بسم الله الرحمن الرحيم

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

مهندسی برق – گرایش مخابرات

آنالیز ظرفیت در کانال نقطه به نقطه دوطرفه گوسی با اطلاعات جانبی جزئی

نرگس منعمی‌زاده

استاد راهنما:

دکترقوشه عابد هدتنی

مهرماه ۱۳۹۳

تقدیر و تشکر

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت و این بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه‌سار بنده نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید.

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است به استوارترین تکیه‌گاهم دستان پرمهر پدرم، به سبزترین نگاه زندگیم چشمان مهربان مادرم که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی‌کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم امروز هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما. رهاوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید بوسه بر دستان پرمهرتان.

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر قوشه عابد هدتنی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کار ساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر نمایم.

تقدیم به برادر عزیزم مصطفی: که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بود و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من است.

تقدیم به خواهران مهربانم: که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

چکیده

در این پایان‌نامه به آنالیز ظرفیت در حضور اطلاعات جانبی(کامل و جزئی) برای کانال‌های تک کاربره دوطرفه گوسی در دو حالت خاص می‌پردازیم. در حالت الف: به آنالیز ظرفیت در حضور اطلاعات جانبی وابسته به نویز و همچنین اطلاعات جانبی وابسته به ورودی پرداخته و تاثیر چنین وابستگی‌هایی را روی ناحیه ظرفیت بررسی می‌کنیم و همچنین نشان می‌دهیم که برای کانال دوطرفه گوسی با تداخل وابسته به نویز و ورودی، تطبیق(استفاده از پیغام‌های دریافتی در فرآیند کدگذاری) از نقطه نظر ظرفیت بی‌تاثیر است. در حالت ب: به آنالیز ظرفیت کانال تک کاربره دوطرفه گوسی در حضور اطلاعات جانبی جزئی می پردازیم. در این حالت نیز مانند حالت الف با بکارگیری مسئله تطبیق و بدست آوردن یک کران بالای تطبیقی و یک کران پایین غیر تطبیقی و برابری این دو کران می‌توان به ناحیه ظرفیت دست یافت.

