بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

# عنوان: حل پاره ای از مسایل الاستوستاتیک به وسیلهٔ روشهای عددی

نگارش: رضا رامش

استاد راهنما:دکترحجت اله ادیبی

بهمن ۱۳۸٦

**چکیده**:تاکنون عمدتاً مسایل مختلف نظریه الاستیسیته دو بعدی یا با روشهای آنالیزمختلط مورد تجزیه و تحلیل قرار می گرفته ویا باروشهای عددی مانند تفاضلات متناهی و المانهای محدود. روشهای شبه طیفی بندرت در حل مسایل مذکور به کار گرفته شده؛این در حالی است که مسایل غیرخطی با رویه های مرزی منظم حوزهٔ مناسبی برای گسترش روشهای طیفی هم مکانی به عنوان جایگزینی برای روشهای سنتی می باشد.چگونگی اعمال روشهای شبه طیفی مبتنی برمتدهای هم مکانی فوریه–چبیشف برای حل مسایل مقدار مرزی ودر نهایت مسایل الاستیسیته به ویژه معادلهٔ ناویر ، در این پایان نامه مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

**کلمات کلیدی**:

متدهای شبه طیفی(Pseudospectral Methods)

ماتریسهای مشتق گیری(Differentiation Matrices)

شبکه های فوریه–چبیشف(Fourier-Chebyshev Grids)

مسایل مقدار مرزی(Boundary Values Problems)

مسایل الاستیسیه دوبعدی(2D Elasticity Problems)

معادلهٔ ناویر(Navier Equation)

## فهرست

**مقدمه :**

روشهای طیفی یکی ازسه متد عمده برای حل معادلات با مشتقات پاره ای PDE می باشند که در دهۀ هفتاد میلادی به شکل کاربردی مطرح شده وتا کنون پیشرفت های متعددی را در زمینه حل عددی مسائل مختلف سبب گردیده است.

در یک نگاه، سه دهۀ متوالی که متدهای مذکور در آنها بسط وگسترش یافته اند عبارتند از:

۱۹۵۰:متد های تفاضلات متناهی.

۱۹٦۰:متدهایِ المان های محدود.

۱۹۷۰:متدهای طیفی.

طبیعتاً ریشه و اسا س هر یک از این روشها را می توان در روشهای قبلی جستجو نمود، به عنوان مثال بسیاری از مفاهیم بنیادی موجود در متد های طیفی بر پایۀ درونیابی وبسط توابع می باشد. ضمن آنکه بیشتر پیشرفت های بعدی متد های طیفی بر پایۀ یافته های دانشمندانی چون لانکزوس(**Lanczos**)درسال ۱۹۸۳میلادی بوده است.

البته دگردیسی بنیادی در کاربرد روشهای طیفی دردهه ۷۰میلادی توسط اورزاگ (**orszag**)ودیگران برای حل مسائل دینامیک سیالات وهوا شناسی اتفاق افتاد که سبب شهرت این متد ها گردید.

روشهای طیفی کاربردی به سبب نو پا بودن در حال حاضر دارای منابع وماخذ های بسیار گسترده نمی باشند.از منابع مفید می توان به کتاب گاتلیب(**Gottlieb**)واورزاگ،(۱۹۷۷) ، رسالۀ گاتلیب، حسینی(**Hussaini**)،(۱۹۸٤)، کانوتو(**canuto**)، حسینی، کوارترونی (**Quarteroni**) و زنگ (**Zang**) اشاره نمود.

روشهای طیفی مناسب ترین ابزار برای حل مسایل ODE ' sو PDE' s با دقت بالا می باشد

بطوریکه با فرض احراز شرایط مناسب، این روشها اغلب دقتی در حدود ده رقم اعشار را به دست می دهند، جاییکه روشهای تفاضلات متناهی و المانهای محدود تنها قادر به تولید دقتی تا دو یا سه رقم اعشار می باشند؛ ضمن آنکه روشهای مذکور صرفه جویی عمده ای رادر مصرف حافظه ماشین اعمال می کنند.

در ابتدای این پایان نامه تعدادی از مفاهیم بنیادی ومتد های کاربردی شبه طیفی را ارائه می دهیم به طوریکه حل تعدادی از مسائل به روشهای طیفی با دقت بالا توسط برنامه هایی نسبتاً مختصر راخواهیم دید ، این برنامه ها عمدتاً از کتاب "روشهای طیفی درمطلب"[8] نوشتهٔ ترفتن(Trefethen) استخراج شده است.

