دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم – گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض – گرایش جبر

(نظریه گروههای متناهی)

موضوع:

هم‌خوشه‌های با اندازه ماکسیمال در گراف اول یک گروه ساده متناهی

نگارش:

سیده هدیه اشبهی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا مقدم فر

استاد مشاور:

دکتر امیر رهنمای برقی

تهران – آذر ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

مادرم

آفتابی که جرقه‌های محبت و فداکاری از وجود او بر می‌خیزد.

پدرم

اسوه صلابت و استقامت و آنکه آرامشم مدیون حضور اوست.

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: هم‌خوشه‌های با اندازه ماکسیمال در گراف اول یک گروه ساده متناهی.

استاد راهنما: دکتر علیرضا مقدم‌فر.

نام دانشجو: سیده هدیه اشبهی.

شماره دانشجویی: ۸۸۰۴۱۷۴.

اینجانب سیده هدیه اشبهی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو: سیده هدیه اشبهی.

تاریخ: ۱۳۹۰/۹/۱۳

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

با حمد و سپاس فراوان به درگاه خداوند قادر و متعال شروع می‌نمایم که افتخار تحصیل تا این مقطع علمی را به من هدیه نمود. اکنون که این پایان‌نامه به سرانجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم که از استاد ارجمند جناب آقای دکتر علیرضا مقدم فر به جهت راهنمایی‌های ارزنده ایشان در طی نگارش و تنظیم این پایان‌نامه تقدیر و تشکر نمایم. بعلاوه مراتب تشکر و قدردانی خود را از آقایان دکتر امیر رهنمای برقی استاد مشاور این پایان نامه، آقای دکتر مهدی علائیان داور خارجی (از دانشگاه علم و صنعت ایران)، و آقای دکتر حسن حقیقی داور داخلی ابراز می‌دارم. در پایان از پدر و مادر دلسوزم که هیچوقت نخواهم توانست ثناگوی حتی ذره‌ای از محبت‌های بی‌دریغ آنها باشم، از صمیم قلب تشکر و قدردانی می‌نمایم و با تقدیم این پایان نامه به ایشان امیدوارم توانسته باشم خشنودی آنها را کسب نمایم. همچنین از برادر و خواهر عزیزم که همواره کمک و همکاری خود را از من دریغ نکرده‌اند و صمیمانه مرا یاری نمودند سپاسگزاری می‌نمایم. سرانجام از خدای بزرگ برای همهٔ این بزرگواران آرزوی سلامتی و طول عمر دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه هدف اصلی ما مطالعهٔ گراف اول وابسته به یک گروه متناهی است. این گراف به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. گراف اول وابسته به گروه G گرافی است ساده که مجموعهٔ رأسهای آن را مجموعهٔ متشکل از اعداد اولی تشکیل می‌دهد که مرتبهٔ G را عاد می‌کنند و دو رأس مانند r و s توسط یک یال به هم وصل می‌شوند اگر و فقط اگر G شامل عضوی با مرتبهٔ rs باشد. بررسی های انجام شده روی این گراف نشان می‌دهند که اگر G یک گروه سادهٔ متناهی باشد، آنگاه تعداد مؤلفه‌های همبندی برای این گراف حداکثر برابر با ٦ می‌باشد، و آن مؤلفه‌های همبندی که فاقد رأس ٢ باشند در واقع خوشه‌هایی از این گراف می‌باشند. از طرف دیگر مسالهٔ یافتن هم‌خوشه‌ها (مجموعه‌های مستقل) در این گراف از جمله مسائل جالب و حائز اهمیت می‌باشد. در حقیقت نشان داده می‌شود وقتی گراف اول وابسته به گروه G دارای هم‌خوشه‌ای با حداقل سه رأس باشد، آنگاه گروه G یک گروه حلناپذیر است. در این پایان نامه خوشه‌های شامل یک رأس معین و نیز هم‌خوشه‌ها با اندازهٔ ماکسیمال و هم‌خوشه‌های با اندازهٔ ماکسیمال شامل یک رأس معین در گراف اول وابسته به یک گروه سادهٔ متناهی مشخص شده‌اند.

کلمات کلیدی: گروه سادهٔ متناهی، طیف گروه، گراف اول، عدد استقلالی، خوشه، هم‌خوشهٔ با اندازهٔ ماکسیمال.