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه ۱

فصل دوم : قضیه کدینگ کانال ۵

۲ – ۱) تعاریف مهم ۵

۲ – ۲) مفاهیم اولیه قضیه کدینگ کانال ٦

۲ – ۳) دنباله‌های تواما نوعی ۸

۲ – ٤) قضیه کدینگ کانال ۸

فصل سوم : آنالیز ظرفیت کانالهای تک کاربره یک طرفه در حضور اطلاعات جانبی..... ۱۲

۳ – ۱) مقدمه ۱۲

۳ – ۲) کانالهای تک کاربره یک طرفه گسسته ۱۳

۳ – ۲ – ۱) کانال شانون با اطلاعات جانبی علی در فرستنده..... ۱۳

۳ – ۲ – ۲) کانال با اطلاعات جانبی غیرعلی در فرستنده..... ۱۵

۳ – ۳) کانالهای تک کاربره یک طرفه پیوسته ۱٦

۳ – ۳ – ۱) کانال گوسی ۱۷

۳ – ۳ – ۲) کدینگ کاغذ کثیف کاستا ۱۷

۳–٤) آنالیز ظرفیت کانال با اطلاعات جانبی جزئی ۲۰

۳ – ۵) یک گونه عمومی‌تر از نظریه کاستا ۲۲

فصل چهارم: کانالهای دوطرفه ۲۳

٤ – ۱) مقدمه ۲۳

٤ – ۲) کانال تداخل ۲٤

٤ – ۳) کانال گسسته بدون حافظه دوطرفه ۲٤

٤ – ٤) بررسی کانال گسسته دوطرفه در حضور اطلاعات جانبی ۲۵

٤ – ۵) کانال گوسی دوطرفه در حضور اطلاعات جانبی ۲٦

فصل پنجم: آنالیز ظرفیت کانال دوطرفه گوسی در حضورتداخل وابسته به نویز..... ۲۸

۵ – ۱) مقدمه ۲۸

۵ – ۲) مدل کانال..... ۲۸

۵ – ۳) آنالیز ظرفیت کانال در حالت اول..... ۳۰

۵ – ۳–۱) کران بالای تطبیقی..... ۳۰

۵ – ۳–۲) کران پایین غیر تطبیقی..... ۳۱

٥ – ٤) آنالیز ظرفیت کانال در حالت دوم ٣٣
فصل ششم: آنالیز ظرفیت کانال دوطرفه گوسی با اطلاعات جانبی جزئی در فرستنده‌ها.....٣٤
٦ – ١) مقدمه ٣٤
٦ – ٢) مدل کانال ٣٤
٦ – ٣) نتایج اصلی ٣٥
٦ – ٣–١) کران بالای تطبیقی.....٣٥
٦ – ٣–٢) کران پایین غیر تطبیقی بر مبنای کدینگ کاغذ کثیف کاستا.....٣٧
فصل هفتم: جمع‌بندی و ارائه پیشنهادات ٣٩
مراجع ٤٠

فهرست اشکال

شکل ۲-۱: یک سیستم مخابراتی ٦

شکل ۳-۱: کانال با اطلاعات جانبی علی معلوم در فرستنده ۱۳

شکل ۳-۲: کدینگ با اطلاعات علی معلوم در فرستنده..... ١٤

شکل ۳-۳: مدل کاغذ کثیف کاستا ۱۷

شکل ۳-٤: کانال با اطلاعات جانبی جزئی در فرستنده..... ۲۰

شکل ٤-۱: کانال دو طرفه ۲۳

شکل ٤-۲: کانال تداخل دو کاربره ٢٤

شکل ٤-۳: کانال دوطرفه در حضور اطلاعات جانبی ۲۵

شکل ٦-۱: کانال دو طرفه با اطلاعات جانبی جزئی در فرستنده‌ها..... ۳٤

فهرست اختصارات

AWGN: Additive White Gaussian Noise

BC: Broadcast Channel

CSI: Channel Side Information

CSIR: Channel Side Information at Reciever

CSIT: Channel Side Information at Transmitter

DMC: Discrete Memoryless Channel

DPC: Dirty Paper Coding

IC: Interference Channel

MAC: Multiple Access Channel

ML: Maximum Likelihood

OWC: One-Way Channel

SI: Side Information

TWC: Two-Way Channel

فصل اول

مقدمه

قبل از مقاله اصلی شانون [۱] یعنی در اوایل دهه ۱۹۴۰ تصور می‌شد که انتقال بدون خطای اطلاعات از طریق کانال نویزی غیرممکن می‌باشد. مثلا تصور می‌شد که افزایش نرخ ارسال اطلاعات از طریق یک کانال مخابراتی، احتمال خطا را افزایش می‌دهد. شانون در مقاله بسیار کلیدی خود که باعث شگفتی و تحیر جامعه مخابرات شد با ارائه سه قضیه بنیادین، تئوری اطلاعات را ابداع و پایه-ریزی کرد که بعدها به تئوری شانون نیز معروف شد. هدف تئوری شانون و یکی از کاربردهای جالب و چشمگیر این تئوری، اعلام ممکنات و قله های قابل فتح مخابرات به مهندسین و رهنمون کردن آنها برای طراحی بهینه سیستم‌های مخابراتی می باشد. در حالی که مفهوم ریاضی اطلاعات قبلاً نیز وجود داشت، اما این شانون بود که ارتباط ساخت کدهای بهینه و یک ایده ابتکاری معروف به نام "کدینگ تصادفی"[۱] را برقرار کرد و در نتیجه به مقادیر اطلاعاتی اهمیت موثر داد.

سه قضیه اساسی ارائه شده توسط شانون عبارتند از: (۱) قضیه اول شانون یا قضیه کدینگ منبع که بیان می‌کند کمترین نرخ اطلاعات لازم الارسال از یک منبع یا کمترین نرخ اطلاعات لازم برای توصیف منبع برابر آنتروپی آن است. به بیان دیگر آنتروپی یک منبع، نمایش ریاضی و اقتصادی آن منبع است. (۲) قضیه دوم شانون و یا قضیه کدینگ کانال که بیان می‌کند بیشترین نرخ اطلاعات قابل ارسال از یک کانال نویزی با احتمال خطای به اندازه دلخواه کوچک برابر ظرفیت کانال است. (۳) قضیه (یا اصل) جداسازی کدینگ منبع و کدینگ کانال بود که مخصوصا موجب تسهیل در استفاده از چند منبع می‌شود. از دهه ۱۹۹۰ بر اثر بالارفتن سرعت محاسبات و پیشرفت مستمر ابزارهای ریاضی بهینه‌سازی و پیشرفت فناوری پردازش سیگنالها و کدگذاری، نتایج تئوری اطلاعات وارد مرحله کاربردی شد و صنعت به این تئوری مخصوصا تئوری اطلاعات چند کاربره علاقه نشان داد به طوری که دهه اخیر را می‌توان رنسانسی در تئوری اطلاعات کانالهای مخابراتی بی‌سیم به حساب آورد.

