بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش آزاد

درهم تنیدگی در نسبیت خاص

استاد راهنما:

دکتر بهرام نصر اصفهانی

پژوهشگر:

مهدی احمدی

شهریورماه ۱۳۷۸

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج ابتکارات ، مطالعات
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است

تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش آزاد آقای مهدی احمدی تحت عنوان

درهم تنیدگی درنسبیت خاص

در تاریخ ۱۳۸۷/۶/۱۸ توسط هیات داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر بهرام نصر اصفهانی	با مرتبه ی علمی استادیار	امضا
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر فردین خیر اندیش	با مرتبه ی علمی استادیار	امضا
۳- استاد داور خارج از گروه	دکتر شهریار سلیمی	با مرتبه ی علمی استادیار	امضا

گروه فیزیک

امضای مدیر گروه

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به بررسی سیستم های مرکب می پردازیم و سعی می کنیم ابزار ریاضی لازم را برای مطالعه‌ی نظریه ی اطلاع رسانی کوانتومی فراهم کنیم .

در قسمت کلاسیک مفهوم همبستگی های کوانتومی و تفاوت آن ها را با همبستگی های کلاسیک ، که می توانند در یک سیستم کوانتومی هم حاضر باشند ، توضیح می دهیم . به ارتباط میان همبستگی های کوانتومی و درهم تنیدگی می پردازیم و پیمانه هایی برای درهم تنیدگی ارایه می دهیم . سپس نشان خواهیم داد که درهم تنیدگی در فیزیک کلاسیک معادلی ندارد و یکی از عناصر ساختاری نظریه کوانتومی محسوب می شود. به همین دلیل دو آزمایش که نتایج آن ها از نظر کلاسیکی غیرقابل توجیه اند را به عنوان مثال مطرح می کنیم . سپس سعی خواهیم کرد با معرفی متغیرهای پنهان یک نظریه جایگزین کلاسیک برای نظریه کوانتومی پیدا کنیم که قادر باشد همه نتایج پدیده های کوانتومی را هم توضیح دهد ، به نامساوی بل خواهیم رسید و نشان می دهیم که این نامساوی در مکانیک کوانتومی نقض می شود . همچنین خواهیم دید که برای سیستم های دو ذره ای هر آمیزه جداپذیر از حالت های کوانتومی از نامساوی *CHSH* پیروی می کند . بنابراین درهم تنیدگی یک شرط لازم برای نقض نامساوی بل است.

در قسمت نسبیتی ابتدا به بررسی همبستگی *EPR* از دیدگاه ناظران متحرک می پردازیم و آزمایش *EPR* نسبیتی را برای ذرات جرم دار فرمول بندی می کنیم . خواهیم دید که چنانچه اندازه گیری اسپین ها در جهت های یکسان انجام گیرد ، بر خلاف حالت غیر نسبیتی ، دیگر نتایج اندازه گیری همیشه غیر همبسته نخواهد بود . به عبارت دیگر به نظر می رسد غیر همبستگی کامل در تمام چارچوب ها حفظ نمی شود . اما نشان خواهیم داد که همبستگی کامل *EPR* در جهت های متفاوت برقرار است .

سپس به بررسی نامساوی بل از دیدگاه ناظران متحرک می پردازیم . این کار را با بهره گیری از عملگر اسپین نسبیتی و تبدیلات لورنتس انجام می دهیم و خواهیم دید که درجه ی نقض نامساوی بل از نظر ناظرهای متحرک با افزایش سرعت ناظرها ، کاهش می یابد و در حد فرانسبیتی نامساوی بل برآورده می شود . سپس سعی می کنیم تا عملگر اسپین نسبیتی صحیح تری نسبت به عملگر پیشین ارایه کنیم و جهت های اندازه گیری جدیدی برای اسپین ها می یابیم که باعث می شوند در دستگاه متحرک نیز نامساوی بل به طور بیشینه نقض شود.