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم گروه یکی از مهم ترین مفاهیم در ریاضیات جدید است. امروزه نظریهٔ گروهها نه به خاطر زیبایی و جذابیتش مطالعه می‌شود، بلکه بیشتر به خاطر کاربردهایی که در علوم دارد مورد مطالعه دقیق قرار می‌گیرد. از بین شاخه‌های جبر مجرد، نظریهٔ گروهها نخستین شاخه‌ای بود که توسعهٔ آن آغاز گشت، و با بسط این شاخه از جبر بود که پیشرفت جبر مجرد در دههٔ ۱۹۳۰ میلادی شروع شد. از نیمهٔ دوم این دهه، نظریهٔ گروهها به پیشرفت‌های بسیار زیادی نایل آمده، و توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها را به خود معطوف داشته است. از سال ۱۹۵۵ میلادی نتایج بسیار مهم و عمیقی در این نظریه به دست آمده است که شاخص ترین آنها رده بندی گروههای سادهٔ متناهی است که بنا بر عقیدهٔ بسیاری از صاحب نظران ریاضی بزرگترین دستاورد ریاضی سدهٔ ۲۰ به شمار می‌رود.

از طرف دیگر با پیشرفت نظریه گراف و نفوذ آن در سایر شاخه‌های ریاضیات، مشاهده می‌شود بسیاری از نتایج در یک شاخهٔ معین از ریاضیات با وابسته کردن یک گراف به یک ساختار ریاضی در آن شاخه حاصل می‌شود. تجزیه و تحلیل یک گراف معین (وابسته به یک ساختار ریاضی) و استفاده از نتایج عمیق نظریه گراف این امکان را ایجاد می‌کند که به مطالعهٔ بهتر آن ساختار ریاضی بپردازیم. نظریه گروههای متناهی نیز به عنوان یک شاخه از ریاضیات با استفاده از این رهیافت پیشرفت‌های چشمگیری داشته است. در حقیقت به یک گروه متناهی گرافهای زیادی وابسته می‌شوند، از جمله این گرافها می‌توان به گراف مقسوم‌علیه دوبخشی [۱]، گراف کیلی [۲]، گراف ناجابجایی [۳] و گراف اول [۴] اشاره نمود (به [۲]، [۲۱]، [۲۲]، [۲۹] و مراجعه کنید).

---

[۱] Bipartite divisor graph

[۲] Caley graph

[۳] Non-commuting graph

[۴] Prime graph

یکی از گرافهای معروف که به یک گروه متناهی وابسته می‌شود موسوم است به گراف اول یا گراف گروئنبرگ–کیگل[۱] (به افتخار گروئنبرگ و کیگل که اولین بار این گراف را مورد مطالعه قرار دادند) که به شکل زیر تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت گراف اول وابسته به گروه G، که با نماد $\mathrm{GK}(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که رأسهای آن اعداد اول شمارندهٔ مرتبهٔ G می‌باشند و دو رأس مانند r و s توسط یک یال به هم وصل می‌شوند اگر و فقط اگر G شامل عضوی با مرتبهٔ rs باشد. از جمله کارهای اساسی و در عین حال بسیار جالب گروئنبرگ و کیگل رده‌بندی گروههای متناهی بود که گراف اول وابسته به آن‌ها ناهمبند است ([۲۹] را ببینید). کمی بعد تر یکی از شاگردان گروئنبرگ به نام ویلیامز[۲] موفق شد با استفاده از قضیهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی، مؤلفه‌های همبندی گرافهای اول وابسته به گروههای سادهٔ متناهی را مشخص کند ([۲۹] را ببینید). در بررسی‌های به عمل آمده توسط ویلیامز گروههای سادهٔ نوع لی که روی میدانهای با مشخصهٔ ۲ تعریف می‌شوند، کنار گذاشته شدند، معهذا کُندراتف[۳] در یکی از مقالاتش ([۱۷])، مؤلفه‌های همبندی گرافهای اول وابسته به این نوع از گروههای ساده را نیز مشخص نمود و به این ترتیب کار را تمام کرد. ویلیامز و کُندراتف هر دو برای به دست آوردن نتایج خود از قضیهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی استفاده کردند، به هر حال چند سال پیش سوزوکی[۴]، در آخرین مقاله‌اش، نتایج مشابهی را بدون استفاده از این قضیه به دست آورد ([۲۴] را ببینید). به هر حال نتایج به دست آمده مبین این نکته بودند که تعداد مؤلفه‌های همبندی برای گرافهای اول وابسته به یک گروه متناهی (نه لزوماً ساده) حداکثر برابر است با ۶ و بعلاوه گروه سادهٔ یانکو[۵] تنها گروه متناهی است که گراف اول آن ۶ مؤلفهٔ همبندی دارد. (به [۳۰] مراجعه کنید.) برای گروه مفروض G تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف اول $\mathrm{GK}(G)$ را بانماد $s(G)$ نشان می‌دهیم.