باید توجه کنیم مقصود از متد های طیفی در این پایان نامه در بر گیرنده تنها بخشی ازاین متد هاست که به متد های شبه طیفی ویا هم مکانی شهرت دارند .ما درابتدا با چگونگی اعمال روش روی شبکه های تناوبی وشبکه -های چبیشف آشنا می شویم و در ادامه به بررسی چگونگی اعمال متد های شبه طیفی در مورد مسائل الاستیسیتهٔ خطی وبه ویژه معادلهٔ ناویر دوبعدی می پردازیم که مبتنی بر تحقیقات تالبوت وکرامتون در قالب [12]می باشد.درپایان برای بررسی صحّت روشهای اجرائی در مورد معادلهٔ ناویر دو بعدی، به مقایسه جواب های حاصل با جواب های تحلیلی گرفته شده از[1]می پردازیم.

# فصل اوّل

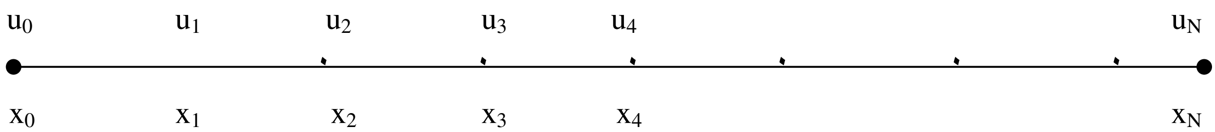
# آشنایی با روشهای شبه طیفی

## ۱-۱)ماتریس های مشتق گیری.

فرض می کنیم مجموعه نقاط شبکه ای $\{x_j\}$ و مقادیر تابعی متناظر آن یعنی $\{u(x_j)\}$ را در اختیار داشته باشیم؛سؤال این است که چگونه می توان از این مقادیر در تقریب مشتق $u$ بهره گرفت؟

احتمالاً اولین متدی که به ذهن خطور می کند استفاده از انواع فرمولهای تفاضلات متناهی میباشد.

به عنوان مثال فرض می کنیم شبکه هم فاصلهٔ $\{x_1,\ldots,x_N\}$ را با $x_{j+1}-x_j=h$ برای هر $j$ و مقادیر $\{u_1,\ldots,u_N\}$ را به عنوان مقادیر تابعی متناظر با مجموعه فوق داشته باشیم:




حال اگر $\omega_j$ معرّف تقریب $u'(x_j)$ به ازای $j=1,\ldots,N$ باشد،تقریب تفاضل متناهی استاندارد مرتبهٔ دوّم عبارتست از:

$$\omega_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + o(h^2) \qquad (۱-۱-۱)$$

که این رابطه براحتی از بسط تیلور $u(x_{j-1})$ و $u(x_{j+1})$بدست می آید.حال برای سادگی **فرض** می کنیم که مسألهٔ ما یک مسألهٔ تناوبی باشد یعنی $u_0 = u_N$و $u_1 = u_{N+1}$، در این صورت می توان مشتق گیری گسسته را به شکل ضرب ماتریسی زیر در آورد:

$$
\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix} = h^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & -1/2 \\ -1/2 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & & & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \qquad (۲-۱-۱)
$$

(قابل ذکر است که در همه جای این پایان نامه درایه های محذوف معرّف صفر می باشند.)همانطور که مشاهده می گردد ماتریس $N \times N$ در ضرب ماتریسی فوق یک ماتریس ذوزنقه ای است که دارای درایـه هـای ثابـت در طول قطرها می باشد یعنی $a_{ij}$به ازای $1 \le i,j \le N$ تنها به $i-j$ بستگی دارد ،یعنی:

$$
a_{ij} = \begin{cases} -1/2 & i-j=1 \quad \text{یا} \quad i-j=1-N \\ 1/2 & i-j=-1 \quad \text{یا} \quad i-j=N-1 \\ 0 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}
$$

