توسط

محبوبه اسماعیلی

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد ریاضی محض آنالیز

زیر نظر

آقای دکتر محمدرضا میری

دانشکدهٔ ریاضی
دانشگاه بیرجند
بیرجند

چکیده

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه بررسی میانگین‌پذیری جبر باناخ A نسبت به مشخصه φ (یعنی هومومورفیسم مختلط $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{C}$) می‌باشد. پس از معرفی φ- میانگین‌پذیری شرایطی هم‌ارز با وجود یک φ- میانگین برای جبر باناخ A ارائه کرده و همچنین شرایط لازم برای اینکه جبر باناخ A دارای φ-میانگینی از نرم یک باشد را بررسی می‌کنیم و سرانجام φ -میانگین‌پذیری را روی جبرهای باناخ کامل ضعیف دنباله‌ای مطرح کرده و به ارتباط بین φ- میانگین‌پذیری این گروه جبرها با منظم آرنز بودن آن نیز اشاره‌ای خواهیم داشت.

واژه‌های کلیدی:

جبر باناخ، مشخصه، میانگین پذیر، φ-میانگین، جبر کامل ضعیف دنباله‌ای، F-جبر

پیشگفتار

یکی از مسائل بسیار مهم آنالیز تابعی، موضوع میانگین‌پذیری است. در خصوص این مبحث باید اذعان کرد که این مفهوم به شکل‌ها و روش‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. در این میان تعمیم‌ها و یا شکل‌های دیگری از آن مانند میانگین‌پذیری ضعیف، میانگین‌پذیری تقریبی و... نیز ظهور کرده‌اند.

در رابطه با تاریخچه ظهور این شاخه از ریاضیات که در آنالیز تابعی و هارمونیک خودنمایی کرده است باید گفت که مبحث میانگین‌پذیری در سال(۱۹۰۴) هنگامی که لبگ[۱] در پی ارائه خواصی برای منحصربه‌فرد بودن انتگرال بود، متولد شد.

در یک دوره زمانی (۱۹۳۸-۱۹۰۴) میانگین‌پذیری تنها منحصر به مطالعه‌ی نظریه‌ی اندازه‌های پایای به‌طور متناهی جمعی می‌شد.

باناخ[۲] در سال(۱۹۲۳)نشان داد که یک میانگین پایا روی $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ موجود است که تحت تمام انتقال‌ها پایاست و یا به عبارت دیگر وی نشان دادکه گروه آبلی $\mathbb{Z}$ میانگین‌پذیر است.

فون نویمان[۳] درسال(۱۹۲۹) گروه‌های میانگین‌پذیر گسسته را مورد بررسی قرار داده و آن‌ها را رده‌بندی نمود. درطی سال‌های(۱۹۵۰ - ۱۹۴۰) مفهوم میانگین‌پذیری بر روی گروه‌های دلخواه و نیم‌گروه‌ها توسط دی[۴] تعمیم پیدا کرد.

