

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان:

یافتن سریع جواب در دستگاه‌های فرومعین

استاد راهنما:

دکتر علی شکری

استاد مشاور:

دکتر سهراب بزم

پژوهشگر:

محمد چراغی

مرداد ۱۳۹۲

تقدیم به

پیشگاه خداوند متعال

خدایا...

خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست، و ایمان مرا به کامل‌ترین مراتب ایمان برسان، و یقینم را فاضل‌ترین درجات یقین ساز، و نیت مرا به بهترین نیت‌ها و عملم را به بهترین اعمال ترفیع ده.

خدایا به لطف خود نیت مرا کامل و خالص ساز. و یقینم را ثابت و پا برجای دار و به قدرت خود آنچه را که از من تباہ شده اصلاح فرمای.

خداوندا بر محمد و آلش رحمت فرست و مهماتم را که باعث دل مشغولی من است، کفایت کن و مرا به کاری که فردا از آن مورد سؤال قرار می‌دهی بگمار، و روزگارم را در آنچه برای آنم آفریده‌ای مصروف دار و از غیر خود بی‌نیاز ساز و روزیت را بر من بگستر و به نگاه کردن به حسرت در مال و منال و جاه و جلال توانگرانم دچار مکن و عزیزم گردان و گرفتار کبرم مساز و بر بندگی خود رامم کن و عبادتم را به سبب خود پسندی تباہ منمای. و خیر را برای مردم به دستم روان کن. و کار نیکم را به منت نهادن باطل مگردان و اخلاق عالیه را به من مرحمت فرمای. و مرا از تفاخر و مباهات نگاهدار.

خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست، و مرا در میان مردم به درجه‌ای ترفیع مده مگر آن که به همان اندازه پیش نفس خویشم پست گردانی، و عزتی آشکارا برایم بوجود میاور مگر آن که به همان نسبت پیش نفس خویشم خوار سازی.

خدایا بر محمد و آلش رحمت، و از هدایتی پر سود و گراینده به مقصود برخوردارم ساز که روشی دیگر بجای آن نگزینم و از طریقت حقی که از آن منحرف نگردم و از نیت صوابی که در آن شک نکنم و مرا تا آن‌گاه که عمرم جامه خدمت در راه طاعت تو باشد زنده بدار پس هر زمان که بیم آن رود که مزرع عمرم چراگاه شیطان گردد پیش از آن که شدت غضبت بسوی من بشتابد یا خشم بر من مستحکم گردد، مرا بسوی خود فرا گیر. خدایا هیچ خوئی که بر من عیب شمرده شود باقی مگذار جز آن که آن را اصلاح کنی و هیچ صفت نکوهیده‌ای را بجای منه مگر آنکه آن را نکو سازی.

و هیچ خصلت کریمه ناقصی بر جای مگذار، جز آنکه آن را کامل کنی. بر محمد و آل محمد رحمت فرست و شدت کینه‌ی کینه‌توزان را در باره من به محبت، و حسد متعديان را به مودت، و بدگمانی اهل صلاح را به اعتماد، و دشمنی نزدیکان را به دوستی، و بدرفتاری خویشان را به نیکوئی و بی‌اعتنائی اقربا را به نصرت، و دوستی مجامله کاران را به دوستی حقیقی و اهانت مصاحبان را به حسن عشرت، و تلخی ترس از ستمکاران را به شیرینی امنیت مبدل ساز. خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست، و مرا بر کسی که در باره‌ام ستم کند دستی و بر آن که با من مخاصمه کند زبانی، و بر آن که عناد ورزد پیروی قرار ده. و در برابر آن که با من مکر کند مگری و بر آن که مرا مقهور خواهد قدرتی، و بر آن که مرا عیب کند

و دشنام گوید تکذیبی، و از کسی که مرا تهدید کند سلامتی بخش و به اطاعت کسی که مرا به راه صواب آرد و پیروی کسی که مرا ارشاد کند، موفق دار. خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست، و مرا توفیق ده تا با آن کس که با من غش و دغلی کند به نصیحت و اخلاص مقابله کنم، و آنرا که از من دوری گزیند به نیکوئی پاداش دهم. و به آن که مرا محروم سازد به بخشش عوض دهم، و آن را که از من ببرد با پیوستن مکافات کنم، و با کسی که از من غیبت کند، بوسیله ذکر خیرش مخالفت نمایم. و در برابر نیکی سپاسگزاری نمایم. و از بدی چشم بپوشم.

خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست، و مرا به زیور صالحین بیارای، در گسترده داد و فرو خوردن خشم، و خاموش کردن آتش فتنه و خصومت و جمع آوری پراکنندگان و اصلاح میان مردمان و فاش کردن نیکی‌های اهل ایمان و پوشاندن عیب ایشان و نرم خوئی و فروتنی و خوش رفتاری و سنگینی و وقار و حسن معاشرت و سبقت جستن به فضیلت و برگزیدن انعام و تفضل و فرو گذاشتن سرزنش و خرده گیری و ترک احسان درباره نااهل و گفتن حق هر چند دشوار آید و اندک شمردن خیر در گفتار و کردارم گر چه بسیار باشد و بسیار دیدن شر در گفتار و کردار خویش گر چه اندک باشد مرا در همگی این صفات به خلعت زیبای پرهیزگاران بپوش.

و این صفات را وسیله ادامه اطاعت و التزام جماعت و فرو گذاشتن اهل بدعت، و بکار برنده رأی خودت در آور و کامل ساز. خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست، و وسیع‌ترین روزی‌هایت را بر من در هنگام پیر شدنم و قوی‌ترین نیروهایت را در من به هنگام خستگیم قرار ده و مرا به کاهلی در عبادت، و کوری در تشخیص طریقت و ارتکاب خلاف دوستیت، و پیوستن با کسی که از تو جدا شود و جدا شدن از کسی که با تو پیوندد مبتلا مساز. خدایا مرا چنان کن که هنگام ضرورت با سلاح یاری تو حمله‌ور شوم و هنگام حاجت از تو مسئلت کنم و هنگام مسکنت پیش تو به تضرع و زاری آیم و مرا چون بیچاره شوم به کمک خواستن از غیر خودت و چون فقیر شوم به فروتنی برای مسئلت از غیر خود، و چون بترسم، به تضرع پیش غیر خود گرفتار مکن که به آن سبب سزاوار خواری و منع و بی‌اعتنائی تو گردم. ای مهربانترین مهربانان.

خدایا آنچه را از آرزومندی و گمان گرائی و حسد ورزی که شیطان در دل من همی افکند بیاد عظمتت و تفکر در قدرتت و تدبیر بر ضد دشمنت مبدل ساز. و آن کلمه زشت یا سخن ناستوده یا دشنام عرضی یا شهادت باطل یا غیبت مؤمن غائب، یا بد گفتن به شخص حاضر و مانند این‌ها را که شیطان بر زبان من جاری کند. به سخن حمد، و مبالغه در ثنا، و سعی و دقت در تمجید، و شکر نعمت، و اعتراف به احسان و شمردن نعمت‌های خودت، بدل فرمای.

خدایا بر محمد و آلش رحمت فرست. و چنان کن که ستم‌زده نشوم و حال آن که تو بر دفاع

از من قادری، و ستم نکنم و حال آن که تو بر جلوگیری من توانائی و گمراه نشوم در صورتی که هدایت من برای تو ممکن است، و فقیر نگردم با اینکه گشایش زندگیم از جانب تو است. و سرکشی نکنم با اینکه توانگریم از ناحیه تو است.

خدایا بسوی آمرزش تو کوچ کرده‌ام. و بسوی عفو تو آهنگ نموده‌ام و به گذشت تو مشتاق شده‌ام. و به فضل تو اعتماد کرده‌ام. در صورتی که موجبات مغفرت تو نزد من نیست و چیزی که بوسیله آن سزاوار عفو تو گردم در کردار من نیست. و پس از این حکم، که من خود در باره خویش راندم جز فضل و احسان تو سرمایه امیدی ندارم. پس بر محمد و آتش رحمت فرست و بر من تفضل فرمای.