سپس سعی می کنیم به این سوال پاسخ دهیم که آیا درهم تنیدگی تابع موج کلی تحت تبدیل لورنتس ثابت می ماند یا خیر و آیا درهم تنیدگی میان درجات آزادی منتقل می شوند ؟ در ابتدا درهم تنیدگی میان درجات آزادی یک ذره و سپس حالت دو ذره ای را بررسی می کنیم . در ابتدا به نظر می رسد که کاهش درهم تنیدگی اسپینی با افزایش درهم تنیدگی اندازه حرکتی جبران می شود ، اما با ارایه مثال هایی خواهیم دید که این گونه نیست . با استفاده از هماندهی هم نشان خواهیم داد که درهم تنیدگی کل ناوردای لورنتسی نیست .

در انتها از آنجایی که پیچش نسبت به اسپین این برتری را دارد که به راحتی با استفاده از حالت جرم دار می توان به نتایجی در مورد حالت بدون جرم رسید و همچنین در آزمایش های آشکارسازی در فیزیک انرژی های بالا در واقع این پیچش است که آشکار می شود ، می خواهیم به بررسی درهم تنیدگی پیچش تحت تبدیلات لورنتس بپردازیم . سعی می کنیم تاثیر وجود درهم تنیدگی پیچش و وجود درهم تنیدگی اندازه حرکتی را روی هماندهی پیچش با استفاده از محاسبات عددی بررسی کنیم.

واژه های کلیدی: درهم تنیدگی ، نامساوی بل ، سنجه های درهم تنیدگی ، تناقض *EPR* ، چرخش ویگنر ، عملگر اسپین نسبیتی ، پیچش

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: سیستم های مرکب

فصل دوم: درهم تنیدگی

فصل سوم : جایگزینی برای نظریه‌ی کوانتومی وجود ندارد

فصل چهارم: تبدیلات لورنتس در مکانیک کوانتومی

فصل پنجم: درهم تنیدگی در نسبیت خاص

فصل ۱

سیستم های مرکب

در این بخش به سیستمهای مرکب می پردازیم و سعی می کنیم ابزار ریاضی لازم را فراهم کنیم . برای اولین بار مفهوم درهم تنیدگی را با ارایه‌ی یک حقه‌ی شعبده بازی که توسط فیزیک کلاسیک غیر قابل توجیه است ، مطرح می کنیم .

۱—۱ زیر سیستم ها

ما در فیزیک کلاسیک عادت داریم که سیستم های مرکب را به اجزای آن ها تجزیه کنیم و یا بر عکس اجزا را ترکیب کنیم و سپس آن را بررسی کنیم . به عبارت دیگر در مکانیک کلاسیک با دانستن برهم کنش میان اجزا می توان کل سیستم را توضیح داد . اما در مکانیک کوانتومی این امر امکان پذیر نیست و ممکن است (اگر سیستم در حالت در هم تنیده باشد) اطلاعات حاصل از کل سیستم از مجموع اطلاعات به دست آمده از اجزای آن بیشتر باشد .

برای این که اندازه گیری های انجام شده روی زیر سیستم های S^A و S^B سیستم مرکب S^{AB} روشن باشد ، اغلب دو ناظر بانام های آلیس و باب معرفی می شوند که اندازه گیری ها را روی زیر سیستم ها انجام می دهند و معمولا چنین جمله ای بیان می گردد که اگر آلیس فلان عمل را روی زیرسیستم دراختیارش انجام دهد ، آنگاه نتیجه اندازه گیری باب فلان مقدار خواهد شد .

۱—۲ فضای حاصلضربی هیلبرت

ابتدا می خواهیم چارچوب ریاضی که در آن به بررسی سیستم های مرکب می پردازیم ، فرمول بندی کنیم و به همین منظور به فضای حاصلضربی هیلبرت [۱] احتیاج داریم .

