنیک D-partition است که در فصل دوم مقایسه ای بین این تکنیک و قضیه تعمیم یافته H-B انجام می دهیم که نتایج یکسان به دنبال خواهد داشت.

پایدار سازی سیستم بدون تاخیر برای مطالعه نسبتاً ساده است زیرا تعداد ریشه های معادله مشخصه اش محدود می باشد. اگرچه وقتی تاخیر وارد می شود این سهولت از بین می رود. زیرا تعداد ریشه ها نامحدود شده و پایدار سازی را کاملاً مشکل می کند. جهت تشریح این پیچیدگی در فصل دوم [5] نشان داده شده است که قضیه H-B برای چندجمله ای های هرویتز ارائه شده نمی تواند برای بررسی پایداری این شبه چندجمله ای ها استفاده شود. همچنین خاصیت متقاطع ارائه شده در فصل دوم [5] که در تعریف ۲-۱ به آن اشاره می کنیم، نه شرط لازم و نه شرط کافی برای تضمین پایداری این شبه چندجمله ای ها می باشد.

در اینجا روی توابعی به فرم $f(s, e^s)$ مطالعه می شود که $f(s, t)$ یک چند جمله ای دو متغیره می باشد. قبل از ارائه نتایج چند تعریف اولیه مطرح می شود. $f(s, t)$ را یک چند جمله ای دو متغیره با ضرایب حقیقی یا مختلط به فرم زیر در نظر بگیرید

$$f(s, t) = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^N a_{jk} s^j t^k. \quad (14-1)$$

تعریف ۱-۱-۱ [5] گفته می شود $f(s, t)$ جمله عمده دارد اگر یک ضریب غیر صفر a_{jk} وجود داشته باشد که هردو اندیس، ماکزیم مقدار را داشته باشد. بدون گم کردن اصل موضوع، $a_{MN} s^M t^N$ را جمله عمده می نامیم. به عنوان مثال $f(s, t) = 2s + t^3 - st^3$ جمله عمده ندارد در حالی که $f(s, t) = 2s + t^3 - st^3$ همان $-st^3$ می باشد. حالا اولین نتیجه Pontryagin بیان می شود.

قضیه ۱-۱-۱ [5] اگر چندجمله ای $f(s, t)$ جمله عمده نداشته باشد آنگاه تابع $F(s) = f(s, e^s)$ یک تعداد ریشه نامحدود با بخش های حقیقی مثبت دلخواه بزرگ خواهد داشت.

اگر $f(s, t)$ جمله عمده داشته باشد، نتیجه اصلی Pontryagin نشان می دهد که قضیه H-B به کلاس توابع $F(s) = f(s, e^s)$ تعمیم می یابد. قبل از ارائه این تعمیم نیاز به بیان مقدماتی می باشد.

دوباره تابع $f(s, t)$ با فرض داشتن جمله عمده $a_{MN} s^M t^N$ به صورت زیر نوشته می شود

$$f(s, t) = s^M X^{*(N)}(t) + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^N a_{jk} s^j t^k, \quad (15-1)$$

که $X^{*(N)}(t)$ ضریب s^M است. از اینرو $X^{*(N)}(t)$ می شود

$$X^{*(N)}(t) = \sum_{k=0}^N a_{Mk} t^k. \quad (16-1)$$

حال تعریف زیر برای متقاطع بودن مطرح می شود

تعریف ۱-۲-۱ [5] $F(s) = f(s, e^s)$ در نظر بگیرید که $f(s, t)$ چند جمله ای دارای جمله عمده باشد و نوشته شود

$$F(j\omega) = F_r(\omega) + jF_i(\omega), \quad (17-1)$$

که $F_r(\omega)$ و $F_i(\omega)$ به ترتیب نشان دهنده بخش های حقیقی و موهومی $F(j\omega)$ هستند. $\omega_{r1}, \omega_{r2}, \omega_{r3}, \dots$ ریشه های حقیقی $F_r(\omega)$ و $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots$ ریشه های حقیقی $F_i(\omega)$ به ترتیب بزرگی آنها فرض شوند. آنگاه ریشه های $F_r(\omega)$ و $F_i(\omega)$ زمانی متقاطع هستند که خاصیت ذیل را داشته باشند

$$\omega_{r1} < \omega_{i1} < \omega_{r2} < \omega_{i2} < \dots. \quad (18-1)$$

در این تعریف داریم

$$F_r(\omega) = g_r(\omega, \cos(\omega), \sin(\omega)) \quad , \quad F_i(\omega) = g_i(\omega, \cos(\omega), \sin(\omega)). \quad (19-1)$$

بعد از این مقدمات، تعمیم قضیه H-B برای شبه چندجمله ای $F(s) = f(s, e^s)$ ارائه می شود.

قضیه ۱-۲-۱ [5] با فرض $F(s) = f(s, e^s)$ که $f(s, t)$ چند جمله ای دارای جمله عمده باشد و نوشته شود

$$F(j\omega) = F_r(\omega) + jF_i(\omega),$$