همچنین ماتریس مذکور یک ماتریس دوری نیز می باشد یعنی $a_{ij}$فقط به$(i-j) \bmod N$ بستگی دارد زیرا

$$a_{ij} = \begin{cases} -1/2 & i-j=1 \quad (\text{N مانده}) \\ 1/2 & i-j=-1 \quad (\text{N مانده}) \\ 0 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

ماتریس ذوزنقه ای دوری موجود در ضرب ماتریسی (۲-۱-۱) نمونه ای از یک ماتریس مشتق گیری است که دارای مرتبه دقّت ۲ می باشد چرا که برای داده های $u_j$ بدست آمده از یک نمونه گیری تابع به اندازه کافی هموار u، مقادیر تقریبی متناظر با $u'(x_j)$ با سرعت $o(h^2)$ همگرا می شوند وقتی $h \to 0$ ؛ که با در نظر گرفتن سریهای تیلور قابل اثبات است.

تا اینجا یک مثال از ماتریس های مشتق گیری را مشاهده نمودیم،که دارای مرتبۀ دقّت دو می باشد ،یک راه جایگزین برای بدست آوردن ماتریس مشتق گیری مذکور،به کار گیری فرایند مشتق گیری از چند جمله ای درونیاب محلی می باشد که ازالگوریتم زیر تبعیت می کند:

برای $j=1,\ldots,N$

اولاً) قرار بده: $p_j$ را چند جمله ای یکتای با درجه حداکثر دو بقسمی که:

$p_j(x_{j+1})=u_{j+1}$ و $p_j(x_j)=u_j$ و $p_j(x_{j-1})=u_{j-1}$.

ثانیاً) قرار بده: $\omega_j=p'_j(x_j)$.

در گام اول از الگوریتم فوق چند جمله ای درونیاب یکتای $p_j$ به ازای یک $j$ ثابت که حداکثر از درجه ۲ می باشد بدست می آید که با استفاده از دستور درونیابی لاگرانژ می توان دید که $p_j$ دارای فرم زیر می باشد:

$$p_j(x) = u_{j-1}a_{-1}(x) + u_j a_0(x) + u_{j+1}a_1(x)$$

بقسمی که :

$$a_0(x) = \frac{-(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})}{h^2} \qquad a_{-1}(x) = \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2h^2}$$

$$a_1(x) = \frac{(x - x_{j-1})(x - x_j)}{2h^2}$$

سپس در گام دوّم از الگوریتم فوق باید $\omega_j = p'_j(x_j)$ را محاسبه کنیم، کافیست ابتدا $p'_j(x)$ را محاسبه نموده و سپس با جایگذاری $x=x_j$ به $\omega_j$ دست پیدا کنیم.

پس از انجام محاسبات گام دوّم در نهایت خواهیم داشت:

$$\omega_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}$$

که دقیقاً همان رابطه(۱-۱-۱) می باشد.بدیهی است که نمایش ماتریسی آمده در(۱-۱-۱) در اینجا نیز ظاهر می شود یعنی ماتریس مشتق گیری چه در حالتی که از تقریب مبتنی بر تفاضلات محدود مرتبهٔ دو استفاده کند و چه در حالتی که از چند جمله ای درونیاب حداکثر از درجه دو بهره می گیردیکسان می باشد،اما حُسن

بکارگیری متد دوّم یعنی استفاده از مشتق چندجمله ای درونیاب در بدست آوردن ماتریس مشتق گیری در این است که براحتی با افزایش درجهٔ چند جمله ای درونیاب می توان به افزایش مرتبه دقّت ماتریس مشتقگیری دست یافت.به عنوان مثال برای بدست آوردن یک ماتریس مشتق گیری با مرتبه دقّت چهار،الگوریتم قبلی به شکل زیرتغییر پیدا می کند:

برای $j=1,\ldots,N$.

اولاً) قرار بده: $p_j$ را در چند جمله ای یکتایی با درجه حداکثر چهار به قسمی که؛

$p_j(x_{j\pm2})=u_j(x_{j\pm2})$ و $p_j(x_{j\pm1})=u_j(x_{j\pm1})$ و $p(x_j)=u_j$

ثانیاً قرار بده: $\omega_j=p'_j(x_j)$

با انجام الگوریتم فوق و با فرض مجدّد تناوبی بودن داده ها( $u_0=u_N, u_1=u_{N+1},\ldots$).