۱—۲—۱ بردارها

حاصلضرب تانسوری H^{AB} دو فضای هیلبرت H^A و H^B ، که ابعاد آن ها لازم نیست یکسان باشد ،

$$H^{AB} = H^A \otimes H^B \tag{۱—۱}$$

خود یک فضای هیلبرت است . به ازای هر جفت بردار $|\varphi^A\rangle^A$ و $|\chi^B\rangle^B$ یک بردار حاصل ضرب در H^{AB} وجود دارد ، که به صورت های مختلف نمایش داده می شود .

$$|\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle =: |\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle =: |\varphi, \chi\rangle \tag{۲—۱}$$

که نسبت به هردو مولفه خطی است ، یعنی

$$|\varphi^A\rangle \otimes (\lambda|\chi_۱^B\rangle + \mu|\chi_۲^B\rangle) = \lambda|\varphi^A\rangle \otimes |\chi_۱^B\rangle + \mu|\varphi^A\rangle \otimes |\chi_۲^B\rangle \tag{۳—۱}$$

و

$$(\lambda|\varphi_۱^A\rangle + \mu|\varphi_۲^A\rangle) \otimes |\chi^B\rangle = \lambda|\varphi_۱^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle + \mu|\varphi_۲^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle \tag{۴—۱}$$

بردار های درهم تنیده

اگر $\{|n^A\rangle\}$ پایه فضای H^A و $\{|i^B\rangle\}$ پایه فضای H^B باشند ، آنگاه

$$\{|n^A\rangle \otimes |i^B\rangle\} \tag{۵—۱}$$

[۱] Product hilbert space

پایه فضای H^{AB} خواهد بود و برای بعد H^{AB} داریم $dimH^{AB} = (dimH^A).(dimH^B)$.
هر بردار $|\psi^{AB}\rangle$ را می توان بر حسب پایه ها به صورت زیر بسط داد .

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{ni}|n^A, i^B\rangle \qquad (۱—۶)$$

همه روابط را می توان مستقیما برای فضاهای هیلبرت به تعداد متناهی تعمیم داد ، که به صورت زیر خلاصه نویسی می شود .

$$H^{\otimes n} := H \otimes H \otimes ...H|\varphi^{\otimes n}\rangle := |\varphi\rangle|\varphi\rangle...|\varphi\rangle \qquad (۱—۷)$$

بردارهایی در H^{AB} که نمی توان آن ها را به شکل بردارهای حاصل ضربی نوشت ، بردارهای درهم تنیده نامیده می شوند [۱] . این بردار ها نقش مهمی در بخش های آینده بازی می کنند و معمولا نمی توان از روی تجزیه آنها بر حسب بردارهای پایه تشخیص داد که درهم تنیده اند یا خیر . در فصول بعدی روش هایی برای تشخیص درهم تنیدگی ارایه می دهیم .

حاصل ضرب عددی [۲]

بردار مزدوج بردار حاصل ضربی $|\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle$ شکل زیر را دارد

$$(|\varphi^A\rangle \otimes |\chi^B\rangle)^\dagger = \langle\varphi^A| \otimes \langle\chi^B| =: \langle\varphi^A|\langle\chi^B| =: \langle\varphi^A, \chi^B| =: \langle\varphi, \chi| \qquad (۱—۸)$$

رابطه ای متناظر با رابطه (٦) برای بردار مزدوج هم وجود دارد،

$$\langle\psi^{AB}| = \sum_{n,i} \alpha^*_{ni}\langle n^A, i^B|. \qquad (۱—۹)$$

ضرب عددی به صورت زیر که بردارهای هر فضا در بردارهای مربوط به فضای خود ضرب می شوند ، ساخته می شود،

$$\langle\varphi^A, \chi^B|\xi^A, \zeta^B\rangle = \langle\phi^A|\xi^A\rangle\langle\chi^B|\zeta^B\rangle. \qquad (۱—۱۰)$$

[۲] The scalar product

یک پایه $\{|n^A, i^B\rangle\}$ فضای H^{AB} متعامد بهنجاراست اگر رابطه زیر برقرار باشد ،

$$\langle n^A, i^B | \acute{n}^A, \acute{i}^B\rangle = \delta_{n\acute{n}}\delta_{i\acute{i}}. \qquad (۱—۱۱)$$