لازم به‌ذکر است تا سال(۱۹۷۳) میانگین‌پذیری فقط برای گروه‌ها بکار می‌رفت. اما

[۱] Lebeague
[۲] Banach
[۳] Von Neumann
[۴] Day

درسال(۱۹۷۳) برای اولین بار توسط جانسون[۵] [۴] میانگین‌پذیری روی جبرهای باناخ مطرح شد. وی قضیه مهمی در این زمینه اثبات نموده به این شرح که گروه موضعاً فشرده G میانگین‌پذیراست اگر وتنها اگر جبرگروهی $L^1(G)$ میانگین‌پذیر باشد ([۴] قضیه۲.۵).
از آن پس جهان تازه‌ای برای مطالعه‌ی جبرهای باناخ به روی ریاضیدانان گشوده شد و تفاوت جبرهای باناخ از همدیگر بیشتر مشهود گردید.
سپس کانیود [۶] ، لائو[۷] و پیم [۸] در یک کار مشترک میانگین‌پذیری روی جبرهای باناخ را متناظر با یک مشخصه در سال(۲۰۰۸) مطرح کرده و به مفهوم میانگین‌پذیری مشخصه‌ای دست یافتند.
در این پروژه به موضوع میانگین‌پذیری جبر باناخ A نسبت به مشخصه φ خواهیم پرداخت.
این پایان‌نامه شامل چهار فصل است.
در فصل اول تعاریف و پیشنیازها و قضایای مورد نیاز برای تفهیم مطالب بعدی ارائه گردیده‌اند.
در فصل دوم به موضوع φ- میانگین‌پذیری جبر باناخ A پرداخته و شرایطی معادل با φ- میانگین‌پذیری ارائه می‌نمائیم.
فصل سوم به بررسی شرایط لازم و کافی در حالت‌های مختلف برای اینکه جبر باناخ A دارای φ- میانگینی از نرم یک باشد می‌پردازد و در فصل چهارم نظر خود را به جبرهای باناخ کامل دنباله‌ای ضعیف معطوف داشته و اندازه مجموعه φ-میانگین‌های چنین جبرهایی را در حالتی خاص به‌طور دقیق مشخص می‌کنیم.
عمده مطالب مورد بحث در این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۱۶] و [۱۷] می‌باشد.

[۵] Johnson
[۶] Kaniuth
[۷] Lau
[۸] Pym

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اساسی

در این فصل قصد داریم مفاهیم بنیادی و تعاریف مورد نیاز در زمینه‌ی جبرهای باناخ را ارائه کرده و بستر مناسبی جهت ارائه‌ی مطالب اصلی ایجاد نمائیم. همچنین به چند قضیه‌ی اصلی و پرکاربرد در این پایان‌نامه نیز اشاره خواهیم کرد.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری X را نرم‌دار نامیم هرگاه یک نرم بر آن تعریف شود و فضای نرم‌دار X را باناخ گوئیم، درصورتی‌که نسبت به متر تعریف شده توسط نرم کامل باشد.

تعریف ۲.۱.۱. اگر X یک فضای برداری باشد، خانواده‌ی همه‌ی تابعک‌های خطی و پیوسته روی X را فضای دوگان X نامیده و با X^* نشان می‌دهیم.

$$X^* = \{l : X \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \text{خطی وپیوسته است. } l\}$$

دوگان دوم X را نیز با X^{**} نشان می‌دهیم.
و اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، فضای نرم‌دار M را پیش دوگان X گوئیم و آن را با X_* نمایش می‌دهیم هرگاه $M^* = X$.

تعریف ۳.۱.۱. اگر X یک فضای باناخ باشد، برای هر $a \in X$ نگاشت گلفند را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \widehat{a} : X^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ \widehat{a}(f) = f(a) \qquad\qquad (f \in X^*, \widehat{a} \in X^{**}) \end{cases}$$

همچنین نگاشت $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ با ضابطه $\pi(a) = \widehat{a}$ را نگاشت طبیعی گوئیم. این نگاشت یک طولپایی است (یک ایزومتری خطی). به عبارت دیگر $\| a \| = \| \widehat{a} \|$.

تعریف ۴.۱.۱. نشاننده در هر ساختار ریاضی، نگاشتی یک به یک است که خواص اساسی آن ساختار را حفظ کند. اگر A و B فضاهای توپولوژیک باشند نشاننده A به‌توی B نگاشتی یک به یک از A به B است چون T که A و $T(A)$ را همیومورف سازد. اکنون اگر A و B فضاهای برداری توپولوژیک باشند آنگاه نشاننده A به‌توی B نگاشتی یک به یک و خطی از A به B است که نشاننده توپولوژیک نیز باشد.
تحت نگاشت طبیعی فضای باناخ X در X^{**} نشانده می‌شود.
در حالت کلی $\pi(X) \subset X^{**}$ واگر $\pi(X) = X^{**}$ باشد، X فضای انعکاسی نامیده می‌شود.
به‌طور خلاصه فضای باناخ X انعکاسی است اگر نگاشت طبیعی $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ پوشا باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای حاصلضرب داخلی گوییم هرگاه به ازای هرجفت از بردارهای x, y در H یک عددمختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به نام حاصلضرب داخلی یا حاصلضرب اسکالر x, y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برای آن برقرار باشد:

۱) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\qquad (x, y \in H, \alpha \in \mathbb{C})$

۲) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

۳) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

۴) $\forall x \in H \quad : \langle x, x\rangle \geq ۰$

۵) $\langle x, x\rangle = ۰ \Longleftrightarrow x = ۰$

هرفضای حاصلضرب داخلی را می‌توان باتعریف $\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ نرم‌دار کرد. فضای هیلبرت یک فضای حاصلضرب داخلی است که نسبت به متر تعریف شده توسط نرم حاصل از ضرب داخلی، یک فضای کامل باشد. واضح است که هرفضای هیلبرت یک فضای باناخ است.

به عنوان مثال $\ell^۲$ نسبت به ضرب داخلی که به صورت زیر تعریف می‌کنیم یک فضای هیلبرت است:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{n=۱}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta_n}\qquad(\alpha=(\alpha_n)\ \ ,\beta=(\beta_n)\ \in\ell^۲)$$

$$(\ell^۲=\{\alpha=(\alpha_n)\ \ :\quad \parallel\alpha\parallel_۲=(\sum_{n=۱}^{\infty}\mid\alpha_n\mid^۲)^{\frac{۱}{۲}}<\infty\})$$

۲.۱ مفاهیم توپولوژیکی

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری X مجهز به توپولوژی τ را فضای برداری توپولوژیکی(T.V.S) نامیم در صورتی که خواص زیر برای آن برقرار باشد:

الف) برای هر $x\in X$، $\{x\}$ در توپولوژی τ بسته باشد.

ب) اعمال فضای برداری یعنی جمع و ضرب اسکالر پیوسته باشند.

$$\begin{cases} +:X\times X\longrightarrow X\\ (x,y)\longmapsto x+y\end{cases}\qquad \text{و} \qquad \begin{cases} \times:\mathbb{F}\times X\longrightarrow X\\ (\alpha,x)\longmapsto \alpha x\end{cases}$$

هر فضای نرم‌دار یک (T.V.S) است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر (G,O) یک گروه و τ یک توپولوژی روی G باشد که تحت آن عمل گروه و عمل وارون‌گیری پیوسته باشند، G را یک گروه توپولوژیکی می‌نامیم.

$$\begin{cases} G\longrightarrow G\\ x\longmapsto x^{-۱}\end{cases}\qquad \text{و} \qquad \begin{cases} G\times G\longrightarrow G\\ (x,y)\longmapsto xOy\end{cases}$$

یک گروه توپولوژیکی که توپولوژی‌اش (به عنوان یک فضای توپولوژی) موضعاً فشرده و هاسدورف باشد، گروه موضعاً فشرده نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فضای برداری توپولوژیکی X را موضعاً محدب می‌نامیم اگر یک پایه‌ی موضعی متشکل از مجموعه‌های باز محدب حول صفر داشته باشد.
(مجموعه B_p از همسایگی های نقطه p را یک پایه‌ی موضعی حول p گوئیم درصورتی که هر همسایگی p یک عضو از B_p را شامل باشد.)

تعریف ۴.۲.۱. اگر K یک زیرمجموعه‌ی محدب از فضای خطی توپولوژیکی X باشد نگاشت $T : K \longrightarrow K$ را آفین گویند هرگاه

$$T(ax + (1 - a)y) = aT(x) + (1 - a)T(y) \qquad (\forall x, y \in K \quad , \quad 0 \leqslant a \leqslant 1)$$