می توان حاصل الگوریتم فوق را به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \omega_N\end{pmatrix}=h^{-1}\begin{pmatrix} & \ddots & & 1/2 & -2/3\\ & \ddots & -1/12 & & 1/12\\ & \ddots & 2/3 & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \ddots & \\ & \ddots & -2/3 & \ddots & \\ -1/12 & & 1/12 & \ddots & \\ 2/3 & -1/12 & & \ddots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ u_N\end{pmatrix} \qquad (۳-۱-۱)$$

همانطور که مشاهده می کنیم در اینجا برخلاف(۲-۱-۱) که یک ماتریس دوری سه قطری است،این ماتریس مشتق گیری، دوری پنج قطری می باشد و همانطور که قبلاً نیز گفته شد این ماتریس دارای مرتبه دقّت چهار به جای مرتبه دقّت دو می باشد.

حال برای نشان دادن رفتار ماتریس مشتق گیری(۳-۱-۱)،برنامهٔ(٤-۱-۱)را از منبع[8] می آوریم که در محیط مطلب(MATLAB) اجرا شده و در آن به بررسی مقدار خطای حاصل از تقریب مشتق تابع تناوبی $u(x)=e^{\sin(x)}$ روی $[-\pi$ و $\pi]$ به ازای مقادیر مختلف N می پردازد، به بیانی دقیق این برنامه به مقایسه تقریب تفاضل متناهی $\omega_j$ موجود در (۳-۱-۱)با مقدار واقعی حاصل از: $u'(x_j)= \exp(\sin(x_j))\cos(x_j)$ به ازای مقادیر مختلف N می پردازد.

قابل ذکر است که این برنامه معرّف هیچگونه از انواع متدهای طیفی نمی باشد و صرفاً جهت معرفی کاربردی از ماتریس های مشتق گیری و بررسی صحت ادعای دارا بودن مرتبه دقّت چهار ماتریس مذکور آورده می شود.

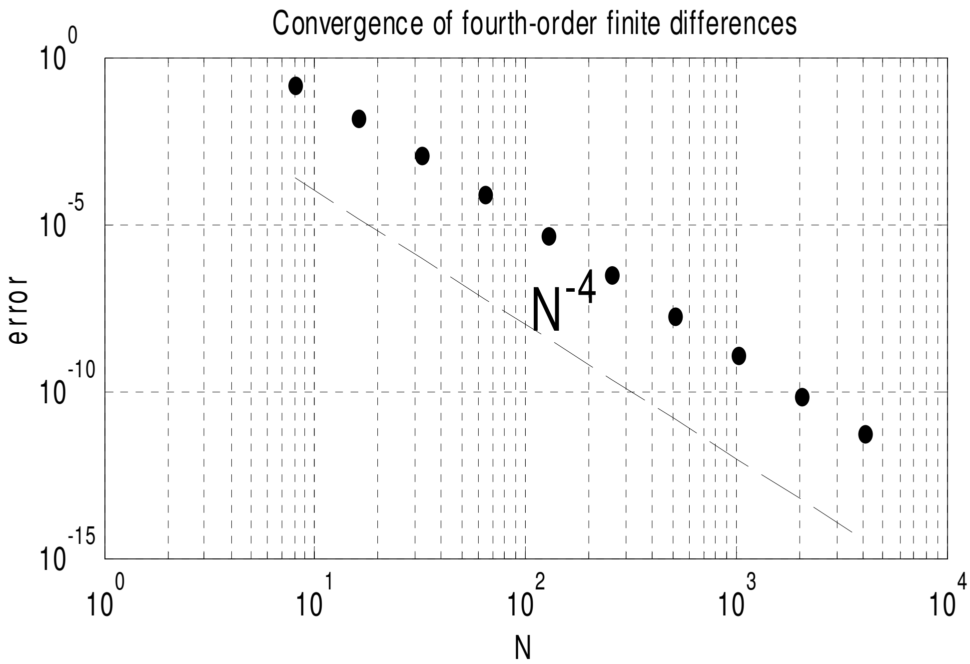
## برنامه (۴-۱-۱ )