پایه های بل

چهار بردار زیر یک پایه متعامد بهنجار خاص برای فضای هیلبرت $H^{AB} = H^A \otimes H^B$ می سازند :

$$|\Phi^{AB}_{\pm}\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰^A, ۰^B\rangle \pm |۱^A, ۱^B\rangle), \quad |\Psi^{AB}_{\pm}\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰^A, ۱^B\rangle \pm |۱^A, ۰^B\rangle) \qquad (۱—۱۲)$$

این پایه نقش خاصی را در بسیاری از تحقیقات بازی می کند . نشان خواهیم داد که این پایه های بل به طور بیشینه درهم تنیده هستند . به $|\Psi^{AB}_{-}\rangle$ حالت یگانه اسپینی هم گفته می شود .

۱—۲—۲ عملگرها

عملگرهای حاصل ضربی[۳] :

فرض کنید C^A یک عملگرخطی روی فضای H^A و D^B یک عملگرخطی روی فضای H^B باشند . به تانسور حاصل ضرب زیر

$$C^A \otimes D^B =: C^A D^B \qquad (۱—۱۳)$$

یک عملگر حاصل ضربی گفته می شود که به صورت زیر عمل می کند ،

$$[C^A \otimes D^B]|\varphi^A, \chi^B\rangle = |C^A\varphi^A, D^B\chi^B\rangle. \qquad (۱—۱۴)$$

عملگر دیادیک $|\psi^{AB}\rangle\langle\theta^{AB}|$ که از بردارهای حاصل ضربی $|\psi^{AB}\rangle = |\varphi^A, \chi^B\rangle$ و $|\theta^{AB}\rangle = |\xi^A, \zeta^B\rangle$ تشکیل شده است نیز یک عملگر حاصل ضربی محسوب می گردد.

$$|\psi^{AB}\rangle\langle\theta^{AB}||\varphi^A, \chi^B\rangle\langle\xi^A, \zeta^B| = (|\varphi^A\rangle\langle\xi^A|) \otimes (|\chi^B\rangle\langle\zeta^B|) \qquad (۱—۱۵)$$

[۳] Product operators

عملگر واحد را می توان با استفاده از بردارهای پایه متعامد بهنجار و دیادیک ها تجزیه نمود .

$$1^{AB} = \sum_{n,i} |n^A, i^B\rangle\langle n^A, i^B| = 1^A \otimes 1^B \qquad (۱—۱۶)$$

عملگر های موضعی که بانمادهای زیر نمایش داده می شوند ، تنها روی یکی از زیر سیستم ها به طور غیر بدیهی عمل می کنند .

$$\hat{C}^A := \hat{C}^{AB} =: C^A \otimes 1^B; \qquad \hat{D}^B := \hat{D}^{AB} =: 1^A \otimes D^B \qquad (۱—۱۷)$$

رد و رد جزئی

رد هم بر حسب پایه های متعامد بهنجار فضای هیلبرت H^{AB} تعریف می شود .

$$tr[Z^{AB}] := tr_{AB}[Z^{AB}] := \sum_{n,i} \langle n^A, i^B|Z^{AB}|n^A, i^B\rangle \qquad (۱—۱۸)$$

از این رابطه برای عملگرهای حاصل ضربی نتیجه می گیریم

$$tr_{AB}[C^A \otimes D^B] = \sum_{n,i} C^A_{nn} D^B_{ii} = tr_A[C^A] tr_B[D^B] \qquad (۱—۱۹)$$

محاسبه رد جزئی روی یکی از زیر فضاها ، مثلا فضای H^A از اهمیت خاصی برای نتایج فیزیکی برخوردار است و به صورت

$$tr_A[Z^{AB}] := \sum_n \langle n^A|Z^{AB}|n^A\rangle \qquad (۱—۲۰)$$

تعریف می شود . می توان به سادگی نشان داد که رد کلی از دنباله ای از ردگیری های جزئی تشکیل شده است و به ترتیب اعمال ردهای جزئی بستگی ندارد .

