بسم اللّه الرّ حمن الرّ حيم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه
مرکز تبریز

پایان نامه
برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)
گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :
یک الگوریتم نقطه درونی اولیه-دوگان فضای پوچ برای بهینه سازی غیرخطی با خصوصیات همگرایی خوب

محمدامین اسماعیل‌زاده خشکبار

استاد راهنما:
دکتر میرکمال میرنیا

استاد مشاور:
دکتر محمدچایچی

آذر/ ۱۳۹۰

فرم ۱۱

دانشگاه پیام نور

تاریخ: ....

شماره: ....

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای محمدامین اسماعیل زاده خشکبار** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)** به شماره دانشجویی **۸۸۰۲۷۰۰۸۷** تحت عنوان **یک الگوریتم نقطه درونی اولیه – دوگان فضای پوچ برای بهینه سازی غیرخطی با خصوصیات همگرایی خوب.** با حضور هیات داوران در روز چهارشنبه شنبه مورخ **۹۰/۰۹/۳۰** ساعت **۱۷** در محل **کلاس ۱۰۲** برگزار شد و هیات داوران پس از بررسی، پایان نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۸٫۹۹ به حروف هجده و نود و نه با درجه عالی تشخیص داد.

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/موسسه	امضاء
دکتر میرکمال میرنیا	استاد راهنما	دانشیار	دانشگاه تبریز	
دکتر محمد چایچی رقیمی	استاد مشاور	استادیار	مرکز تبریز	
دکتر جواد مهری	استاد داور	استادیار	دانشگاه تبریز	
دکتر علیرضا غفاری حدیقه	استاد داور	دانشیار	تربیت معلم آذربایجان	غفاری
دکتر محمد چایچی رقیمی	نماینده گروه علمی	استادیار	مرکز تبریز	
دکتر رحیم شعبانیان	مدیر گروه علمی استان	استادیار	مرکز تبریز	

گواهی اصالت، نشر حقوق مادی و معنوی اثر

اینجانب محمد امین اسماعیل‌زاده خشکبار **دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی‌ارشد رشته** ریاضی کاربردی **گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.**

محمد امین اسماعیل‌زاده خشکبار

تاریخ و امضاء

اینجانب محمد امین اسماعیل‌زاده خشکبار **دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی‌ارشد رشته** ریاضی کاربردی **گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.**

محمد امین اسماعیل‌زاده خشکبار

تاریخ و امضاء

آذر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

سپاس‌گزاری...

حَمد و سپاس مخصوص اوست که منشا علم و نور نیکی است.

اکنون که در سایه الطاف و عنایت بی‌کران و مراحم بیشمار خداوندی موفق به نگارش این پایان‌نامه شده‌ام برخود لازم می‌دانم از کسانی که مرا در این راه یاری نموده تشکر و قدر دانی نمایم.

از جناب آقای دکتر **میرکمال میرنیا** که در تمام مراحل این تحقیق مشوق بنده بوده و از هر گونه مساعدت و همکاری دریغ نفرموده‌اند کمال تشکر و امتنان را دارم. ایشان همچون یک مربی دلسوز علاوه بر راهنمایی بنده درس پایداری و تلاش آموختند.

از جناب آقای دکتر **محمد چایچی** که زحمت مطالعه و مشاوره ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحوه احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند کمال امتنان را دارم.

برای بنده جای بسی خرسندی است که در فرصت پیش آمده از تمام اساتید محترم که در طول دوران تحصیلاتم، افتخار شاگردیشان را داشته‌ام نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از خانواده‌ام بخصوص پدر و مادر عزیزم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم و یقینا زحماتشان برای من فراموش نشدنی است، و در نهایت برای تمامی این عزیزان، سربلندی، موفقیت و سلامتی در تمامی مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