یک نتیجهٔ معروف در نظریه گروهها منسوب به فایت و تامسون[۶] چنین بیان می‌کند که گروههای از مرتبهٔ فرد گروههایی حلپذیرند و از این رو به دلیل داشتن زیرگروه نرمال مینیمال، این گروهها ساده نخواهند بود. لذا یک نتیجهٔ فوری از حکم اخیر این است که مرتبهٔ گروههای سادهٔ ناآبلی بایستی

K. W. Gruenberg, O. H. Kegel[۱]

J. S. Williams[۲]

A. I. Konderatev[۳]

M. Suzuki[۴]

Z. Janko[۵]

W. Feit, J. G. Thompson[۶]

عددی زوج باشد. از این رو هنگامی که گراف اول وابسته به یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، عدد ۲ همواره به عنوان یک رأس این گراف حضور خواهد داشت. بنابراین چنانچه مؤلفهٔ همبندی گراف اول وابسته به گروه G را با نماد $\pi_i(G) = \pi_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, s(G)$، نشان دهیم، آنگاه همواره فرض را بر این خواهیم گذاشت که $\pi_۱$ مؤلفهٔ همبندی شامل رأس ۲ باشد.

یکی از نتایج به دست آمده در مورد گرافهای اول وابسته به گروههای سادهٔ متناهی ناآبلی بیان می‌کند که کلیه مؤلفه‌های همبندی فاقد رأس ۲ در حقیقت تشکیل یک خوشه می‌دهند، بدین معنی که بین هر دو رأس در آن مؤلفهٔ همبندی یک یال وجود دارد.

در حالت کلی در نظریه گراف یک خوشه به زیرمجموعه‌ای از رأسها گفته می‌شود که هر دو رأس درآن توسط یک یال گراف به هم وصل باشند. در نقطهٔ مقابل این تعریف یک هم‌خوشه (یا یک مجموعهٔ مستقل) قرار دارد، که در حقیقت به زیرمجموعه‌ای از رأسها گفته می‌شود به طوری که هر دو رأس در آن نامجاور باشند. بخصوص خوشه‌ها و هم‌خوشه‌های با اندازهٔ ماکسیمال در یک گراف از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. تعداد اعضای یک خوشهٔ با اندازهٔ ماکسیمال را عدد خوشه‌ای و تعداد اعضای یک هم‌خوشهٔ با اندازهٔ ماکسیمال را عدد استقلالی می‌نامیم. برای گراف مفروض Γ، عدد خوشه‌ای و عدد استقلالی را به ترتیب با نمادهای $\rho(\Gamma)$ و $t(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

در این پایان نامه گراف اول گروههای سادهٔ متناهی ناآبلی را برای یافتن خوشه‌ها و هم‌خوشه‌های با اندازهٔ ماکسیمال مورد بررسی قرار داده‌ایم. نتایج به دست آمده در جدولهایی در انتهای پایان نامه فهرست شده‌اند. مقاله‌های اصلی در تنظیم این پایان نامه در واقع مراجع [۲۷] و [۲۸] می‌باشند.

این پایان نامه به صورت زیر مدون شده است. در فصل اول تعاریف و نمادهای مورد نیاز برای گروهها و گرافها ارائه شده‌اند. در فصل دوم به قضایا و نتایج مقدماتی اشاره شده است که در فصل‌های بعدی مورد نیاز بوده‌اند. بالاخره در فصل سوم نتایج اصلی بیان و اثبات شده است و در فصل چهارم که آخرین فصل این پایان نامه را تشکیل می‌دهد نتایج به دست آمده در جدولهایی فهرست شده‌اند. گاهی اوقات به جهت کم حجم شدن پایان نامه از ارائهٔ اثبات صرف نظر شده‌است و تنها به ارجاع دادن مطلب بسنده کرده‌ایم. همچنین بسیاری از تعاریف بدون قید شماره و به صورت متوالی آورده شده‌اند، و این به خاطر پرهیز از شماره‌گذاری زیاد بوده است.