$$tr_{AB}[Z^{AB}] = tr_A[tr_B[Z^{AB}]] = tr_B[tr_A[Z^{AB}]] \qquad (۱—۲۱)$$

۱—۳ اولین کاربرد درهم تنیدگی : یک حقه‌ی شعبده بازی

در فصل آینده توضیح خواهیم داد که درهم تنیدگی رکن اصلی نظریه اطلاع رسانی کوانتومی است . حتی از درهم تنیدگی می توان برای مطالعه پایه و اساس مکانیک کوانتومی بهره گرفت . به همین دلیل به دنبال پاسخ این سوال هستیم که آیا پدیده های فیزیک کوانتومی را می توان با تکیه بر فیزیک کلاسیک و احتمالا با بهره گیری از نظریه هایی که تا به حال فرمول بندی نشده اند ، توضیح داد ؟ در این فصل برای روشن شدن موضوع به ارائه یک مثال ساده اکتفا می کنیم و در فصل های بعدی به شکل مبسوط تری به آ ن خواهیم پرداخت .

حقه‌ی شعبده بازی

یک شعبده باز تماشاچیان خود را با حقه ای به این شرح شگفت زده می کند : تماشاچیان مشاهده می کنند که شعبده باز چیزی را به دو دستیار خود ، آلیس و باب ، می دهد . آنگاه آلیس و باب هر کدام به اتاق های جداگانه ای می روند که به طور کامل در برابر تبادل اطلاعات عایق بندی شده اند . در هر اتاق یک سکه انداخته می شود و با توجه به نتیجه آن یک سوال از آلیس و باب توسط یکی از تماشاچیان پرسیده می شود . اگر نتیجه سکه انداختن شیر بود ، سوال به رنگ دلخواه آنها بر می گردد و می تواند دو جواب قرمز و سبز داشته باشد . چنانچه نتیجه خط بود ، سوالی در موردسبزیجات مورد علاقه آن ها پرسیده خواهد شد و می توانند بین دو گزینه هویج و لوبیا انتخاب کنند .حال شعبده باز و دستیارانش دوباره یکدیگر را ملاقات می کنند و با حضور یک تماشاچی به عنوان شاهد ، نتایج را وارد لیستی می نمایند . سپس چندین بار کل فرایند را از ابتدا انجام می دهند . در انتها تماشاچیان نتایج به دست آمده را بررسی نموده و به دنبال همبستگی هایی می گردند . چهار نمونه سوال وجود دارد که می توان آنها را به سه دسته دسته بندی کرد :

— از هر دو در مورد رنگ دلخواه شان سوال شود .

— از هر دو در مورد سبزی دلخواه شان پرسیده شود .

— از یکی در مورد رنگ دلخواه و از دیگری در مورد سبزی دلخواهش سوال شود .

پس از بررسی تماشاچیان ، مشاهده می شود که جواب سوال نوع اول رنگ سبز داده شده است ، به جفت سوال دسته دوم همیشه یک جواب هویج و به جفت سوال دسته سوم یک جواب لوبیا و یک جواب رنگ سبز داده شده است .

همبستگی های کلاسیک هیچ توضیحی نمی توانند بدهند

تماشاچیان مشاهده می کنند که به سوالات با نظم خاصی پاسخ داده شده است . حقه شعبده باز چیست ؟ تماشاچیان حدس می زنند که به آلیس و باب تکه کاغذی داده شده و روی آن یک رنگ ویک سبزی نوشته شده است و شعبده باز کاغذ هایی با فراوانی های گوناگون آماده کرده‌و در اختیار دستیارانش قرار داده تابه طور دقیق همان همبستگی های مشاهده شده میان پاسخ ها به وجود آید .

اگر چنین حدسی درست باشد برای اینکه به سوال نوع اول پاسخ درست داده شود ، باید دو تکه کاغذ که روی آنها رنگ سبز نوشته شده در اختیار آلیس وباب قرار گیرد . حال برای پاسخ درست به سوال نوع سوم باید سبزی نوشته شده روی هر دو کاغذ لوبیا باشد که این با سوال نوع دوم تناقض دارد . پس با استفاده از کاغذها نمی توان همبستگی های لازم را ایجاد کرد ، ولی در عین حال شعبده باز به قدرت خارق العاده ای نیاز ندارد و داشتن کمی اطلاعات در مورد حالت های درهم تنیده برای وی کافی است .