یکی از مسائل مهم مطرح شده در سیستم‌های مخابراتی وجود یا عدم وجود اطلاعات جانبی[۲] در فرستنده یا گیرنده است. در بعضی از سیستمهای مخابراتی که اطلاعات باید از نقطه ای به نقطه ای دیگر فرستاده شود، اطلاعات جانبی در فرستنده و یا گیرنده وجود دارد. این اطلاعات جانبی می تواند به کدگذاری و ارسال و یا کدبرداری اطلاعات کمک کند. بنابراین، عملکرد سیستم بسیار متاثر از میزان اطلاعات جانبی موجود در دو طرف ارتباط یعنی در فرستنده و گیرنده می‌باشد. مطالعه کانال‌های

۱-Random coding

۲-Side information

مخابراتی با تداخل معلوم در فرستنده‌ها به عنوان اطلاعات جانبی، یکی از شاخه‌های مطالعاتی است که در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری از متخصصین تئوری اطلاعات بوده است. در حقیقت در این کانالها، فرستنده‌ها می‌توانند با بهره بردن از اطلاعات جانبی، تاثیر منفی تداخل را تا حد ممکن کاهش داده و به مخابره‌ای مطمئن با نرخ بالا و در مواردی با نرخی برابر با نرخ کانال‌های بدون تداخل دست یابند. اطلاعات جانبی الزاماً به صورت تداخل نمی‌باشد بلکه می‌تواند حالت کانال یا دیگر اطلاعات موجود برای فرستنده یا گیرنده باشد.

در نظریه اطلاعات علاقه‌مندیم در وضعیت‌های مختلف، ظرفیت کانال یا حداکثر نرخ اطلاعات قابل ارسال روی کانال‌های مختلف را بیابیم. یکی از این وضعیت‌ها همانطور که بیان شد، کانال با اطلاعات جانبی می‌باشد. وجود اطلاعات جانبی در کدگذارها و کدبردارهای سیستم‌های مخابراتی می‌تواند ظرفیت را تحت‌تاثیر قرار دهد. در واقع یافتن ظرفیت قابل اطمینان یک فرستنده و یک گیرنده در حضور اطلاعات جانبی مسئله‌ای به قدمت خود تئوری اطلاعات است. کانال یک‌طرفه[۳] تک کاربره با اطلاعات جانبی معلوم در فرستنده اولین بار توسط شانون [۱] مورد مطالعه قرار گرفت. او توانست ظرفیت یک کانال یک طرفه گسسته بدون حافظه تک‌کاربره را در حضور اطلاعات جانبی علی معلوم در فرستنده تعیین کند. ظرفیت کانال یک‌طرفه گسسته بدون حافظه تک‌کاربره با اطلاعات جانبی غیرعلی معلوم در فرستنده توسط گلفند و پینسکر [۲] بدست آمد. گونه گوسی کانال گلفند–پینسکر توسط کاستا [۳] مورد مطالعه قرار گرفت. کاستا با معرفی کدینگ کاغذ کثیف[٤] و با تعمیم تئوری ظرفیت الفبا گسسته گلفند–پینسکر به کانال گوسی با الفبای پیوسته، توانست نشان دهد که ظرفیت کانال گوسی با تداخل گوسی معلوم در فرستنده، مستقل از توان تداخل می‌باشد. کدینگ کاغذ کثیف کاستا در حقیقت یک فرستنده بهینه با کلمات کدی در جهت تداخل معلوم، ارائه می‌دهد تا سیگنال ارسال شده را تا حذف کامل اثر تداخل به جای تلاش برای مبارزه با آن تطبیق دهد. اخیرا گونه عام تر کدینگ کاغذ کثیف کاستا در [٤] مطالعه شده است.