محمدامین اسماعیل‌زاده

آذر ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه یک الگوریتم نقطه درونی اولیه-دوگان فضای پوچ برای حل مسایل بهینه سازی غیرخطی با قیدهای مساوی و نامساوی کلی ارائه میدهیم.الگوریتم بطور تقریبی یک دنباله از زیر مسأله های مانع محدود شده مساوی را بوسیله محاسبه یک گام فضای برد و یک فضای پوچ در هر تکرار حل میکند.تابع جریمه l_2 به عنوان تابع شایستگی فرض میشود. تحت هر شرایط ملایم روی گام‌های فضای برد و هسی تقریبی بدون فرض هیچ نظمی ثابت میشود که یا هر نقطه حدی، نقاطی که از تکرار بدست می‌آیند یک نقطه کاروش کان تاکر زیرمسأله مانع است و پارامتر جریمه کراندار میماند و یا یک نقطه حدی وجود دارد که یا یک نقطه ایستایی نشدنی مینیمم‌سازی l_2 نرم انحراف‌های قیدهای مسأله اصلی است و یا یک نقطه فریتزجان مسأله اصلی است.

بعلاوه خصوصیات همگرایی موضعی الگوریتم را تجزیه و تحلیل میکنیم و ثابت میکنیم که با کنترل مناسب دقت گامهای فضای برد و انتخاب پارامتر مانع و تقریب هسی،الگوریتم یک گام فوق خطی یا درجه دومی را تولید میکند.

کلمات کلیدی: همگرایی محلی و جامع، روش فضای پوچ، روشهای نقطه درونی اولیه-دوگان، بهینه‌سازی غیرخطی با قیدهای مساوی و نامساوی.

فهرست مطالب

مقدمه

روشهای نقطه درونی برای بهینه سازی بطور وسیع در سال ۱۹۶۰ ابتدا بصورت روشهای مانع بکار رفت،گرچه بطور جدی برای مسایل برنامه‌ریزی خطی بعلت سلطه روش سادک بکار برده نشد. روشهای مانع در طول سالهای ۱۹۷۰ به دلایل گوناگون از جمله بدحالت بودن هسی در نقاط نزدیک به مرز مجموعه شدنی مطلوبیت خود را از دست دادند.

در سال ۱۹۸۴ پژوهش کارماکار[1] در مورد یک روش نقطه درونی سریع با مرتبه چندجمله‌ای برای برنامه‌ریزی خطی موجب هیجان شگرفی در زمینه بهینه سازی شد و در نتیجه یک انقلاب در این زمینه بوجود آورد.

اکثر مقالات منتشر شده از سال ۱۹۸۴ روی موضوع پیچیدگی محاسباتی در روشهای نقطه درونی برای برنامه‌ریزی خطی متمرکز شدند. در همین زمان،اجراهایی از روشهای نقطه درونی کارایی عمده‌ی حل بسیاری از مسایل با ابعاد بزرگ را نشان دادند. روشهای نقطه درونی همچنین با موفقیت قابل توجهی در مسایل غیرخطی بکار برده می‌شدند. با شروع از کتاب فیاکو و مک‌کورمیک مقاله های زیادی تا کنون در این زمینه منتشر شده است. در این پایان‌نامه با یک الگوریتم نقطه درونی اولیه-دوگان فضای پوچ برای بهینه‌سازی غیرخطی با خصوصیات همگرایی خوب آشنا خواهیم شد.

برای شفافیت بیشتر، در اینجا سازماندهی مباحث موجود در فصلها و بخشهای پیش رو را بطور خلاصه معرفی میکنیم :

ابتدا در فصل یک به معرفی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز میپردازیم سپس در بخش ۲.۲ بعضی از نتایج روی گام فضای برد و گام فضای پوچ را ارایه میدهیم. بعضی از تعاریف روی زیر مسأله‌های مانع لگاریتمی برای سادگی بیان‌ها داده میشوند.شرایط روی گام فضای برد و الگوریتم