حقه

در واقع حقه شعبده باز این است که او از سیستم های همبسته کلاسیک مانند تکه های کاغذ استفاده نمی کند واز حالت های درهم تنیده کوانتومی بهره می گیرد . او به هر یک از دستیارانش یکی از زیر سیستم های یک سیستم دو ذره ای را که در حالت زیر آماده شده است ، می دهد .

$$|\chi^{AB}\rangle = N(|r^A, r^B\rangle - a^2|P^A, P^B\rangle) \qquad (۱—۲۲)$$

به طوری که $a \in R$ و $a \neq 0, 1$ می باشد. N ضریب بهنجارش و $\{|r, g\rangle\}$ و$\{|C, P\rangle\}$ پایه های متعامدبهنجار فضای H^2 می باشند که نسبت به یکدیگر چرخیده اند .

$$|r\rangle = a|P\rangle + b|C\rangle \qquad (۱—۲۳)$$

$$|g\rangle = b|P\rangle - a|g\rangle \qquad (۱—۲۴)$$

که $b \in R$ و $a^2 + b^2 = 1$ است .

$$|P\rangle = a|r\rangle + b|g\rangle \qquad (۱—۲۵)$$

$$|C\rangle = b|r\rangle - a|g\rangle \qquad (۱—۲۶)$$

اگر از آلیس یا باب در مورد رنگ دلخواه پرسیده شود ، او یک اندازه گیری روی زیر سیستم روی پایه $\{|r, g\rangle\}$ انجام می دهد و با توجه به حالت به دست آمده ($|r\rangle$ یا $|g\rangle$) به سوال پاسخ می دهد . در مورد سوال سبزی دلخواه هم باید اندازه گیری در پایه $\{|C, P\rangle\}$ انجام شود و با توجه به نتیجه($|C\rangle$ یا $|P\rangle$) پاسخ داده شود . ما می توانیم با استفاده از حالت $|\chi^{AB}\rangle$ احتمالات به دست آمدن نتایج خاص را محاسبه نماییم . برای محاسبه احتمالات $|P\rangle$ را از رابطه (۲۵) در رابطه (۲۲) قرار می دهیم .

$$|\chi^{AB}\rangle = N(|r^A, r^B\rangle - a^۲(a|r^A\rangle + b|g^A\rangle)(a|r^B\rangle + b|g^B\rangle)) \qquad (۱—۲۷)$$

$$|\chi^{AB}\rangle = N(|r^A, r^B\rangle - a^۲(a|r^A\rangle + b|g^A\rangle)|P^B\rangle) \qquad (۱—۲۸)$$

$$|\chi^{AB}\rangle = N(|r^A, r^B\rangle - a^۲|P^A\rangle(a|r^B\rangle + b|g^B\rangle)) \qquad (۱—۲۹)$$

اگر $|r\rangle$ را از رابطه (۲۳) در $|\chi^{AB}\rangle$ قرار دهیم داریم :

$$\begin{aligned}|\chi^{AB}\rangle &= N[(a|P^A\rangle + b|C^A\rangle)(a|P^B\rangle + b|C^B\rangle) - a^۲|P^A, P^B\rangle] \\ &= N(b^۲|C^A, C^B\rangle + ab(|C^A, P^B\rangle + |P^A, C^B\rangle)) \qquad (۱—۳۰)\end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۲۷) تا (۳۰) احتمالات مطلوب به صورت زیر به دست می آیند .

$$p(g^A, g^B) = Na^4b^4 \neq 0, p(g^A, C^B) = p(C^A, g^B) = 0, p(P^A, P^B) = 0 \qquad (۱–۳۱)$$

که همان نتایج مطلوبی هستند که ما به دنبال آنها بودیم . بنابراین درهم تنیدگی ابزاری است که شعبده بازهای کوانتومی از آن استفاده می کنند و آن دسته از آنها که به طرز تفکر کلاسیک اکتفا می کنند ، از این قبیل حقه ها بی بهره می مانند .