خدایا مرا به منطق هدایت گویا ساز، و به آئین تقوی ملهم نمای و به خوی و خصلتی که پاکیزه‌تر است موفقدار و به کاری که پسندیده‌تر است بگمار. خدایا مرا به بهترین راه روان ساز و چنان کن که بر آئین تو بمیرم و هم بر آن آئین زندگی از سر گیرم. خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست و مرا در مجاری اعمال و مجالی احوال از نعمت اعتدال برخوردار ساز و در اقوال و افعال از اهل صواب و سداد و از ادله هدایت و رشاد و از زمره صالحین عباد قرار ده و رستگاری در معاد و سلامت از کمینگاه عذاب را نصیب فرمای. خدایا برای خودت از نیروهای نفس من آنچه را که باعث آزادی و پیراستگیش گردد بستان و آنچه را که وسیله تأمین حوائج و اصلاح کار نفس من شود به آن باز گذار، زیرا نفس من در معرض هلاک است مگر آنکه تو آتش نگاه داری. خدایا اگر عم بسوی من لشکر انگیزد ساز و سلاح من توئی و اگر از همه جا و همه کس محروم شوم هدف امیدم توئی و اگر حوادث و شدائد بر من هجوم آورد استغاثه‌ام بتو است و هر چه از دست برود عوضش، و هر چه تباه شود اصلاحش نزد تو، و هر چه را ناپسند داری تغییرش به دست تو است. پس پیش از بلا عافیت، و پیش از طلب توانگری، و پیش از گمراه شدن هدایت را بر من انعام کن، و مرا از رنج عیب جوئی بندگان محفوظ دار، و ایمنی از عذاب روز بازپسینم ارزانی دار، و از رهبری کاملم برخوردار ساز.

خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست و بدی‌ها را به لطف خود از من بر طرف کن، و مرا به نعمت خود پروران و به کرم خود اصلاح فرمای، و به احسان خود مداوا کن. و در سایه رحمتت جای ده. و در خلعت خشنودیت بپوشان. و چون کارها بر من دشوار و درهم شود، به صواب‌ترین آن‌ها و چون کردارها مشتبه گردد به پاکیزه‌ترین و نافع‌ترین آن‌ها؛ و چون مذاهب متناقض شود و پسندیده‌ترین آن‌ها موفق ساز. خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست. و تارکم را به تاج بی‌نیازی بیارای، و مرا به حسن تدبیر در امور بگمار، و دوام هدایت ارزانی دار، و به توسعه دستگاه آشفته‌ساز، و زندگی ساده و آرام عطا فرمای، و زندگانیم را به مشقت دائم و رنج روزافزون مبدل منمای و دعایم را بسویم برمگردان، زیرا که من برای تو معارضی نمی‌شناسم و با تو مثل و ماندی نمی‌پرستم.

خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست و مرا از اسراف بازدار. و رزقم را از تلف حفظ کن، و دارائیم را بوسیله برکت دادنش افزون ساز، و مرا در انفاق از آن در امور خیر به راه صواب رهبری کن.

خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست و مرا از رنج بسیار کسب و تحصیل روزی بی‌نیاز ساز، و رزق بی‌دریغ روزی کن تا از عبادت تو به طلب رزق مشغول نگردم. و سنگینی وبال کسب روزی را بر دوش نکشم. خدایا و آنچه را که می‌طلبم به قدرت خود برآور، و از آنچه می‌ترسم مرا به جوار عزت خود پناه ده.

خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست، و آبرویم را به توانگری نگاه‌دار، و منزلتم را به تنگدستی پست مکن، که از روزی خوارانت روزی طلبم، و از اشرار خلقت خواهش عطا کنم. تا به ستایش آن که به من عطا کند، و به نکوهش آن که منع کند مبتلا گردم. در صورتی که متصدی حقیقی عطا توئی، نه ایشان. خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست و مرا تندرستی در عبادت و آسایشی در پارسائی و علمی توأم با عمل، و پارسائی مقرون با رفق و اقتصاد روزی ساز. خدایا مدت عمر مرا با عفو خود به پایان بر، و آرزویم را در امید رحمتت به تحقیق رسان. و راه‌هایم را برای رسیدن بسر منزل خشنودیت هموار ساز، و عملم را در همه احوالم نیکو گردان. خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست. و مرا در اوقات غفلت برای یادکردن خود، متنبه کن. و در روزگار مهلت در اطاعت خود به کار دار، و راهی هموار به سوی محبت خود برایم آشکار ساز، و بوسیله آن خیر دنیا و آخرت را برایم کامل فرمای. خدایا بر محمد و آتش رحمت فرست. مانند بهترین رحمتی که پیش از او بر کسی از خلق خود فرستاده‌ای، و بعد از او بر کسی خواهی فرستاد. و ما را در دنیا بهره‌ای نیکو و در آخرت نیز عطائی نیکو ببخش. و مرا به رحمت خود از عذاب دوزخ نگاه دار^۱

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

^۱دعای مکارم الاخلاق حضرت امام سجاد زین العابدین (ع)

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند سبحان را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
و با سلام و صلوات بر حضرت محمد مصطفی (ص) و خاندان پاک و مطهر ایشان.

«اللهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم»

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات استاد راهنمای گرامی، جناب آقای دکتر علی شکری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به سرانجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر سهراب بزم که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل کردند تشکر می‌کنم. از جناب آقای دکتر محمد مهدیزاده خالسرایی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند نیز بسیار سپاسگذار و ممنونم.
همچنین از دوستان بسیار عزیزم آقایان مرتضی بیات، محسن مرادی، فیاض خدادوستی، علی اصغر اسفندیاری، کمال کاوه و علی امجد نیز به‌خاطر همراهی، یاری و کمک هاشان در طی این دو سال صمیمانه تشکر می‌کنم و آرزوی عاقبت بخیری برای همه آنان را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان اسوه‌های مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را، و تشکر می‌کنم از زحمات فراوانی که برای من متحمل شدند.

محمد چراغی

مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی: چراغی

نام: محمد

عنوان پایان نامه: یافتن سریع جواب در دستگاه‌های فرومعین

استاد راهنما: دکتر علی شکری استاد مشاور: دکتر سهراب بزم

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۱۰۶

کلیدواژه‌ها: همگرایی عددی، شبه معکوس، دستگاه‌های فرومعین، جواب‌های نرم مینیمال - ۲.

چکیده

در این پایان نامه، الگوریتم‌های سریعی برای محاسبه جواب‌های نرم مینیمال - ۲ در دستگاه‌های فرومعین ارائه می‌شود. برای تعمیم این الگوریتم‌ها، از تئوری محاسبه کران‌های خطا برای حل عددی چنین مسائلی استفاده شده است. علاوه بر این، تکنیک‌هایی برای بهبود الگوریتم محاسبه کوچک‌ترین کران خطا معرفی می‌شوند. در نهایت با ارائه نتایج عددی روی چند مسئله، خواص الگوریتم‌های مورد بحث را نشان خواهیم داد.

فهرست مطالب

د	فهرست مطالب
۱	۱ مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ خواص ماتریس‌ها
۵	۲.۱ دستگاه اعداد ممیز شناور
۸	۳.۱ رتبه یک ماتریس
۱۰	۴.۱ نرم‌ها
۱۰	۱.۴.۱ نرم برداری
۱۱	۲.۴.۱ نرم ماتریسی
۱۴	۲ مسئله کمترین مربعات
۱۴	۱.۲ معرفی
۱۹	۲.۲ دستگاه‌های فرامعین
۳۰	۳.۲ دستگاه‌های فرو معین
۳۸	۴.۲ تکنیک‌های متعامد
۴۲	۵.۲ تجزیه QR
۴۲	۱.۵.۲ تبدیل هاوس هولدر
۵۶	۲.۵.۲ تبدیلات گیونز
۶۲	۳.۵.۲ روش گرام-اشمیت
۶۷	۶.۲ کمترین مربعات و تجزیه QR
۷۱	۷.۲ دستگاه‌های عمومی و شبه معکوس
۷۷	۳ الگوریتم‌هایی سریع برای یافتن نرم مینیمال - ۲ در دستگاه‌های فرومعین
۷۷	۱.۳ معرفی
۸۳	۲.۳ قضیه احاطه سازی
۹۱	۳.۳ الگوریتم پیشنهادی

۹۱	تکنیک‌هایی برای تسریع احاطه سازی	۱.۳.۳
۹۴	تکنیکی برای بهبود کران خطای کوچکتر	۲.۳.۳
۹۷			۴ نتایج عددی
۹۸	مثال ۱	۱.۴
۱۰۰	مثال ۲	۲.۴
۱۰۳	مثال ۳	۳.۴
۱۰۴	مثال ۴	۴.۴
۱۰۶	نتیجه	۵.۴
۱۰۷			مراجع
۱۰۹			واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۱۱			واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مقدمه