[1] Karmakar

درونی برای مسأله مانع لگاریتمی در بخش ۱.۳ ارایه میشوند. نتایج همگرایی کلی روی الگوریتم درونی در بخش ۲.۳ اثبات میشوند، در بخش ۳.۳ برای مسأله اصلی یک الگوریتم جامع را توصیف میکنیم و نتایج همگرایی کلی آن را میدهیم. بعضی از خصوصیات همگرایی موضعی در بخش ۴.۳ اثبات میشوند. در بخش ۵.۳ گام نیوتن و کشی وزن‌دار را ارایه میکنیم و سپس در بخش ۶.۳ نتیجه عددی، سرانجام در بخش ۷.۳ بعد از ارایه نتیجه گیری، این مبحث را به پایان میرسانیم.

در این پایان‌نامه ما از چنین علامت گذاری هایی استفاده خواهیم کرد، حروف کوچک بردارها و حروف بزرگ ماتریسها و حروف بزرگ با تایپ خوشنویسی مجموعه اندیسها خواهد بود. اگر مشخص نشده باشد حروف بزرگ متناظر با حروف کوچک یک ماتریس قطری با همه مولفه‌هایی از بردارها به عنوان درایه های قطری آن است. برای مثال $Y = diag(y)$ ، $U = diag(u)$. در سراسر فصل، I ماتریس همانی با اندازه مناسب ، $\mathcal{I}$ مجموعه اندیسهای محدودیتهای نامساوی، ε مجموعه اندیسهای محدودیتهای مساوی، $\|.\|$ نرم اقلیدسی است اگر مشخص نشده باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱. نرم

یک تابع $N : R^n \longrightarrow R^n$ یک نرم نامیده می‌شود اگر سه شرط زیر برقرار باشد :

الف)به ازای $x \in R^n$ ، $N(x) \geqslant ۰$ ؛ $N(x) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$

ب)به ازای تمامی $x \in R^n$ و $\alpha \in R$ ؛ $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$

ج)به ازای تمامی $x, y \in R^n$ ؛ $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

از هر نرم N روی R^n ، فاصله d_N به شرح

$d_N(x, y) = N(x-y), x, y \in R^n$

مشخص می‌شود.

در اینجا سه نرم مهم را ذکر می‌کنیم،

۱) نرم یک یا نرم $l_۱$:

$$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i| \ .$$

۲) نرم اقلیدسی یا نرم $l_۲$

$$\|x\|_۲ = \sqrt{x^T x} = (\sum_{i=۱}^{n} x_i^{۲})^{۱/۲} .$$

معمولا نرم اقلیدسی با $\|.\|_۲$ نشان داده می‌شود اما برای سادگی آنرا به صورت $\|.\|$ مینویسیم.

۳) نرم ماکزیمم یا l_∞

$$\|x\|_\infty = max_{۱\leq i\leq n}|x_i| .$$

تعریف ۱.۲. نقطه منظم

فرض کنید x^* نقطه‌ای باشد که در قیدهای $h(x^*) = ۰ , g(x^*) \leq ۰$ صدق کند و J مجموعه اندیسهایی مانند j باشد که $g_j(x^*) = ۰$. در این صورت x^* را یک نقطه منظم برای قیدهای بالا می‌نامیم اگر بردارهای گرادیان $\nabla h_i(x^*)$، $۱ \leq i \leq m$ و $\nabla g_j(x^*)$، $j \in J$ مستقل خطی باشند.

تعریف ۱.۳. مرتبه تخمین

فرض کنید f و g توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند. تساوی $f(x) = O(g(x))$ به این مفهوم است که یک عدد ثابت مثبت c وجود دارد به طوری که $f(x) \leq cg(x)$ و تساوی $f(x) = o(g(x))$ به این مفهوم است که دو عدد ثابت و مثبت $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارند به طوری که به ازای همه $x > ۰$ نامساوی $c_۱ g(x) \leq f(x) \leq c_۲ g(x)$ برقرار است.