فصل ۲

درهم تنیدگی

در این فصل می خواهیم مفهوم همبستگی های کوانتومی را توضیح دهیم و تفاوت آن ها را با همبستگی های کلاسیک ، که می توانند در یک سیستم مرکب کوانتومی هم حاضر باشند ، بیان کنیم . به ارتباط بین همبستگی های کوانتومی و درهم تنیدگی می پردازیم و برای حالت های خالص حضور درهم تنیدگی را با استفاده از تجزیه اشمیت معین می کنیم . همچنین پیمانه هایی برای درهم تنیدگی ارائه می دهیم .

۲—۱ همبستگی ها و درهم تنیدگی

یک سیستم اسپینی مرکب با دو زیرسیستم می تواند در حالت حاصل ضربی $|0^A, 0^B\rangle$ یا $|1^A, 1^B\rangle$ و یا همچنین در برهم نهی آن ها $\alpha|0^A, 0^B\rangle + \beta|1^A, 1^B\rangle$ قرار داشته باشد . این برهم نهی به شرط $\alpha, \beta \neq 0$ یک مثال از حالت های درهم تنیده است . حالت های درهم تنیده نقش اساسی در فرایندهای اطلاع رسانی کوانتومی بازی می کنند و ابزار اصلی برای تولید آثار غیر کلاسیک می باشند .

سیستم های مرکب در حالت های درهم تنیده ، همبسته می باشند . اگر برای حالت درهم تنیده بالا مشاهده پذیر σ_z روی زیر سیستم ها اندازه گیری شود ، آنگاه مقادیر به دست آمده زوج (۱— و ۱—) یا (۱+ و ۱+) خواهد بود . در اینجا همبستگی در مقایسه با سیستم های همبسته کلاسیک ساختار متفاوتی دارد ، که اگر علاوه بر σ_z مشاهده پذیرهای دیگری هم روی زیر سیستم ها اندازه گیری شود ، به آن پی خواهیم برد . این مساله در فصل (۳) بیشتر توضیح داده خواهد شد .

۲−۲ حالت های کوانتومی همبسته‌ی کلاسیکی

حالت های کوانتومی همبسته

در ابتدا با تفاوت اساسی بین حالت های کوانتومی همبسته وغیر همبسته شروع می کنیم . دوباره یک سیستم مرکب S^{AB} با زیر سیستم های S^A و S^B درنظر می گیریم . همان طور که دیدیم در حالت حاصل ضربی $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$ ، زیر سیستم ها از هر لحاظ کاملا مستقل از یکدیگر می باشند و به عبارتی همبسته نیستند . بر عکس برای حالت های همبسته ، زیر سیستم های سیستم مرکب به شکل حاصل ضربی نوشته نمی شوند ، یعنی

$$\rho^{AB} \neq \rho^A \otimes \rho^B. \qquad (۱−۲)$$

این خصوصیت ریاضی در مورد مقادیر اندازه گیری شده از لحاظ عملگری به این صورت بیان می شود : یک حالت ρ^{AB} همبسته است اگر و تنها اگر مشاهده پذیر های C^A و D^B وجود داشته باشند به طوری که مقادیر انتظاری $C^A \otimes D^B$ با حاصل ضرب مقادیر انتظاری ماتریس های چگالی کاهش یافته برابر نباشد ،

$$tr[(C^A \otimes D^B)\rho^{AB}] \neq tr_A[C^A\rho^A].tr_B[D^B\rho^B]. \qquad (۲−۲)$$