فصل ۱

تعاریف و نمادگذاری

در سراسر این پایان‌نامه فرض را بر این می‌گذاریم که G یک گروه متناهی باشد. معمولاً به یک ساختار جبری متناهی بعضی از پارامترهای عددی وابسته می‌شود. برای مثال مرتبهٔ یک گروه متناهی به عنوان یک ساختار جبری یا مرتبهٔ زیرگروههای آن از جمله پارامترهای عددی هستند که به آن گروه وابسته می‌شوند. گاهی اوقات یک ساختار جبری می‌تواند توسط پارامترهای عددی وابسته به آن شناسایی شود، بدین معنی که آن ساختار جبری تنها ساختار جبری با آن پارامترها است. برای نمونه گروههای متناهی با مرتبهٔ عدد اول p توسط مرتبه خود شناسایی می‌شوند، یعنی در حد یکریختی تنها یک گروه متناهی از مرتبهٔ p وجود دارد که آن هم عبارت است از $\mathbb{Z}_p$. بعضی از پارامترهای عددی وابسته به گروه متناهی G عبارتند از:

- $|G|$: مرتبهٔ گروه متناهی G،
- $o(g)$: مرتبهٔ عضو g از G،
- $|H|$: مرتبهٔ زیرگروه H از G،
- $|G:H|$: شاخص زیرگروه H از G،
- $n_p(G)$: تعداد $p-$زیرگروه سیلوهای G، که در آن p یک عدد اول است.

۱.۱ گروههای ساده متناهی

مفهوم یک گروه ساده توسط گالوا حدود ۱۶۰ سال پیش معرفی شد. در حقیقت یک گروه را ساده گوییم، هرگاه دارای هیچ زیرگروه نرمال غیر بدیهی نباشد. واضح است گروههای آبلی ساده عبارتند از گروههای دوری $\mathbb{Z}_1$ و $\mathbb{Z}_p$ که در آن p یک عدد اول است. به هر حال توصیف گروههای سادهٔ غیرآبلی متناهی به سادگی توصیف گروههای سادهٔ آبلی نیست. فی‌الواقع رده‌بندی این نوع گروهها، در سال ۱۹۸۱ میلادی به پایان رسید. این رده‌بندی تحت عنوان یک قضیه موسوم به قضیهٔ رده‌بندی یکی از بزرگترین دستاوردهای جبر به شمار می‌آید و حاصل تلاش بیش از ۱۰۰ جبردان بین سالهای ۱۹۵۰ و ۱۹۸۰ میلادی است. با توجه به این که گروههای سادهٔ متناهی غیرآبلی به نوعی عناصر سازندهٔ گروههای متناهی به شمار می‌آیند، طبیعی است که تعداد این گروهها نباید فراوان باشد. به عنوان مثال، تنها گروههای سادهٔ غیر آبلی که مرتبهٔ آن ها از ۳۰۰ تجاوز نکند عبارتند از گروه متناوب A_5 و گروه سادهٔ تصویری $L_2(7)$، (به [۷] و [۲۵] مراجعه کنید.) لازم به ذکر است که مسألهٔ رده‌بندی برای مرتبه‌های بالاتر متضمن اطلاعات پیشرفته‌ای در نظریهٔ گروههای متناهی است.

حال قضیهٔ رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی را ذکر می‌کنیم. این رده‌بندی در اثبات بسیاری از قضایا در مورد گروههای متناهی به شکل قدرتمندی ظاهر می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱ یک گروه سادهٔ متناهی بایستی در یکی از رده‌های زیر قرار داشته باشد:

- گروههای سادهٔ آبلی: گروههای دوری از مرتبهٔ عدد اول p که با نماد $\mathbb{Z}_p$ نشان داده می‌شوند.
- گروههای سادهٔ غیر آبلی:

(۱) گروههای متناوب A_n که در آن $n \geq 5$.

(۲) یکی از گروههای واقع در ۱۶ رده نامتناهی از گروههای سادهٔ نوع لی:

$$PSL_n(q),\ PSU_n(q),\ D_n(q),\ B_n(q),\ C_n(q),\ G_2(q),\ F_4(q),\ E_6(q),$$

$$E_7(q),\ E_8(q),\ {}^2B_2(q),\ {}^2D_n(q),\ {}^3D_4(q),\ {}^2G_2(q),\ {}^2F_4(q),\ {}^2E_6(q).$$

(۳) یکی از ۲۶ گروه سادهٔ پراکنده:

$$M_{11},\ M_{12},\ M_{22},\ M_{23},\ M_{24},\ J_1,\ J_2,\ J_3,\ J_4,\ HS,\ M^cL,\ Suz,\ Ly,$$

$$Fi_{22},\ Fi_{23},\ Fi'_{24},\ F_5,\ F_3,\ F_2,\ F_1,\ O'N,\ Co_1,\ Co_2,\ Co_3,\ Ru,\ He.$$

مرتبه و اسامی گروههای سادهٔ پراکنده در جدول زیر فهرست شده‌اند.