تعریف ۵.۲.۱. از آنجا که توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ستاره روی یک فضای برداری نرم‌دار از اهمیت زیادی برخوردارند و مکرر از آن‌ها یاد می‌کنیم، اشاره‌ای به ساختار آن‌ها خواهیم داشت.
اگر X یک مجموعه و $\{(y_f, u_f)\}_{f\in J}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژی و $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow (y_f, u_f)\}$ خانواده‌ای از توابع روی X باشند، آنگاه توپولوژی τ با تعریفی مطابق زیر

$$\tau = \{v \subseteq X| \quad v = \cup(\cap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(u_i)) \quad ; \quad k \in \mathbb{N}\ , \quad u_i \in u_f\}$$

ضعیف‌ترین توپولوژی بر Xاست که همه‌ی اعضای خانواده $\mathcal{F}$ را پیوسته می‌سازد.
این توپولوژی را(توپولوژی ضعیف تولید شده توسط خانواده $\mathcal{F}$) یا ($\mathcal{F}$ -توپولوژی) نامند.
حال فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار با دوگان توپولوژیکی X^* باشد، برای هر $x^* \in X^*$ تعریف می کنیم: $p_{x^*}(x) =| x^*(x) |$ در این صورت p_{x^*} یک شبه‌نرم است و توپولوژی تعریف شده توسط خانواده شبه‌نرم های $\{p_{x^*}; x^* \in X^*\}$ روی X را توپولوژی ضعیف گوئیم و با τ_w یا $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.
همچنین اگر به ازای هر $x \in X$ تعریف کنیم: $p_x(x^*) =| x^*(x) |$ در این صورت p_x

نیز یک شبه‌نرم است و توپولوژی تعریف شده توسط خانواده $\{p_x; x \in X\}$ روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره گوئیم و با نمادهای τ_{w^*} یا $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

۳.۱ جبر

تعریف ۱.۳.۱. فضای برداری A روی میدان حقیقی یا مختلط $\mathbb{F}$ که در آن یک ضرب تعریف شده و به ازای هر x, y, z در A و اسکالر α در $\mathbb{F}$ دارای خواص زیر باشد را جبر می‌نامیم.

۱) $x(yz) = (xy)z$

۲) $(x+y)z = xz + yz \quad , \quad z(x+y) = zx + zy$

۳) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

بعلاوه اگر جبر A یک فضای باناخ باشد که در نامساوی ($\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$) صدق کند آن را جبر باناخ و اگر A شامل عنصر یکه e باشد آن را جبر باناخ یکدار گوییم. (درصورتی‌که A روی میدان $\mathbb{C}$ تعریف شود جبر مختلط است و اگر روی میدان $\mathbb{R}$ تعریف شود آن را جبر حقیقی گوییم).

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف و μ اندازه‌ی هار چپ روی G باشد، تعریف می‌کنیم:

$$L^1(G) = L^1(G, \mu) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \;\; ; \;\; f \text{ اندازه پذیر}, \;\; \int_G | f(x) | \, d\mu(x) < \infty\}$$

برای هر $f \in L^1(G)$ قرار می‌دهیم: $\| f \| = \int_G | f(x) | \, d\mu(x)$

در این صورت $(L^1(G), \| \cdot \|)$ همراه با جمع معمولی و ضرب اسکالر و ضرب پیچشی که مطابق زیر تعریف می‌کنیم یک جبر باناخ است که آن را جبر گروهی G نامند.

$(f \star g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y)$

فضای دوگان $L^1(G)$ با $L^\infty(G)$ یکریخت است.

$L^\infty(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}$; اندازه پذیر $f, \quad \| f \|_\infty < \infty\}$

یکریختی بین $L^1(G)^*$ و $L^\infty(G)$ را می‌توان با نگاشت زیر نشان داد.

$L^\infty(G) \longrightarrow L^1(G)^*$

$\varphi \longmapsto \varphi' \qquad ; \qquad \varphi'(f) = \int \varphi(f)d\mu$

توجه: درصورتی‌که G یک گروه گسسته باشد، $L^1(G)$ را با نماد $\ell^1(G)$ نشان می‌دهند.