حل بسیاری از مسائل عملی در علوم مختلف مانند فیزیک، پزشکی، مهندسی و ... نیازمند حل دستگاه‌های معادلات خطی است و تلاش‌های زیادی برای حل دستگاه‌های خطی انجام گرفته است. در میان دستگاه‌های معادلات خطی، دستگاه‌های فرومعین از اهمیت بسزایی برخوردار است که از جمله آنها می‌توان به پردازش سیگنال‌ها، پردازش تصویر، تحلیل داده‌های ژنتیکی و خیلی موارد دیگر اشاره کرد. روش‌های عددی مختلفی برای حل جواب‌های دستگاه فرومعین وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های مختلفی دارند. در میان این روش‌ها و الگوریتم‌ها، آنهایی که پایداری بیشتر و هم‌چنین کارایی بیشتری دارند، مورد توجه خاصی قرار دارند و لذا دانشمندان ریاضی همواره در صدد آن هستند تا به روش‌هایی دست یابند که علاوه بر کارایی و پایداری، ویژگی‌های دیگری از جمله دقت بالاتر و زمان محاسبات کوتاهتر داشته باشند. این پایان‌نامه، مبتنی بر روی همین مطلب می‌باشد و الگوریتم و روش‌های ارائه شده، شامل دو ویژگی مذکور می‌باشد. در این پایان‌نامه الگوریتم‌هایی سریع برای یافتن نرم مینیمال -۲ در دستگاه‌های فرومعین پیشنهاد شده است و تکنیک‌های بیشتری برای احاطه سازی و یافتن سریع جواب و هم‌چنین بهبود کران خطا معرفی شده است. در

فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی برای حل دستگاه‌های فرومعین پرداخته‌ایم و خواص و ویژگی‌های ماتریس‌ها و اعمال مختلف بر روی آنها را بیان می‌کنیم. در فصل دوم روش‌های مختلف بدست آوردن جواهرهای دستگاه‌های فرومعین را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم قضایا و تکنیک‌های مورد نیاز برای بدست آوردن الگوریتم‌ها و همچنین الگوریتم‌ها را بیان می‌کنیم. و سرانجام در فصل چهارم نتایج عددی را برای ویژگی‌های مذکور بیان می‌کنیم.

مرجع اصلی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته، عبارت است از:

S. Miyajima, Fast enclosure for solutions in underdetermined systems,

J. Comput. App. Math. 234 (2010) 3436-3444.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیمی خواهیم پرداخت که پیش‌نیازی برای مطالب آتی خواهد بود.

مطالب این فصل از مراجع [۳] و [۶] گرفته شده است.

۱.۱ خواص ماتریس‌ها

تعریف ۱.۱.۱. تجزیه (LU) : یک تجزیه به شکل LU برای ماتریس A که در آن L ماتریس پایین‌مثلثی و U بالا‌مثلثی است. ماتریس‌های پایین‌مثلثی مقدماتی برای به‌دست آوردن یک تجزیه LU مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۲.۱.۱. تجزیه (QR) : یک تجزیه از A به شکل QR است که در آن Q متعامد و R بالا‌مثلثی می‌باشد. ماتریس‌های هاوس هولدر، ماتریس‌های گیونز و فرآیند گرام-اشمیت برای به‌دست آوردن یک تجزیه QR استفاده می‌شوند.

تعریف ۳.۱.۱. تصفیه تکراری: یک رویه برای بهبود بخشیدن یک جواب محاسبه شده از یک مسئله می باشد.

الگوریتم زیر تصفیه تکراری برای حل جواب کمترین توان های دوم است:

فرض کنید x یک جواب تقریبی برای مسئله کمترین توان های دوم باشد. آنگاه برای $k = 1, 2, \dots$ تا رخ دادن همگرایی انجام دهید:

گام ۱: $r^k = b - Ax^k$ (مانده را با دقت مضاعف محاسبه کنید)

گام ۲: c^k را به قسمی تعیین کنید که $\|Ac^k - r^k\|_2$ مینیمم باشد.

گام ۳: جواب را تصحیح کنید. $x^{k+1} = x^k + c^k$

تعریف ۴.۱.۱. جواب کمترین مربعات: یک جواب x برای دستگاه $Ax = b$ با این خاصیت که $\|Ax - b\|$ مینیمم باشد.

تعریف ۵.۱.۱. حذفی پیشرو: فرآیند حل یک دستگاه پایین مثلثی $Ly = b$ می باشد که با شروع از بالا و انجام اعمال به سمت پایین در میان عناصر بردار، یکی یکی عناصر بردار مجهول x به دست می آیند.

تعریف ۶.۱.۱. خطای گرد کردن: خطای حاصل از گرد کردن یک مقدار محاسبه شده را خطای گرد کردن گویند.