جدول ۱.۱ مرتبهٔ گروههای سادهٔ پراکنده[۱]

گروه	نام	سایر نمادها	مرتبه گروه
$M_{۱۱}$	Mathieu		$۲^{۴} \times ۳^{۲} \times ۵ \times ۱۱$
$M_{۱۲}$	Mathieu		$۲^{۶} \times ۳^{۳} \times ۵ \times ۱۱$
$M_{۲۲}$	Mathieu		$۲^{۷} \times ۳^{۲} \times ۵ \times ۷ \times ۱۱$
$M_{۲۳}$	Mathieu		$۲^{۷} \times ۳^{۲} \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۲۳$
$M_{۲۴}$	Mathieu		$۲^{۱۰} \times ۳^{۳} \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۲۳$
$J_{۱}$	Janko		$۲^{۳} \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۹$
$J_{۲}$	Janko	HJ	$۲^{۷} \times ۳^{۳} \times ۵^{۲} \times ۷$
$J_{۳}$	Janko	HJM	$۲^{۷} \times ۳^{۵} \times ۵ \times ۱۷ \times ۱۹$
$J_{۴}$	Janko		$۲^{۲۱} \times ۳^{۳} \times ۵ \times ۷ \times ۱۱^{۳} \times ۲۳ \times ۲۹ \times ۳۱$ $\times ۳۷ \times ۴۳$
HS	Higman-Sims		$۲^{۹} \times ۳^{۲} \times ۵^{۳} \times ۷ \times ۱۱$
He	Held	$HHM = F_{۶}$	$۲^{۱۰} \times ۳^{۳} \times ۵^{۲} \times ۷^{۳} \times ۱۷$
$M^{c}L$	Mclaughlin	Mc	$۲^{۷} \times ۳^{۶} \times ۵^{۳} \times ۷ \times ۱۱$
Suz	Suzuki		$۲^{۱۳} \times ۳^{۷} \times ۵^{۲} \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$
Ly	Lyons	LyS	$۲^{۸} \times ۳^{۷} \times ۵^{۶} \times ۷ \times ۱۱ \times ۳۱ \times ۳۷ \times ۶۷$
Ru	Rudvalis		$۲^{۱۴} \times ۳^{۳} \times ۵^{۳} \times ۷ \times ۱۳ \times ۲۹$
$O'N$	O'Nan	$O'S$	$۲^{۹} \times ۳^{۴} \times ۵ \times ۷^{۳} \times ۱۱ \times ۱۹ \times ۳۱$
$Co_{۱}$	Conway		$۲^{۲۱} \times ۳^{۹} \times ۵^{۴} \times ۷^{۲} \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۲۳$
$Co_{۲}$	Conway		$۲^{۱۸} \times ۳^{۶} \times ۵^{۳} \times ۷ \times ۱۱ \times ۲۳$
$Co_{۳}$	Conway		$۲^{۱۰} \times ۳^{۷} \times ۵^{۳} \times ۷ \times ۱۱ \times ۲۳$
$Fi_{۲۲}$	Fischer	$M(۲۲)$	$۲^{۱۷} \times ۳^{۹} \times ۵^{۲} \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$
$Fi_{۲۳}$	Fischer	$M(۲۳)$	$۲^{۱۸} \times ۳^{۱۳} \times ۵^{۲} \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۷ \times ۲۳$
$Fi'_{۲۴}$	Fischer	$M_{۳+}, M(۲۴)'$	$۲^{۲۱} \times ۳^{۱۶} \times ۵^{۲} \times ۷^{۳} \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۷ \times ۲۳ \times ۲۹$
HN	Harada-Norton	$F_{۵}$	$۲^{۱۴} \times ۳^{۶} \times ۵^{۶} \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۹$
Th	Thompson	$F_{۳}$	$۲^{۱۵} \times ۳^{۱۰} \times ۵^{۳} \times ۷^{۲} \times ۱۳ \times ۱۹ \times ۳۱$
BM	Baby Monster	$F_{۲} = B$	$۲^{۴۱} \times ۳^{۱۳} \times ۵^{۶} \times ۷^{۲} \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۷ \times ۱۹ \times ۲۳$ $\times ۳۱ \times ۴۷$
M	Monster	$F_{۱}$	$۲^{۴۶} \times ۳^{۲۰} \times ۵^{۹} \times ۷^{۶} \times ۱۱^{۲} \times ۱۳^{۳} \times ۱۷ \times ۱۹$ $\times ۲۳ \times ۲۹ \times ۳۱ \times ۴۱ \times ۴۷ \times ۵۹ \times ۷۱$

[۱] Sporadic

جدول ۲.۱ مرتبهٔ گروههای سادهٔ متناوب و نوع لی.