اغلب شبکه‌های مخابراتی بی‌سیم، دوطرفه می‌باشند که در آنها گره‌ها هم بعنوان منبع و هم بعنوان مقصد پیغام‌ها عمل می‌کنند. مطالعه تئوری اطلاعاتی کانال دوطرفه اولین بار توسط شانون انجام شد [۵] جایی که او توانست یک کران خارجی و یک کران داخلی برای ناحیه ظرفیت این کانال بدست آورد. تا به امروز همه تلاشها برای تعیین ناحیه ظرفیت این کانال با شکست مواجه شده است اما با این وجود، کرانهای ظرفیتی بهتری نسبت به آنچه شانون ارائه کرده بود، بدست آمده است. برای مثال می‌توان به مقاله هَن [٦] تحت عنوان "یک الگوی کاربردی کدینگ برای کانال عمومی دوطرفه گسسته و بدون حافظه" اشاره نمود که در آن یک ناحیه نرخ قابل حصول ارائه شده که بهتر از کران داخلی شانون می‌باشد. هَن همچنان توانست ناحیه ظرفیت کانال دوطرفه بدون حافظه گوسی را نیز بیابد و نشان دهد برای این کانال، کران خارجی و کران داخلی شانون بر هم منطبق هستند، بنابراین توانست ناحیه ظرفیت این کانال را

---

[۳]- One way channel

[٤]- Dirty paper coding

بدست آورد. ژانگ و همکارانش [۷] نیز توانستند کران خارجی شانون را بهبود دهند. کانال دوطرفه با اطلاعات جانبی غیرعلی کامل در [۸] مورد بررسی قرار گرفته شده است که در آن یک ناحیه نرخ قابل حصول برای حالت گسسته و بدون حافظه این کانال تعیین شده است. علاوه بر آن نویسندگان در [۸] بسط و گسترش نتایج بدست آمده به مدل گوسی آن توانستند گونه دوطرفه مسئله نوشتن روی کاغذ کثیف کاستا را نیز بیابند و نشان دهند ناحیه ظرفیت کانال دوطرفه گوسی با تداخل‌های جمع شونده معلوم در فرستنده ها برابر با ناحیه ظرفیت کانال دو طرفه گوسی بدون تداخل است.

برای کانال‌های گوسی خطی با تداخل گوسی جمع شونده معلوم در فرستنده، دو استراتژی کدینگ عمده استفاده شده جهت کاهش اثر مخرب تداخل عبارتند از: (۱) سبدگذاری تصادفی گوسی[۵] و یا کدینگ کاغذ کثیف کاستا و (۲) سبدگذاری با ساختار خطی[۶] و یا لتیس کدینگ[۷]. مثال‌هایی وجود دارد که نشان می‌دهد که از دیدگاه ظرفیتی، استراتژی‌های لتیس عملکرد بهتر و یا حداقل برابری با عملکرد استراتژی‌های کاستا دارند. کانال کثیف کاستا به عنوان یک کانال تک‌کاربره نمونه‌ای از کانال‌هایی است که در آن استراتژی کاستا عملکرد یکسانی با استراتژی لتیس دارد. برای کانال‌های چندکاربره نظیر کانال با دسترسی چندگانه گوسی با کثیفی دوگانه گوسی[۸] [۱۰]، [۱۱]، [۱۷] و [۱۸] نشان داده شده است که استراتژی لتیس دارای عملکرد بهتری نسبت به استراتژی کاستا است.

کدینگ کاغذ کثیف با اطلاعات جانبی جزئی که بطور غیرعلی در فرستنده معلوم است نیز در برخی کانال‌ها بررسی شده است [۹] و [۱۱]. اطلاعات جانبی جزئی که بوسیله استراتژی حس کردن بدست می‌آید می‌تواند به عنوان یک کانال فشرده مدل شود که تولید مقداری اعوجاج روی اطلاعات جانبی می‌کند. ظرفیت کانال کاغذ کثیف با اطلاعات جانبی جزئی توسط سیراک و گوگن در [۹] بدست آمد و آنها توانستند نشان دهند که ظرفیت کانال کاغذ کثیف با اطلاعات جانبی جزئی می‌تواند معادل با ظرفیت کانال کاغذ کثیف با اطلاعات جانبی کامل بدست آید به‌طوری‌که واریانس نویز در دومی با مجموع واریانس نویز و توان اعوجاج در اولی جایگزین شود. در حقیقت آنها نشان دادند که در اختیار داشتن اطلاعات جانبی جزئی کاهش ظرفیت را به‌دنبال دارد. چنین نتیجه‌ای را بهمنی و هدتنی [۱۱] نیز برای کانال دسترسی چندگانه گوسی که دو تداخل گوسی بطور جزئی در فرستنده‌ها معلوم است بدست آوردند.