$\ell^1(G) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \;\; , \;\; \Sigma_{s\in G} \mid f(s) \mid < \infty\}$

در این حالت ضرب پیچشی را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$(f \star g)(s) = \Sigma_{t\in G} f(t)g(t^{-1}s) \qquad\qquad (s \in G)$

و همچنین $\qquad \| f \| = \Sigma_{s\in G} \mid f(s) \mid$

مثال ۱.۳.۲. اگر S یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد $\ell^\infty(S)$ یعنی مجموعه‌ی تمام توابع مختلط مقدار کراندار روی S با جمع و ضربی که به این شکل تعریف می‌شود:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(fg)(x) = f(x)g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

و با نرم $\qquad \| f \|_\infty = sup_{x\in S} \mid f(x) \mid$

یک جبر باناخ یکدار است ([۱۴] مثال ۱.۱.۱).

مثال ۱.۳.۳. اگر Ω یک فضای توپولوژیکی باشد $C_b(\Omega)$ یعنی تمام توابع کراندار پیوسته مختلط مقدار روی Ω یک زیرجبر بسته از $\ell^\infty(\Omega)$ است، لذا $C_b(\Omega)$ یک جبر باناخ یکدار است.
اگر Ω فشرده باشد مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی Ω (یعنی $C(\Omega)$) با $C_b(\Omega)$ یکی است.([۱۴] مثال ۱.۱.۲)

تعریف ۱.۳.۲. اگر A یک جبر باشد زیرجبر I از A به‌طوری‌که برای هر $a \in A\ ,\ b \in I$، $ab \in I$ $(ba \in I)$ یک ایده‌آل چپ (ایده‌آل راست) A است. زیرجبری که ایده‌آل راست و ایده‌آل چپ باشد، ایده‌آل دوطرفه است که آن را ایده‌آل A نیز می‌نامیم.
اگر A جبرنرم‌دار و I ایده‌آل بسته‌ای از A باشد فضای خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ باجمع وضرب اسکالرو ضرب زیر یک جبر است.
به ازای هر $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{F}$ تعریف می‌کنیم:

۱) $(a+I)(b+I) = (a+b)+I$

۲) $\lambda(a+I) = (\lambda a)+I$

۳) $(a+I)(b+I) = (ab)+I$

همچنین باتعریف نرم زیر روی فضای $\frac{A}{I}$ چنانچه A باناخ باشد، $\frac{A}{I}$ نیزتحت این نرم باناخ خواهدبود:

$$\| a+I \| = \ inf\{\| a+i \| \quad ; i \in I\}$$

لازم به ذکراست که شرط لازم برای تعریف این نرم روی فضای $\frac{A}{I}$ بسته بودن ایده‌آل I می‌باشد. ([۱۵]صفحه ۷۳)

تعریف ۱.۳.۳. نگاشتی چون $x \longmapsto x^*$ از A به A را یک برگشت جبری روی جبر A می‌نامیم درصورتی که به ازای هر دو عنصر دلخواه x, y از A و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$ در روابط زیر صدق کند:

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

۳) $(xy)^* = y^* x^*$

۴) $(x^*)^* = x$

جبر مجهز به یک برگشت را $*$- جبر نامند و $*$- جبر باناخی که در رابطه‌ی زیر صدق کند، C^* -جبر نامیده می‌شود. $(\quad \| x^*x \| = \| x \|^۲ \qquad \forall x \quad)$

مثال ۴.۳.۱. اگر Ω یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد و $C_\circ(\Omega)$ نیز عبارت باشد از تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی Ω که در بینهایت به صفر می‌رسند، دراین صورت $C_\circ(\Omega)$ با ساختار زیر یک C^*-جبر است:

$(\forall x, y \in C_\circ(\Omega) \ \ , \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \ \ , \ \omega \in \Omega)$