گروه	سایر نمادها	مرتبهٔ گروه
$A_n, n \geq 5$	Alt_n	$\frac{1}{2}n!$
$A_n(q),\ n \geq 1^{(*)}$	$PSL_{n+1}(q) = L_{n+1}(q)$ $= L^+_{n+1}(q) = A^+_n(q)$	$\frac{1}{(n+1,q-1)} q^{\binom{n+1}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - 1)$
${}^2A_n(q), n \geq 2\ ^{(*)}$	$PSU_{n+1}(q) = U_{n+1}(q)$ $= L^-_{n+1}(q) = A^-_n(q)$	$\frac{1}{(n+1,q+1)} q^{\binom{n+1}{2}} \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - (-1)^i)$
$B_n(q),\ n \geq 2^{(\star)}$	$P\Omega_{2n+1}(q) = \Omega_{2n+1}(q)$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$
${}^2B_2(q)^{(*),(\dagger)}$	$Sz(q) = {}^2B_2(\sqrt{q})$	$q^2(q-1)(q^2+1)$
$C_n(q),\ n \geq 2^{(\star)}$	$PSp_{2n}(q)$	$\frac{1}{(2,q-1)} q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)$
$D_n(q), n \geq 3$	$P\Omega^+_{2n}(q) = D^+_n(q)$	$\frac{1}{(4,q^n-1)} q^{n(n-1)}(q^n - 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$
${}^2D_n(q), n \geq 2$	$P\Omega^-_{2n}(q) = D^-_n(q)$	$\frac{1}{(4,q^n+1)} q^{n(n-1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$
${}^3D_4(q)$		$q^{12}(q^2-1)(q^8+q^4+1)(q^6-1)$
$G_2(q)^{(\star)}$		$q^6(q^2-1)(q^6-1)$
${}^2G_2(q)^{(\star),(\ddagger)}$	$R(q) = {}^2G_2(\sqrt{q})$	$q^3(q-1)(q^3+1)$
$F_4(q)$		$q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1)$
${}^2F_4(q)\ \ ^{(\star),(\dagger)}$	${}^2F_4(\sqrt{q})$	$q^{12}(q-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^6+1)$
$E_6(q)$	$E^+_6(q)$	$\frac{1}{(3,q-1)} q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)$ $(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1)$
${}^2E_6(q)$	$E^-_6(q)$	$\frac{1}{(3,q+1)} q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)$ $(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1)$
$E_7(q)$		$\frac{1}{(2,q-1)} q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)$ $(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)$
$E_8(q)$		$q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)$ $(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1)$

$(*)$ گروههای $A_1(2)$، $A_1(3)$، ${}^2A_2(2)$ و ${}^2B_2(2)$ حلپذیرند.

$(\star)$ برای گروههای $G = B_2(2) = C_2(2)$، $G = G_2(2)$، $G = {}^2G_2(3)$ و $G = {}^2F_4(2)$، گروه جابجاگر $G' = [G, G]$ گروهی ساده است و شاخص آن در G به ترتیب برابر است با ۲, ۲, ۳ و ۲.

$(\dagger)$ در این حالت فقط $q = 2^{2n+1}$.

$(\ddagger)$ در این حالت فقط $q = 3^{2n+1}$.

۲.۱ نگاهی کوتاه به گروههای خطی عام و خاص

دراین بخش به معرفی گروههای خطی عام و خاص و گروههای تصویری متناظر با آن ها می‌پردازیم. فرض کنیم n عددی طبیعی و p عددی اول باشد. قرار می‌دهیم $q = p^n$. در این صورت تنها یک میدان q عضوی وجود دارد که آن را میدان گالوای q عضوی نامیده و آن را با نماد $\mathrm{GF}(q)$ (یا گاهی اوقات با $\mathbb{F}_q$) نشان می‌دهیم. (به [۳۴] و [۲۳] مراجعه کنید.) فرض می‌کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان متناهی و n عدد صحیح مثبتی دلخواه باشد. در این صورت مجموعهٔ تمام ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ با درایه‌هایی در $\mathbb{F}$ نسبت به ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را گروه خطی عام از درجهٔ n روی $\mathbb{F}$ می‌نامند و آن را با نماد $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ نشان می‌دهند. هنگامی که $\mathbb{F}$ میدان گالوای q عضوی است، مجموعهٔ تمام ماتریس‌های وارون پذیر $n \times n$ با درایه‌های از میدان $\mathbb{F}$ را با نماد $\mathrm{GL}_n(q)$ نشان می‌دهیم. یک گروه خطی عام تصویری را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}) := \frac{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}{Z(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))}.$$