## همگرایی تفاضلات متناهی مرتبه چهارم

```
% For various N, set up grid in [-pi,pi] and
function u(x):
  Nvec = 2.^(3:12);
  clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])
  for N = Nvec
    h = 2*pi/N; x = -pi + (1:N)'*h;
    u = exp(sin(x)); uprime = cos(x).*u;

    % Construct sparse fourth-order differentiation
matrix:
    e = ones(N,1);
    D =   sparse(1:N,[2:N 1],2*e/3,N,N)...
        - sparse(1:N,[3:N 1 2],e/12,N,N);
    D = (D-D')/h;

    % Plot max(abs(D*u-uprime)):
    error = norm(D*u-uprime,inf);
    loglog(N,error,'.','markersize',15), hold on
  end
  grid on, xlabel N, ylabel error
  title('Convergence of fourth-order finite
differences')
  semilogy(Nvec,Nvec.^(-4),'--')
  text(105,5e-8,'N^{-4}','fontsize',18)
```




**خروجی (٤–١–١):فرایند همگرایی مرتبه چهارم(٣–١–١)؛اخذمقادیربزرگ N به سبب تنک بودن ماتریسها .**

تا اینجا با ماتریس های مشتق گیری مربوط به تفاضلات متناهی مرتبه دو و چهار آشـنا شـدیم؛همانطور کـه در مورد این ماتریس ها نیز مشاهده نمودیم،بکارگیری روش های تفاضلات متناهی مرتبه شش وهشت و بـالاتر از آن منجر به پیدایش ماتریس های دوری با پهنای نوار عریض تر می گردد،در واقع ایدهٔ بهتر در روشهای طیفـی بر مبنای جلوگیری از این فرایند می باشد،زمانیکه با یک فرمول مشتق گیری از مرتبه نا متنـاهی و یـا بـا یـک ماتریس متراکم با پهنای باند نامتناهی مواجه هستیم.

در فصل بعد(۲-۱)نشان خواهیم داد که در این حد،برای یک شبکه متساوی الفاصلهٔ نامتنـاهی ممکـن اسـت بـه ماتریس نامتناهی زیر برخورد کنیم:

$$D= h^{-1}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ddots & 1/3 & \\ \ddots & -1/2 & \\ \ddots & 1 & \\ & 0 & \\ & -1 & \ddots \\ & 1/2 & \ddots \\ & 1/3 & \ddots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \qquad (۱-۱-۵)$$

ماتریس مشتق گیری فوق که چگونگی بدست آوردن آن را در فصل بعد شرح خواهیم داد یـک مـاتریس پـاد-متقارن ($D^T= -D$) ذوزنقه ای دو طرفه نامتناهی می باشد کـه بـا نـام عملگـر لورانـت(Laurent operator) شناخته می شود.به استثنای درایه های واقع بر قطر اصلی،تمامی درایه های این ماتریس ناصفر می باشند.

البته در عمل نمی توان با یک ماتریس نامتناهی کار کرد و برای یک شبکه متناهی، طراحی الگوریتم برای روش های هم مکانی به شکل زیر است:

گام ۱) $p$ را تک تابعی مستقل از $j$ قرار بده بقسمی که $p(x_j) = u_j$ برای هر $j$.

گام ۲) قرار بده: $\omega_j = p'(x_j)$ .

باید توجه کنیم که ما در انتخاب $p$ برای برازش یک مسألهٔ خاص آزاد هستیم،بطوریکه برای یک دامنهٔ تناوبی معمولاً چند جمله ای های مثلثاتی روی یک شبکه نقاط متساوی الفاصله انتخاب مناسبی می باشد،همچنین در فصل های آینده خواهیم دید که چگونه از متدهای فوریه (Fourier methods) به این منظور بهره می گیریم.همچنین برای دامنه های غیرتناوبی، چند جمله ایهای جبری روی شبکه های نامنظم(نامتساوی الفاصله) انتخاب مناسبی می باشند و متدهای چبیشف (Chebyshev methods) را به این منظور در فصول( ۵-۱) و (۶-۱) به کار خواهیم گرفت.