۱) $(\lambda x + \mu y)(\omega) = \lambda x(\omega) + \mu y(\omega)$

۲) $(xy)\omega = x(\omega) y(\omega)$

۳) $x^*(\omega) = \overline{x(\omega)}$

همچنین جبرهای زیر با برگشت $f \longmapsto \overline{f}$ همگی C^*-جبرند:

- $\ell^\infty(S)$ (S یک مجموعه‌ی غیرتهی است.)
- $L^\infty(\Omega, \mu)$ ((Ω, μ) فضای اندازه است.)
- $C_b(\Omega)$ (Ω یک فضای توپولوژیکی است.)
- $B_\infty(\Omega)$ (که عبارتست از مجموعه‌ی تمام توابع مختلط مقدار اندازه پذیر روی فضای اندازه‌پذیر Ω)

([۱۴] مثال ۲.۱.۲)

مثال ۵.۳.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $C_b(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته و کراندار مانند $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ باشد به‌طوری که

$$\| f \|_\infty = sup\{| f(x) | \quad ; \quad x \in X\} < \infty$$

$(C_b(X), \| \cdot \|_\infty)$ با جمع معمولی توابع، ضرب اسکالر و ضرب نقطه‌ای توابع یک جبر باناخ یکدار تعویض‌پذیر است. همچنین $C_b(X)$ همراه با برگشت $f \longrightarrow f^*$ که در آن $f^*(x) = \overline{f(x)}$ یک C^*-جبر است.

تعریف ۴.۳.۱. (A-مدول باناخ): فرض کنیم A یک جبر باشد و X هم یک فضای برداری (هر دو بریک میدان واحد تعریف شوند) X را یک A -مدول چپ خوانیم اگر نگاشتی چون $(a, x) \longmapsto ax$ از $A \times X \longrightarrow X$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

الف) به ازای هر a ثابت در A نگاشت $x \longmapsto ax$ روی X خطی باشد.

ب) به ازای هر x ثابت در X نگاشت $a \longmapsto ax$ روی A خطی باشد.

ج) $(\forall a, b \in A, x \in X) \qquad a(bx) = (ab)x$

نگاشت $(a, x) \longmapsto ax$ را حاصلضرب مدولی می‌نامیم. A -مدول راست مشابهاً تعریف می‌شود. X را A -دومدول نامیم اگر هم A-مدول راست وهم A-مدول چپ باشد و بعلاوه

$$(a, b \in A, x \in X) \qquad a(xb) = (ax)b$$

اگر A یک جبر باناخ و X یک A-دومدول باشد، دراین صورت X را یک A- دومدول باناخ گوییم هرگاه X یک فضای باناخ باشد و عدد ثابت مثبتی مانند k موجود باشد که برای هر $a \in A, x \in X$ داشته باشیم:

$$\| ax \| \leq k \| a \| \| x \| \quad , \quad \| xa \| \leq k \| x \| \| a \|$$

اگر X یک Aدومدول باناخ باشد، دوگان X (X^*) نیز با ضرب‌های مدولی که در زیر تعریف می‌کنیم، یک A -دومدول باناخ خواهد بود:

$$(a \in A, x \in X, f \in X^*) \qquad ۱)\langle a.f, x\rangle = \langle f, x.a\rangle \quad , \quad ۲)\ \langle f.a, x\rangle = \langle f, a.x\rangle$$

به‌ویژه A^* هم با ضرب مدولی که به این شکل تعریف می‌شود یک A-مدول باناخ است:

$$\langle a\cdot f, b\rangle = \langle f, ba\rangle \qquad , \qquad \langle f\cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle \qquad (a, b\in A, f\in A^*)$$

تذکر: اگر X یک A-مدول باناخ چپ باشد، X^* باضرب مدولی $\langle f.a, x\rangle = \langle f, a.x\rangle$ یک A- مدول باناخ راست می‌شود و در صورتی که X یک A -مدول باناخ راست باشد X^* باضرب مدولی $\langle a.f, x\rangle = \langle f, x.a\rangle$ به A-مدول باناخ چپ تبدیل خواهد شد.