تعریف ۷.۱.۱. خطای نسبی: اگر \hat{x} تقریبی برای $x \neq 0$ باشد، آنگاه خطای نسبی برابر $\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|}$

می باشد.

تعریف ۸.۱.۱. دقت ماشین: دقت ماشین μ کوچکترین عدد ممیز شناور در یک کامپیوتر

است به طوری که $fl(1 + \mu) > 1$.

تعریف ۹.۱.۱. شعاع طیفی: شعاع طیفی ماتریس A ، برابر است با

$\max |\lambda_i| : i = 1, \dots, n$ ، که در آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A هستند.

تعریف ۱۰.۱.۱. عدد ممیز شناور: یک عدد ممیز شناور x دارای شکل $\pm \gamma \beta^e$ است. که در

آن e نما است. γ ماننسیس، β پایه دستگاه اعداد است. یک عدد ممیز شناور x توسط $fl(x)$

نمایش داده می شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. عدد وضعیت: عددی که نشان دهنده حساسیت یک مسئله است. عدد

وضعیت دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ برابر است با: $\|A^{-1}\| \|A\|$ ، $Cond(A)$ ، که

$Cond(A)$ عدد وضعیت ماتریس A نامیده می شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرآیند گرام-اشمیت: یک فرآیند برای تولید یک پایه یکا متعامد از یک

زیر فضا و با شروع از یک پایه مفروض می باشد. اگر فرآیند گرام-اشمیت بر ستونهای یک

ماتریس اعمال شود، یک تجزیه QR از ماتریس نتیجه می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. کارایی یک الگوریتم: یک الگوریتم حاوی ماتریسهای مرتبه n کاراست

اگر برای پیاده سازی به اعمال ممیز شناور بیشتر از مرتبه n^2 نیاز نداشته باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. ماتریس تنک^۱: یک ماتریس با تعداد زیادی عناصر صفر را ماتریس تنک می‌گویند.

تعریف ۱۵.۱.۱. ماتریس‌های خاص:

یک ماتریس $n \times n$ مانند $A = (a_{ij})$ می‌تواند به شکل‌های زیر باشد:

- قطری: اگر برای هر $j \neq i$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

- بالامثلثی: اگر برای هر $j < i$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

- پایین مثلثی: اگر برای هر $j > i$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

تعریف ۱۶.۱.۱. ماتریس غالب قطری (سطری): اگر به ازای هر مقدار i در ماتریس $A = (a_{ij})$ رابطه $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ را داشته باشیم، آنگاه ماتریس را قطر غالب (سطری) می‌نامیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. ماتریس متقارن (هرمیتی): ماتریس A را متقارن (هرمیتی) گوئیم هرگاه $A^T = A$ باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. ماتریس معین مثبت: اگر A متقارن (هرمیتی) و به ازای هر بردار مخالف صفر x داشته باشیم $x^T A x > 0$ ، ماتریس A را معین مثبت می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۱.۱. ماتریس همگرا: اگر $A^k \rightarrow 0$ هنگامی که $k \rightarrow \infty$.

تعریف ۲۰.۱.۱. ماتریس گیونز: هر ماتریس $J(i, j, \theta)$ یک ماتریس گیونز است اگر یک

^۱Sparse matrix

ماتریس همانی به جز در چهار عنصر $J_{jj} = c, J_{ji} = -s, J_{ij} = s, J_{ii} = c$ باشد. در اینجا $s = \sin \theta$ و $c = \cos \theta$. یک ماتریس گیونز متعامد است.

تعریف ۲۱.۱.۱. ماتریس هاوس-هولدر: یک ماتریس به شکل $I - 2 \frac{uu^T}{u^T u}$ ، که در آن u یک بردار ستونی است، یک ماتریس هاوس هولدر متقارن و متعامد است.

تعریف ۲۲.۱.۱. مسئله بد وضع: یک مسئله بد وضع است اگر یک تغییر کوچک در داده‌های ورودی موجب یک تغییر با معنا در جواب شود.

تعریف ۲۳.۱.۱. مسئله خوش وضع: یک مسئله که جواب آن در برابر اختلال‌های کوچک در داده‌های ورودی حساس نباشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. معادلات نرمال: برای دستگاه $Ax = b$ ، معادلات نرمال مجموعه‌ی همه معادلات به صورت $A^T Ax = A^T b$ می‌باشد.