تعریف ۱.۴. فضای پوچ

فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ ، $m \leq n$ ، باشد.فضای پوچ A بصورت

$$N(A) = \{p \in R^n : Ap = ۰\}$$

تعریف می‌شود. فضای پوچ یک ماتریس، مجموعه بردارهای عمود بر سطرهای ماتریس است. یادآوری می‌کنیم که فضای پوچ مجموعه مسیرهای شدنی(مجموعه جهت‌های فروشو) قیدهای $Ax = b$ را

نمایش میدهد. آسان است که ببینیم هر ترکیب خطی دو بردار در $N(A)$همچنان در $N(A)$ است و بنابراین فضای پوچ یک زیر فضای R^n است.

تعریف ۱.۵. فضای برد
تعریف دیگر که در این بحث مفید خواهد بود فضای برد یک ماتریس است. این مجموعه بردارهای تنیده شده ستون‌های ماتریس است. فضای برد A^T بصورت

$$R(A^T) = \{q \in R^n : q = A^T\lambda : \lambda \in R^m\}$$

است و بعد فضای برد، همان رتبه A^Tیا بطور معادل رتبه A است.
یک رابطه مهم بین $N(A)$ و $R(A^T)$ بدین صورت می‌باشد که آنها زیر فضاهای متعامد هستند. این بدین معنی است که هر بردار در یک زیر فضا، بر هر بردار در زیرفضای دیگر عمود است. برای بررسی این بیان،توجه میکنیم که هر بردار$q \in R(A^T)$ می‌تواند بصورت $q = A^T\lambda$ برای $\lambda \in R^m$ بیان شود و بنابراین برای هر بردار $p \in N(A)$ داریم

$$q^T p = \lambda^T A p = ۰ \ .$$

چون فضاهای پوچ و برد زیرفضاهای متعامد هستند که مجموع بعدهایشان برابر با n است، هر بردار x ، $n-$بعدی می‌تواند بطور منحصربفرد بصورت مجموع یک مولفه فضای پوچ و فضای برد به شکل

$$x = p + q$$

نوشته شود که $p \in N(A)$ و $q \in R(A^T)$.

مثال ۶.۱. *ماتریس رتبه-۲*

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید در این صورت فضای پوچ A ، مجموعه تمام بردارهای p است که

$$Ap = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_۱ \\ p_۲ \\ p_۳ \\ p_۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_۱ - p_۲ \\ p_۳ + p_۴ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

که در این صورت خواهیم داشت $p_۱ = p_۲$ و $p_۳ = -p_۴$. بنابراین هر بردار فضای پوچ به شکل

$$p = \begin{pmatrix} v_۱ \\ v_۱ \\ v_۲ \\ -v_۲ \end{pmatrix}$$

است که اعداد $v_۱$ و $v_۲$ دلخواه هستند و ماتریس پایه Z برای فضای پوچ از A بصورت

$$Z = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}$$

است.

تعریف ۷.۱. **برنامه ریزی درجه دوم متوالی**(SQP) [۱] برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی یک تکنیک موفق و مشهور برای حل مسایل مقید غیرخطی است. اندیشه اصلی به دست آوردن یک جهت جستجو با حل

[۱]Sequntial Quadratic Programming

یک برنامه‌ریزی درجه دوم است، یعنی یک مسأله با تابع هدف درجه دوم و قیدهای خطی. این رویکرد یک تعمیم روش نیوتن برای کمینه‌سازی نامقید است. روش های حل

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &s.t. \ \ g(x) = 0 \end{aligned}$$

می‌تواند با بکار بردن روش نیوتن متناظر با شرایط بهینگی به دست آید.
تابع لاگرانژی این مسأله به صورت

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T g(x)$$

است که از شرط بهینگی مرتبه اول داریم

$$\nabla L(x,\lambda) = 0$$

که از روش نیوتن برای حل این دستگاه داریم

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

که p_k و v_k جواب دستگاه خطی

$$\nabla^2 L(x_k,\lambda_k) \begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix} = -\nabla L(x_k,\lambda_k)$$