تعریف ۵.۳.۱.
اگر X یک فضای برداری و $E\subset X$ باشد، اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X که شامل E باشند را پوسته‌ی محدب E می‌نامیم که با نماد $Co(E)$ نشان داده می‌شود. معادلاً $Co(E)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای E است.

$$\{t_۱x_۱ + t_۲x_۲ + \ldots t_nx_n \quad ; \quad t_i\geq ۰ \ , \Sigma_{i=۱}^{n} t_i = ۱\}$$

به عبارتی پوسته‌ی محدب E، کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل E است.

۴.۱ تور

یکی از مفاهیمی که زیاد با آن سروکار خواهیم داشت تور است که ضمن تعریف به بیان خواص مختصری در مورد آن می‌پردازیم. این مفهوم برای اولین بار در سال ۱۹۲۹ توسط مور [۱] و اسمیت [۲] مطرح شد.

تعریف ۱.۴.۱. در فضای توپولوژیکی X یک تور نگاشتی است از مجموعه‌ی جهت‌دار A به X چون $f: A\longrightarrow X$ که $\alpha\longmapsto x_\alpha$. برای هر $\alpha\in A$ ، **معمولاً** $f(\alpha)$ را بانماد x_α وتور f رابا نماد $\langle x_\alpha\rangle_{\alpha\in A}$ یا مختصراً $\langle x_\alpha\rangle$ نمایش می‌دهیم.

---
[۱] Moor
[۲] Smith

زیرتور یک تعمیم اختصاصی مناسب از زیردنباله‌هاست.
تور $\langle y_\beta \rangle_{\beta\in B}$ یک زیرتور از $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ هست اگر و تنها اگر نگاشت $\beta \longrightarrow \alpha_\beta$ از B به‌توی A موجود باشد به قسمی که

$$۱)\quad y_\beta = x_{\alpha_\beta}$$

$$۲)\ \ \forall\ \ \alpha_\circ \in A\ \ \exists\ \ \beta_\circ \in B\quad s.t\ \ \alpha_\beta \geq \alpha_\circ\quad (if: \beta \geq \beta_\circ)$$

تور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ را همگرا به $x \in X$ گوئیم هرگاه برای هر همسایگی U از X که $x \in U$، $\alpha_\circ \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\alpha \geq \alpha_\circ$ آنگاه $x_\alpha \in U$.
از نماد $x_\alpha \longrightarrow x$ برای نشان دادن همگرایی تور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha\in A}$ به x استفاده می‌کنیم.
به وضوح اگر تور $\langle x_\alpha \rangle_\alpha$ به نقطه x همگرا باشد هر زیرتور آن نیز چنین است.
تور $\langle x_\alpha \rangle_\alpha$ را درX به‌طور ضعیف، همگرا به $x_\circ$ گوییم اگرو فقط اگر

$$\forall f \in X^*: \quad \langle x_\alpha, f\rangle \longrightarrow \langle x_\circ, f\rangle$$

به‌طور مشابه تور $\langle f_\alpha \rangle$در X^* را به‌طور ضعیف*، همگرابه $f_\circ$ گوییم اگروفقط اگر

$$\forall x \in X: \quad \langle x, f_\alpha\rangle \longrightarrow \langle x, f_\circ\rangle$$

تعریف ۱.۴.۲. توری چون $\langle e_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda}$ را واحد تقریبی راست برای جبر باناخ A نامیم درصورتی که به ازای هر عضو $a \in A$ ، تور $\langle ae_\lambda \rangle_\lambda$ دارای حد a باشد و تور مذکور را کراندار گوئیم اگر $k > ۰$ ثابتی موجود باشد که

$$\| e_\lambda \| \leq k \qquad\qquad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