همچنین $S = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ را گروه همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در $\mathbb{F}$ و دترمینان ۱ در نظر می‌گیریم. در این صورت می‌توان نشان داد که $Z(S)$، متشکل از همهٔ ماتریس‌های اسکالر در S است. (به [۳۴] مراجعه کنید.) گروه خارج قسمتی $S/Z(S)$ را گروه خطی خاص تصویری درجهٔ n روی $\mathbb{F}$ می‌نامند و با نماد $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F})$ نشان می‌دهند. می‌توان ثابت نمود که گروه خطی خاص تصویری $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F})$ یک گروه نا آبلی ساده است، مگر وقتی $n = ۲$ و $\mathbb{F}$ یا یک میدان ۲ عضوی یا یک میدان ۳ عضوی باشد. خاطر نشان می‌کنیم گروه خطی خاص تصویری درجهٔ n روی میدان گالوای q عضوی را با نماد $\mathrm{PSL}_n(q)$ یا $L_n(q)$ نیز نشان می‌دهیم.

۳.۱ مقدماتی پیرامون گرافها

در بخش‌های بعدی به یک گروه متناهی گرافی موسوم به گراف اول وابسته خواهیم کرد. لذا در این بخش نخست یک سری تعاریف و نتایج مقدماتی در ارتباط با گراف‌ها را در حالت کلی مطرح نموده و سپس به تعریف گراف اول می‌پردازیم.

گراف Γ زوج مرتبی است مانند $\Gamma = (V, E)$، که $V \neq \emptyset$ متشکل از مجموعهٔ رأسهای Γ و E

مجموعهٔ متشکل از یال‌های Γ است. (به [۳۷] مراجعه کنید.) در حالتی که $|V| < \infty$ گراف Γ را یک گراف متناهی می‌نامیم. گراف Γ را یک گراف تهی می‌نامیم، چنانچه $E = \emptyset$. یالی را که ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشند، طوقه می‌نامند. بعلاوه چنانچه بین دو رأس بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال‌ها را یال‌های چندگانه می‌نامند. گرافی را که فاقد طوقه و یال چندگانه باشد، گراف ساده می‌نامند.

درجهٔ یک رأس در گراف Γ عبارتست از تعداد یال‌های گذرنده بر آن رأس و معمولاً درجهٔ رأس v در گراف Γ را با یکی از نمادهای $\deg_\Gamma(v)$ یا $d_\Gamma(v)$ نشان می‌دهند. در حالتی که گراف Γ مشخص باشد آنگاه درجهٔ رأس v را به طور مختصر به صورت $\deg(v)$ یا $d(v)$ نشان می‌دهیم.

دو رأس را همبند می‌گوییم اگر بین آن دو رأس مسیری در گراف Γ موجود باشد. همبندی، یک رابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ رأسهای V است. بنابراین افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, \ldots, V_m$ وجود دارد به طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند.

اکنون خوشه را تعریف می‌کنیم:

در یک گراف زیرمجموعه‌ای از رأسها را یک خوشه می‌نامیم، چنانچه هر دو رأس آن زیرمجموعه توسط یالی از $\Gamma(G)$ به هم وصل باشد.

• چنانچه نتوانیم خوشه‌ای را با اضافه کردن یک رأس گراف که با سایر رأسها مجاور باشد توسیع دهیم، آن خوشه را یک خوشهٔ ماکسیمال آن گراف می‌نامیم.

• خوشهٔ ماکسیمم خوشه‌ای است که بزرگترین اندازه ممکن را در گراف داشته باشد.

پیش از آن که به تعریف گراف اول بپردازیم، طیف گروه G را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ مجموعهٔ متشکل از مرتبهٔ تمام اعضای گروه G را با نماد $\omega(G)$ نشان می‌دهیم، به عبارت معادل خواهیم داشت:

$$\omega(G) = \{o(g) \mid g \in G\},$$

و آن را طیف گروه G می‌نامیم.

• چون مرتبهٔ هر عضو یک گروه مرتبهٔ آن گروه را عاد می‌کند، بنابراین طیف یک گروه همواره یک مجموعهٔ متناهی است.