هستند. این دستگاه به شکل خطی

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x_k,\lambda_k) & -\nabla g(x_k) \\ -\nabla g(x_k)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x L(x_k,\lambda_k) \\ g(x_k) \end{pmatrix}$$

است. با استفاده از این دستور یکی از موفقترین دسته روش‌های بهینه‌سازی مقید شده به دست می‌آید.
این دستگاه معادلات شرایط بهینگی مرتبه اول را برای مسأله

$$\begin{aligned} &\min \ q(p) = \frac{1}{2} p^T [\nabla^2_{xx} L(x_k,\lambda_k)] p + p^T [\nabla_x L(x_k,\lambda_k)] \\ &s.t. \ \ [\nabla g(x_k)]^T p + g(x_k) = 0 \end{aligned}$$

با v_k به عنوان بردار مضارب لاگرانژ نمایش می‌دهد. این مسأله بهینه‌سازی یک برنامه‌ریزی درجه دوم است؛ یعنی کمینه‌سازی یک تابع درجه دوم نسبت به قیدهای خطی است. این تابع درجه دوم یک تابع لاگرانژی به صورت تقریبی از سری تیلور در (x_k, λ_k) است و قیدها یک تقریب خطی از $g(x_k+p) = ۰$ است.

مثال ۸.۱. *مسأله زیر را به روش (SQP) حل می‌کنیم*

$$\min \ f(x_۱, x_۲) = e^{۳x_۱} + e^{-۴x_۲}$$

$$s.t. \ \ g(x_۱, x_۲) = x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۱ = ۰$$

جواب این مسأله $x^* \simeq (-۰/۷۴۸۳۴, ۰/۶۶۳۳۲)$ *با* $\lambda^* \simeq -۰/۲۱۲۳۳$ *می‌باشد.*
با فرض اولیه $x^\circ = (-۱, ۱)^T$ *و* $\lambda^\circ = -۱$ *خواهیم داشت*

$$\nabla f(x^\circ) = \begin{pmatrix} ۳e^{۳x_۱} \\ -۴e^{-۴x_۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰/۱۴۹۳۶ \\ -۰/۰۷۳۲۶ \end{pmatrix}$$

$$\nabla^۲ f(x^\circ) = \begin{pmatrix} ۹e^{۳x_۱} & ۰ \\ ۰ & ۱۶e^{-۴x_۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰/۴۴۸۰۸ & ۰ \\ ۰ & ۰/۲۹۳۰۵ \end{pmatrix}$$

$$g(x) = x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۱ = ۰$$

$$\nabla g(x^\circ) = \begin{pmatrix} ۲x_۱^\circ \\ ۲x_۲^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

$$\nabla^{۲} g(x^{۰}) = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x L(x^{۰}) = \nabla f(x^{۰}) - \lambda \nabla g(x^{۰}) = \begin{pmatrix} -۱٫۸۵۰۶۴ \\ ۱٫۹۲۶۴ \end{pmatrix}$$

$$\nabla^{۲}_{xx} L(x^{۰}) = \nabla^{۲} f(x^{۰}) - \lambda \nabla^{۲} g(x^{۰}) = \begin{pmatrix} ۲٫۴۴۸۰۸ & ۰ \\ ۰ & ۲٫۲۹۳۰۵ \end{pmatrix}$$

برنامه‌ریزی درجه دوم عبارت است از

$$\min \ q(p) = \frac{۱}{۲} p^T [\nabla^{۲}_{xx} L] p + p^T [\nabla_x L]$$

$$s.t. \ \ [\nabla g]^T p + g = ۰$$

که برای حل خواهیم داشت

$$\begin{pmatrix} \nabla^{۲}_{xx} L & -\nabla g \\ -\nabla g^T & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x L \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ۲٫۴۴۸۰۸ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲٫۲۹۳۰۵ & -۲ \\ ۲ & -۲ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{۱} \\ p_{۲} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱٫۸۵۰۶۴ \\ -۱٫۹۲۶۷۴ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$p^{۰} = \begin{pmatrix} P^{۰}_{۱} \\ P^{۰}_{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰٫۲۲۵۷۷ \\ -۰٫۲۷۴۲۳ \end{pmatrix} \ , \ v^{۰} = (-۰٫۶۴۸۹۶)$$