یک واحد تقریبی راست که کراندار نیز باشد، واحد تقریبی راست کراندار نامیده می‌شود. واحد تقریبی چپ کراندار به‌طور مشابه تعریف می‌شود. توری که واحد تقریبی راست کراندار و در عین حال واحد تقریبی چپ کراندار نیز باشد را واحد تقریبی کراندار گوئیم. درصورتی که تور $\langle e_\lambda \rangle$ یک دنباله باشد آن را واحد تقریبی دنباله‌ای می‌نامیم.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. تور کراندار $\langle e_\lambda \rangle_{\lambda\in\Lambda}$ از عناصر A را یک واحد تقریبی چپ کراندار ضعیف نامیم هرگاه:

$$\lim_\lambda f(e_\lambda x) = f(x) \qquad (\forall x \in A, f \in A^*)$$

واحد تقریبی راست کراندار ضعیف ودوطرفه مشابهاً تعریف می‌شود. به‌وضوح هر واحد تقریبی چپ کراندار برای A، یک واحد تقریبی چپ کراندار ضعیف نیز هست.

۵.۱ قضایای مقدماتی

قضیه ۱.۵.۱. *(قضیه گلدشتاین): فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد، دراین صورت برای هر $m \in X^{**}$ تور $\langle x_\alpha \rangle \subset X$ موجوداست به طوری که*

$$\| x_\alpha \| \leq \| m \| \quad , \quad \widehat{x_\alpha} \stackrel{w^*}{\longrightarrow} m$$

برهان: ([۱]صفحه۸۱۸)

همچنین نتیجه‌ای از قضیه گلدشتاین بیان می‌کند که اگر X یک فضای باناخ و π نگاشت طبیعی از X به X^{**} باشد، $\pi(X)$ در X^{**}، w^*- چگال است. ([۳]صفحه ۴۲۴)

قضیه ۲.۵.۱. *(قضیه باناخ آلاغلو): فضای برداری توپولوژیکی (X, τ) و همسایگی دلخواه V از صفر در آن مفروضند، دراین صورت*

$$K = \{\Lambda \in X^* | \quad | \Lambda(x) | \leqslant ۱ \quad (x \in V)\} = \{\Lambda \in X^* | \quad \Lambda(V) \subset \overline{N(۰)} \}$$

مجموعه‌ای w^*- فشرده است.

برهان: ([۱۰]قضیه۳.۱۵)

قضیه ۳.۵.۱. *(قضیه آلاغلو): اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه $ballX^{**}$ (گوی واحد X^{**}) تحت w^* -توپولوژی فشرده است.*

برهان: ([۱۵]گزاره ۱.۴ صفحه ۱۳۴)

قضیه ۴.۵.۱. (توسیع هان- باناخ): *فضای برداری توپولوژیکی موضعاً محدب X و زیرفضای M از آن مفروضند، هر تابعک خطی پیوسته $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ را می‌توان به تابعک خطی پیوسته $\Lambda : X \longrightarrow \mathbb{C}$ توسیع داد $(\Lambda|_M = f)$ و چنانچه X فضای نرم‌دار باشد این توسیع طوری موجود است که $\| f \|=\| \Lambda \|$.*

برهان: ([۱۰] فصل سوم)

۶.۱ میانگین‌پذیری جبرهای باناخ

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A -مدول باناخ باشد. نگاشت خطی و کراندار $D : A \longrightarrow X$ که به این شکل تعریف می‌شود:

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b)$$

رایک X-اشتقاق می‌نامیم.

برای $x \in X$ نگاشت $\delta_x : A \longrightarrow X$ رابدین شکل تعریف می‌کنیم:

$$\delta_x(a) = ax - xa$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد δ_x یک اشتقاق است:

$$\delta_x(ab) = (ab)x - x(ab) = abx - xab + axb - axb =$$

$$(ax - xa)b + a(bx - xb) = \delta_x(a)b + a\delta_x(b)$$

خطی و کراندار بودن نگاشت فوق نیز به‌راحتی به‌دست می‌آید.

$$\| \delta_x(a) \|=\| a.x - x.a \|\leq\| a.x \| + \| x.a \|\leq k \| a \|\| x \| +k \| x \|\| a \|$$

$$\leq\| a \| (2k \| x \|)$$