در ادامه پس از بیان مقدمه فوق، در فصل دوم به بیان تعاریف و مقدمات لازم و همچنین قضیه کدینگ کانال و اثبات آن می‌پردازیم. در فصل سوم روی مسئله کدینگ کانال در حضور اطلاعات جانبی تمرکز کرده و آنالیز ظرفیت کانال‌های تک کاربره یک طرفه و بویژه کدینگ کاغذ کثیف کاستا در حضور اطلاعات جانبی کامل و جزئی بررسی می‌شود. در فصل چهارم با توجه به اهمیت کانال‌های

---

[۵]- Gaussian random binning
[۶]- Linear structured binning
[۷]- Lattice coding
[۸]- Gaussian doubly dirty multiple access channel

دوطرفه در سیستم‌های مخابرات بی‌سیم، به آنالیز ظرفیت کانال‌های دوطرفه در حضور اطلاعات جانبی پرداخته می‌شود. در فصل پنجم آنالیز کانال دوطرفه گوسی در حضور تداخل وابسته به نویز بررسی می‌شود، در فصل ششم آنالیز کانال دوطرفه گوسی در حضور اطلاعات جانبی جزئی مورد بحث قرار می‌گیرد و در انتها و در فصل هفتم به جمع بندی مطالب بیان شده و ارائه پیشنهادهایی می‌پردازیم.

فصل دوم:

قضیه کدینگ کانال و تعاریف اولیه

در این فصل پس از مرور اجمالی تعاریف و مفاهیم اولیه تئوری اطلاعات، به بررسی کامل قضیه کدینگ کانال و اثبات آن پرداخته و از طریق آن سعی می‌شود تا دید لازم برای بررسی کدینگ کانال در حضور اطلاعات جانبی بدست آید.

۲-۱: تعاریف مهم

تعریف۱) کانال: کانال یک محیط فیزیکی است که ممکن است برای انتقال اطلاعات یا برای ذخیره اطلاعات و یا به عنوان هر فرآیند فیزیکی روی داده یا منبع استفاده شود. در حقیقت کانال وسیله‌ایست که خروجی موردنظر را با دریافت یک یا چند ورودی به ما می‌دهد. یک خط تلفن اتصال دهنده بین دو دستگاه تلفن[۱]، پخش برنامه‌ها از مرکز رادیو به دستگاههای رادیویی، شبکه اینترنت و غیره مثال‌هایی از انواع کانال‌ها می‌باشند.

می‌توان به کانال دو نگاه زیر را داشت:

۱. نگاه قبل از تئوری اطلاعات یا نگاه وینری: شناخت خوب محیط یا همان کانال از ویژگی‌های این نگاه است بدین معنا که روی محیط کاری کنیم تا سیگنال ارسالی کمتر دستخوش تغییرات شود و در صورت تغییرات، نوع فرآیند شناخته شود تا بتوان به صورت بهینه نویز را از سیگنال دریافتی حذف نمود. در واقع حذف بهینه نویز و یا همان فیلترینگ وینری انجام دهیم یعنی نویز را خوب بشناسیم و به صورت بهینه فیلترش کنیم.

۲. نگاه از منظر تئوری اطلاعات و یا نگاه شانونی: این نگاه یعنی کار کردن با سیگنالها، محیط بد باشد یا خوب، کاری به آن نداشته باشیم و سیگنال ارسالی را طوری انتخاب کنیم که در برابر نویز مقاومت بیشتری داشته باشد.

تعریف ۲: انواع کانال‌ها:

۱. کانال الفبا گسسته[۱]: به کانالی گفته می‌شود که ورودی و خروجی کانال الفبای محدود داشته باشند. به عنوان مثال دو مجموعه زیر را داریم:

$$\mathcal{X} = \{۰,۱\} \; ; \mathcal{Y} = \{۰,۱,۲\}$$

[۱] -Discrete alphabet channel

۲. کانال الفبا پیوسته[۲]: به کانالی گفته می شود که ورودی و خروجی کانال هر دو پیوسته باشند یعنی مثلا زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی و یا مختلط باشند.