۲.۱ دستگاه اعداد ممیز شناور

به علت گنجایش محدود ذخیره سازی، یک عدد حقیقی ممکن است به طور دقیق بر روی یک کامپیوتر نمایش داده شود و یا این کار ممکن نباشد. بنابراین، به هنگام استفاده از یک کامپیوتر، با تقریب‌های دستگاه اعداد حقیقی با استفاده از نمایش‌های کامپیوتری متناهی سر و کار داریم. عبارت *IEEE* استاندارد برای حساب ممیز شناور دودویی که به طور وسیعی استفاده می‌شود. یک عدد ممیز شناور نرمال شده مخالف صفر x در مبنای ۲ دارای

شکل زیر است:

$$x = \pm d_1.d_2.d_3 \dots d_t 2^e$$

یا

$$x = \pm r 2^e$$

که در آن e نما و r مانتیس نامیده می‌شوند و t دقت و $(d_1.d_2.d_3 \dots d_t)$ قسمت کسری عدد هستند. (توجه کنید که t متناهی است) و $d_1 = 1$ و $d_i = 0$ یا $d_i = 1$ به ازای $2 \leq i \leq t$ می‌باشد. سه پارامتر، همه‌ی مقادیر عددی که می‌توانند نمایش داده شوند را مشخص می‌کنند. این سه پارامتر عبارتند از دقت، t و مینیمم و ماکزیمم نماها، L و U . اعداد L و U در کامپیوتر هر تغییری می‌کنند حتی آنهایی که از استاندارد *IEEE* تبعیت می‌کنند، زیرا استاندارد فقط مینیمم را توصیه می‌کند. به عنوان مثال، استاندارد برای دقت ساده، $t = 24$ مقادیر $L = -126$ و $U = 127$ را توصیه می‌کند. و برای دقت ساده، $t = 53$ مقادیر $L = -1022$ و $U = 1023$ را توصیه می‌کند. از بحث بالا ملاحظه می‌شود که استاندارد *IEEE* برای دقت ساده تقریباً دقتی با ۷ رقم اعشار فراهم می‌سازد زیرا $10^{-7} \times 1/2 \approx 2^{-23}$.

به طور مشابه دقت مضاعف تقریباً دقتی با ۱۶ رقم اعشار فراهم می‌سازد

تعریف ۱.۲.۱. دقت مضاعف: استاندارد حساب ممیز سیار اعداد با دقت مضاعف دارای

۱۱ بیت برای نما، ۵۲ بیت برای بخش کسر و ۱ بیت برای علامت هستند، که می‌توان آنرا

به صورت $S E F$ نمایش داد.

که در آن اولین بیت برای علامت است که آنرا با S نمایش می‌دهیم، ۱۱ بیت بعدی برای نماست و آنرا با E نمایش می‌دهیم و ۵۲ بیت بعدی برای بخش کسر که آنرا با F نمایش می‌دهیم.

همچنین یک $IEEE$ استاندارد، برای اعداد ممیز شناوری که لزوماً از مبنای ۲ نیستند، وجود دارد. با انتخاب یک پایه، مثلاً β ، ملاحظه می‌شود که مجموعه‌ی همه‌ی اعداد ممیز شناور که دستگاه اعداد ممیز شناور نامیده می‌شود، توسط ۴ پارامتر: عدد پایه β ، دقت t و حدهای بالا و پایین نما L و U مشخص می‌گردد. اگر محاسبات در یک کامپیوتر یک نمای خیلی بزرگ (خیلی کوچک) تولید کنند آنگاه وضعیت سرریز (یا پاریز) بوجود می‌آید. سرریز یک مسئله‌ی جدی است، برای اغلب دستگاه‌ها نتیجه یک سرریز، $\pm\infty$ است. اما پاریز معمولاً خیلی جدی نیست. نتیجه یک پاریز ممکن است برابر قرار دادن یک مقدار با صفر، یا یک عدد نرمال نشده، یا $\pm 2^L$ باشد.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $\beta = ۱۰$ ، $t = ۳$ و $L = -۳$ و $U = ۳$ باشد، آنگاه با در نظر گرفتن

$a = ۱/۱۱ \times ۱۰^۳$ و $b = ۱/۲۰ \times ۱۰^۳$ خواهیم داشت $c = a \times b = ۱/۳۳ \times ۱۰^۶$ ، که این

حاصل ضرب یک سرریز را نتیجه می‌دهد، زیرا نمای ۶ خیلی بزرگ است.