حالت های کوانتومی به طور کلاسیک همبسته

سیستم های کوانتومی می توانند در حالت هایی باشند که همبستگی های حاصل از اندازه گیری ها روی زیرسیستم های آن ها با همبستگی های کلاسیک یکسان باشد . آلیس سیستم S^A را در حالت ρ_r^A آماده می کند و به باب از طریق کانال ارتباطی کلاسیک اطلاع می دهد ، باب هم سیستم S^B را در حالت ρ_r^B آماده می کند . این کار بارها برای حالت های مختلف با فرکانس های نسبی p_r انجام می شود . حالت مرکب آماده شده به این روش یک ترکیب محدب از حالت های حاصل ضربی خواهد بود :

$$\rho^{AB} = \sum_{r=۱}^{m} p_r \rho_r^A \otimes \rho_r^B, \quad p_r > ۰, \quad \sum_r p_r = ۱ \qquad (۳−۲)$$

چنین حالتی یک حالت به طور کلاسیک همبسته نامیده می شود . این حالت را بر حسب تجزیه های آنسامبلی ρ_r^A و ρ_r^B می توان به صورت زیر هم نوشت :

$$\rho^{AB} = \sum_j \pi_j |a_j^A\rangle\langle a_j^A| \otimes |b_j^B\rangle\langle b_j^B| \qquad (۴—۲)$$

به طوری که $\sum_j \pi_j$ و $\sum_j \pi_j = ۱$ می باشد . البته توجه داشته باشید که از این به بعد لازم نیست که حالتی به صورت یاد شده در بالا آماده شده باشد و تنها اگر به شکل رابطه (۲—۳) باشد به آن یک حالت به طور کلاسیک همبسته گوییم .

اصطلاح به طور کلاسیک همبسته نباید باعث ایجاد سوء تفاهم شود و این حالت ها کاملا با حالت های کلاسیکی همبسته تطابق ندارند . فرض کنید چندین جفت جعبه که هر کدام شامل توپ های قرمز و یا توپ های آبی به ترتیب با احتمال $p_۱$ یا $p_۲$ است در اختیار داریم ($p_۱ + p_۲ = ۱$) . وقتی در جعبه ها باز می شوند ، همبستگی میان رنگ ها که شبیه به همبستگی میان اندازه گیری مولفه های اسپینی در جهت محور z برای یک حالت کوانتومی همبسته‌ی کلاسیکی است ، مشاهده می شود ،

$$\begin{aligned} \rho^{AB} &= p_۱|۰^A, ۰^B\rangle\langle ۰^A, ۰^B| + p_۲|۱^A, ۱^B\rangle\langle ۱^A, ۱^B| \\ &= p_۱|۰^A\rangle\langle ۰^A| \otimes |۰^B\rangle\langle ۰^B| + p_۲|۱^A\rangle\langle ۱^A| \otimes |۱^B\rangle\langle ۱^B| \qquad (۵—۲) \end{aligned}$$

حالت های $\langle ۰|$ و $\langle ۱|$ به دو رنگ مذکور مربوط می شوند . حال اگر اندازه گیری ها در پایه ای که نسبت به پایه $\{|۱\rangle, |۰\rangle\}$ چرخیده است انجام شود (که در حالت کلاسیک نمی توان این کار را انجام داد) ، برای رابطه (۲—۵) بافرض $p_۱ = p_۲ = \frac{۱}{۲}$ در پایه $\{|۰_x^A\rangle, |۱_x^A\rangle\}$ به حالت نهایی $\{|۰_x^A\rangle\}$ برای S^A و حالت مرکب زیر منجر می شود .

$$\rho^{AB} \to \acute{\rho}^{AB} = |۰_x^A\rangle\langle ۰_x^A| \otimes \frac{۱}{۲} ۱^B \qquad (٦—۲)$$

همان طور که از رابطه بالا مشخص است ، حالت سیستم B به طور بیشینه آمیخته است و به همین دلیل به طور کامل نامشخص می باشد و نتایج اندازه گیری ها روی دو زیر سیستم غیرهمبسته است .

۲—۳ جداپذیری و درهم تنیدگی

به نظر می رسد که روشن کردن برخی مفاهیم لازم باشد : حالت ρ^{AB} یک سیستم مرکب وقتی جداپذیر است که‌بتوان آن رابه صورت ترکیب محدبی از حالت های حاصل ضربی رابطه (۲—۳) نوشت .