• بدیهی است که این مجموعه زیرمجموعه‌ای است از اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و تحت رابطهٔ بخش پذیری بسته است، بدین معنی که اگر $n \in \omega(G)$ و $m|n$، آنگاه $m \in \omega(G)$. توجه داشته باشید که این مجموعه تحت رابطهٔ بخش پذیری تشکیل یک مجموعهٔ جزئاً مرتب می‌دهد، یعنی دارای سه خاصیت انعکاسی، پادتقارنی و متعددی است. مجموعهٔ عناصر ماکسیمال $\omega(G)$ تحت رابطهٔ بخش پذیری را با نماد $\mu(G)$ نشان می‌دهیم. واضح است که می‌توان $\omega(G)$ را به طور منحصر به فرد توسط عناصر ماکسیمالش تحت رابطهٔ بخش پذیری معین نمود.

۴.۱ گراف اول وابسته به یک گروه متناهی

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد. آن گونه که مرسوم است مجموعهٔ متشکل از شمارنده‌های اول مرتبهٔ گروه G را با نماد $\pi(G)$ نشان می‌دهیم. اکنون به تعریف یک گراف ساده می‌پردازیم که به یک گروه متناهی وابسته می‌شود و در نظریه گروهها از اهمیت بالایی برخوردار است. فی‌الواقع گراف اول وابسته به گروه G که با نماد $\mathrm{GK}(G)$ (به افتخار پروفسور گروئنبرگ و کیگل[۱] که اولین بار این گراف را به طور جدی مورد مطالعه قرار دادند) نشان می‌دهیم عبارت است از گرافی ساده با مجموعهٔ رأسهای $V(\mathrm{GK}(G)) = \pi(G)$ و مجموعه یال‌های

$$E(\mathrm{GK}(G)) = \{\{r, s\} \mid r, s \in \pi(G), rs \in \omega(G)\}.$$

گاهی اوقات مرتبهٔ گروه متناهی G را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$|G| = m_۱ \cdot m_۲ \cdot \ldots \cdot m_{t(G)},$$

به طوری که $\pi(m_i) = \pi_i$. در چنین وضعیتی m_i را مرتبهٔ i امین مولفهٔ همبند گراف اول $\mathrm{GK}(G)$ می‌نامیم و آن را با نماد $m_i(G)$ نشان می‌دهیم.

در ادامه به منظور آشنایی بیشتر با مفاهیم بالا به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

[۱] Gruenberg-Kegel

- نخست گروه سادهٔ پراکندهٔ M_{24} را در نظر می‌گیریم. برای این گروه داریم:

$$\begin{aligned}
|M_{24}| &= 2^{10}\cdot 3^{3}\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 23\\
\pi(M_{24}) &= \{2,3,5,7,11,23\}\\
\omega(M_{24}) &= \{1,2,\ldots,8,10,11,12,14,15,21,23\}\\
\mu(M_{24}) &= \{8,11,12,15,21,23\}
\end{aligned}$$

- اکنون گروه سادهٔ پراکندهٔ Co_3 را در نظر می‌گیریم. برای این گروه ساده نیز داریم:

$$\begin{aligned}
|Co_3| &= 2^{10}\cdot 3^{7}\cdot 5^{3}\cdot 7\cdot 11\cdot 23\\
\pi(Co_3) &= \{2,3,5,7,11,23\}\\
\omega(Co_3) &= \{1,2,\ldots,12,14,15,18,20,21,22,23,24,30\}\\
\mu(Co_3) &= \{14,18,20,21,22,23,24,30\}
\end{aligned}$$

- در ادامه گروه سادهٔ متناوب A_{11} را در نظر می‌گیریم. برای این گروه نیز داریم:

$$\begin{aligned}
|A_{11}| &= 2^{7}\cdot 3^{4}\cdot 5^{2}\cdot 7\cdot 11\\
\pi(A_{11}) &= \{2,3,5,7,11\}\\
\omega(A_{11}) &= \{1,2,\ldots,11,14,15,20,21\}\\
\mu(A_{11}) &= \{8,9,11,12,14,15,20,21\}
\end{aligned}$$

- سرانجام گروه سادهٔ نوع لی $L_4(3)$ را در نظر می‌گیریم. برای این گروه داریم:

$$\begin{aligned}
|L_4(3)| &= 2^{7}\cdot 3^{6}\cdot 5\cdot 13\\
\pi(L_4(3)) &= \{2,3,5,13\}\\
\omega(L_4(3)) &= \{1,2,\ldots,6,8,9,10,12,13,20\}\\
\mu(L_4(3)) &= \{8,9,12,13,20\}
\end{aligned}$$