۳. کانال الفبا مختلط: به کانالی گفته می شود که یکی از الفباهای ورودی و یا خروجی گسسته و دیگری پیوسته باشد. به عنوان مثال شدت نور که پیوسته است به عنوان ورودی و تعداد فوتونها که گسسته می‌باشد به عنوان خروجی در نظر گرفته شود.

٤. کانال نویزی: کانالی است که معمولاً پیغام‌های ورودی را دچار خطا می‌سازد.

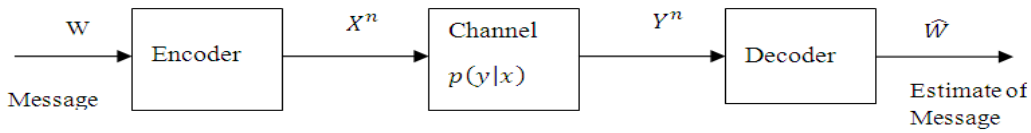
تعریف۳) کانال الفبا گسسته بدون حافظه: یک کانال گسسته که با $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ مشخص می‌شود یک اتصال فیزیکی و یا انتزاعی ورودی $x \in \mathcal{X}$ و خروجی $y \in \mathcal{Y}$ است که شامل دو مجموعه متناهی از $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ و یک مجموعه از توابع احتمال $p(y|x)$ است. گفته می‌شود کانال بدون حافظه است اگر توزیع احتمال خروجی فقط به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد و به طور شرطی مستقل از ورودی‌ها و خروجی‌های قبلی کانال باشد یعنی داشته باشیم:

$$p(y_k|x^k, y^{k-1}) = p(y_k|x_k) \quad k = 1,2,\dots,n$$

۲-۲: مفاهیم اولیه قضیه کدینگ کانال

قبل از عنوان کردن این قضیه دانستن مفاهیم زیر ضروری به نظر می‌رسد. برای هر دنباله n تایی نوعی[۳] ورودی X، تقریبا $2^{nH(Y|X)}$ دنباله ممکن Y وجود دارد که احتمال وقوع همه آنها یکسان است. آنچه مد نظر ماست این است که هیچ یک از دو دنباله X، دنباله یکسانی از Y تولید نکنند، در غیر این صورت نمی‌توانیم تصمیم بگیریم که کدام X ارسال شده است. تعداد کل همه دنباله‌های ممکن Y تقریبا $2^{nH(Y)}$ است. این مجموعه باید به مجموعه‌هایی با اندازه $2^{nH(Y|X)}$ مطابق با دنباله‌های متفاوت ورودی X تقسیم شود.

تعداد کل مجموعه‌های مجزا از هم کمتر یا مساوی $2^{n\left(H(Y)-H(Y|X)\right)} = 2^{nI(X;Y)}$ می‌باشد. بنابراین ما می‌توانیم تقریبا $2^{nI(X;Y)}$ دنباله متمایز با طول n ارسال کنیم.



شکل ۲-۱: یک سیستم مخابراتی

حال، یک سیستم مخابراتی مطابق شکل ۲-۱ را تحلیل می‌کنیم. پیغام W که به صورت مجموعه $\{1,2,\dots M\}$ در نظر گرفته می‌شود، سیگنال $X^n(W)$ را که به صورت دنباله تصادفی

---

[۲] - Continous alphabet channel

[۳] -Typical sequences

$Y^n \sim p(y^n|x^n)$ توسط گیرنده دریافت می‌شود، نتیجه می‌دهد. سپس گیرنده با قانون آشکارسازی $\widehat{W} = g(Y^n)$، W را حدس می‌زند. اگر $\widehat{W}$ همان W ارسال شده نباشد، آنگاه گیرنده اعلام خطا می‌کند.

نکته: یک کد (M,n) برای کانال $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ شامل موارد زیر است:

۱- یک مجموعه پیغام $\{۱,۲,\dots,M\}$.

۲- یک تابع رمزگذار به صورت $X^n: \{۱,۲,\dots,M\} \to \mathcal{X}^n$ که کلمات کد $X^n(۱), X^n(۲), \dots, X^n(M)$ را نتیجه می‌دهد. به این مجموعه کلمات کد، کتاب کد گفته می‌شود.

۳- یک تابع آشکارساز به صورت $g: \mathcal{Y}^n \to \{۱,۲,\dots,M\}$.