و لذا

$$x^{1} = x^{0} + p^{0} = \begin{pmatrix} -0/77423 \\ 0/72577 \end{pmatrix} \;,\; \lambda^{1} = \lambda^{0} + v^{0} = (-0/35104)\,.$$

بهمین ترتیب با استفاده از x^{1} و λ^{1} مقادیر x^{2} و λ^{2} محاسبه می‌شود و با ادامه این روش x^{k} و λ^{k} به دست می‌آید.

تعریف ۹.۱. روش‌های مانع

برای تعریف روش‌های مانع ابتدا تابع σ را معرفی می‌کنیم:

مسأله برنامه‌ریزی مقید

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ \ x \in S \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید که S مجموعه نقاط شدنی می‌باشد. تابع σ را به صورت

$$\sigma = \begin{cases} 0 & if\ x \in S \\ +\infty & if\ x \notin S \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بعد از تعریف فوق اکنون به بررسی مفهوم روش‌های مانعی می‌پردازیم.

مسأله مقید غیرخطی

$$\begin{aligned} &\min\ \ f(x) \\ &s.t.\ \ g_i(x) \geqslant 0 \quad\ i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید که در آن توابع دوبار مشتق پذیر فرض می‌شوند. روشهای مانع اکیدا روش‌های شدنی هستند. یعنی نقاط تکرار در داخل ناحیه شدنی قرار دارند.

روشهای مانع، شدنی بودن را به وسیله ایجاد یک مانع حفظ می‌کنند که تکرار ها را دور از مرز ناحیه شدنی نگه میدارد. این روش ها از یک جمله مانع استفاده می‌کنند که به تابع جریمه نامتناهی σ نزدیک

می‌شود. فرض کنیم $\phi(x)$ یک تابع باشد که روی داخل مجموعه شدنی پیوسته است و وقتی به مرز مجموعه از داخل نزدیک می‌شود نامحدود می‌شود :

$$g_i(x) \longrightarrow 0_+ \quad , \quad \phi(x) \longrightarrow \infty$$

دو نمونه از چنین تابعی را در مورد این مبحث بیان می‌کنیم :

الف) تابع لگاریتمی

$$\phi(x) = -\sum_{i=1}^{m} \log(g_i(x))$$

ب) عکس تابع

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$

حال فرض می‌کنیم μ یک عدد مثبت باشد. در این صورت وقتی که μ به صفر نزدیک می‌شود$\mu\phi(x)$ به $\sigma(x)$ نزدیک خواهد شد. با اضافه کردن یک جمله مانع به شکل $\mu\phi(x)$ به تابع هدف، یک تابع مانع

$$\beta_\mu(x) = f(x) + \mu\phi(x)$$

به دست می‌آید که μ به عنوان پارامتر مانع می‌باشد. همچنین تابع معکوس

$$\beta_\mu(x) = f(x) - \mu\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$

به طور گسترده استفاده می‌شود.

روشهای مانع یک دنباله از مسایل کمینه‌سازی نامقید به شکل

$$\min_x \beta_{\mu_k}(x)$$

را برای یک دنباله $\{\mu_k\}$ از پارامترهای مانع مثبت، که به طور یکنواخت به صفر کاهش می‌یابد، حل می‌کنند.

وقتی پارامتر مانع کاهش می‌یابد، اگرچه، اثر جمله مانع کم می‌شود اما نقاط تکرار به طور تدریجی به مرز ناحیه شدنی نزدیک می‌شوند.

ممکن است به نظر برسد حل یک مسأله نامقید با استفاده از یک مقدار کوچک μ بهتر باشد اما معمولا به علت انتشار خطا بهتر است به صورت تدریجی کاهش یابد.