یک نمونه دیگر از ماتریس های مشتق گیری که در فصل (۳-۱ ) چگونگی بدست آوردن آن را توضیح خواهیم داد، ماتریس متراکم $N \times N$ زیر می باشد که برای شبکه های منظم و تناوبی استفاده می شود:

$$D_N = \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ \ddots & & \frac{1}{2}\cot\frac{3h}{2} & & \\ & \ddots & -\frac{1}{2}\cot\frac{2h}{2} & & \\ & & \frac{1}{2}\cot\frac{1h}{2} & & \\ & & 0 & & \\ & & -\frac{1}{2}\cot\frac{1h}{2} & & \\ & & \frac{1}{2}\cot\frac{2h}{2} & \ddots & \\ & & \frac{1}{2}\cot\frac{3h}{2} & & \ddots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} \qquad (۱-۱-۶)$$

اندکی تغییر در تابع کتانژانت آشکار می سازد که ماتریس **(٦-١-١)** نیز مانند ماتریس های مشتق گیری ذوزنقه ای قبلی یک ماتریس دوری می باشد.

حال قصد داریم با جایگزینی این ماتریس مشتق گیری به جای ماتریس مشتق گیری(٣-١-١) در برنامه (٤-١-١)،برنامه(٧-١-١) را روی مطلب ارائه کنیم تا نشان دهیم که با تغییر در نوع ماتریس مشتق گیری تا چه حد می توان خطا را کاهش داد.همانطور که خواهیم دید،خطا در خروجی (٧-١-١)خیلی سریع کاهش می یابد که این رفتار قابل ملاحظه به دقّت طیفی (spectral accuracy ) مشهور می باشد.

ما در فصل(٤-١)به تفصیل در این مورد بحث خواهیم کرد و در اینجا تنها به ذکر این نکته اشاره می کنیم که کاهش خطا در اثر افزایش $N$ (تعداد نقاط شبکه) در روش های طیفی بر خلاف روش های تفاضلات متناهی (finite difference ) و المانهای محدود(finite element) می باشد،بطوریکه در روش های تفاضل متناهی و المان محدود با افزایش $N$ ،خطا نوعاً معادل$O(N^{-m})$ به ازای یک ثابت $m$ کاهش می یابد در حالیکه برای یک روش طیفی،همگرایی با سرعت $O(N^{-m})$ برای هر $m$ قابل بدست آمدن است به شرطی که جواب به تعداد نا متناهی مشتق پذیر باشد . حتی می توان به همگرایی با سرعت بالاتر یعنی $O(C^N)$ ($0<c<1$ ) نیز دست پیدا نمود،البته اگر جواب به طور مناسبی تحلیلی باشد.

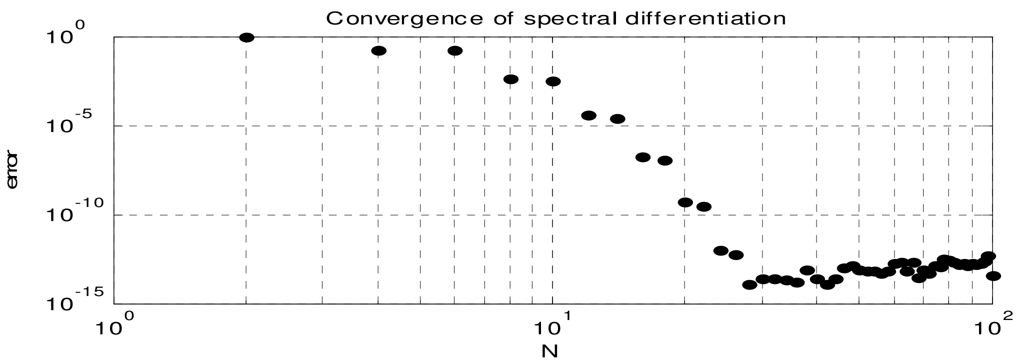
**برنامه(۱-۱-۷)**

## همگرایی روش طیفی تناوبی

```
% For various N (even), set up grid as before:
  clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])
  for N = 2:2:100;
    h = 2*pi/N;
    x = -pi + (1:N)'*h;
    u = exp(sin(x)); uprime = cos(x).*u;

    % Construct spectral differentiation matrix:
    column = [0 .5*(-1).^(1:N-1).*cot((1:N-1)*h/2)];
    D = toeplitz(column,column([1 N:-1:2]));

    % Plot max(abs(D*u-uprime)):
    error = norm(D*u-uprime,inf);
    loglog(N,error,'.','markersize',15), hold on
  end
  grid on, xlabel N, ylabel error
  title('Convergence of spectral differentiation')
```




خروجی(۷-۱-۱):دقت طیفی مربوط به متد (٦-۱-۱).