تعریف ٤) احتمال خطای آشکارسازی:

$$\lambda_i = P_r\big(g(Y^n) \neq i | X^n = X^n(i)\big) = \sum_{y^n} p\big(y^n|x^n(i)\big) I(g(y^n) \neq i)$$

رابطه بالا احتمال خطای شرطی است در صورتی که پیغام i فرستاده شده باشد جایی که $I(\cdot)$ تابع مشخصه می‌باشد.

بیشترین احتمال خطای $\lambda^{(n)}$ برای یک کد (M,n) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda^{(n)} = \max_{i \in \{۱,۲,\dots,M\}} \lambda_i$$

میانگین حسابی احتمال خطای $P_e^{(n)}$ برای یک کد (M,n) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_e^{(n)} = \frac{۱}{M} \sum_{i=۱}^{M} \lambda_i$$

توجه داشته باشیم که $P_e^{(n)} = Pr\big(I \neq g(Y^n)\big)$. بدیهی است که $P_e^{(n)} \leq \lambda^{(n)}$.

تعریف ٥) نرخ قابل حصول[٤]: نرخ R قابل حصول است اگر دنباله‌ای از $(۲^{nR}, n)$ کد وجود داشته باشد به‌طوری که $\begin{cases} \lambda^{(n)} \to ۰ \\ n \to \infty \end{cases}$.

تعریف ٦) ظرفیت یک کانال گسسته بدون حافظه: این ظرفیت برابر است با بزرگترین نرخ قابل حصول و یا بیشترین نرخ اطلاعاتی است که می‌توان از یک کانال عبور داد. بنابراین همه نرخ‌های کمتر از ظرفیت بطور قراردادی، احتمال خطای کمتری را برای بلوک‌های با طول به اندازه کافی بزرگ نتیجه می‌دهد.

[٤] -Achievable rate

کانال گسسته و بدون حافظه شانون، سه تایی $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ است که $\mathcal{X}$ الفبای ورودی و $\mathcal{Y}$ الفبای خروجی است. شانون ظرفیت این کانال را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

جایی که ماکزیمم روی همه توزیع‌های ورودی ممکن $p(x)$ اتفاق می‌افتد چرا که $I(X;Y)$ فقط تابع دو توزیع است یعنی تابع $p(x)$ و $p(y|x)$. از آنجا که $p(y|x)$ صفت و ویژگی کانال است و دست ما نمی‌باشد پس فقط باید روی $p(x)$ آن را در نظر بگیریم.

۲-۳: دنباله‌های تواما نوعی[۵]:

مجموعه $A_\varepsilon^{(n)}$ از دنباله‌های تواما نوعی $\{(x^n, y^n)\}$ با در نظر گرفتن توزیع $p(x,y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\varepsilon^{(n)} = \Big\{(x^n, y^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \Big|-\frac{1}{n}\log p(x^n) - \mathrm{H}(X)\Big| < \varepsilon ,$$
$$\Big|-\frac{1}{n}\log p(y^n) - \mathrm{H}(Y)\Big| < \varepsilon , \Big|-\frac{1}{n}\log p(x^n, y^n) - \mathrm{H}(X,Y)\Big| < \varepsilon\Big\}$$

که در آن $p(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$.

نکته: اگر $p(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$ و (X^n, Y^n) دنباله‌هایی با طول n باشند آنگاه داریم:

۱. $\Pr\left((X^n, Y^n) \in A_\varepsilon^{(n)}\right) \to 1 \text{ as } n \to \infty$

۲. $\left|A_\varepsilon^{(n)}\right| \le 2^{n(\mathrm{H}(X,Y)+\varepsilon)}$

۲-۴: قضیه کدینگ کانال[۶] یا قضیه دوم شانون:

مطابق با این قضیه، برای یک کانال گسسته بدون حافظه[۷]، همه نرخ‌های کمتر از (ظرفیت کانال) C قابل حصول می‌باشند. بطور خاص برای هر نرخ $R < C$ یک دنباله از $(2^{nR}, n)$ کد با ماکزیمم احتمال خطای $\lambda^{(n)} \to 0$ وجود دارد.

قضیه ظرفیت شامل دو بخش اساسی به صورت زیر است:

۱- بخش مستقیم یا قابل حصول بودن نرخ:

برای هر دنباله از $(2^{nR}, n)$ کد، اگر $R < C$ باشد آنگاه برای $n \to \infty$ داریم $P_e^{(n)} \to 0$.

---

[۵] - Jointly typical sequences

[۶] -Channel coding theorem

[۷] -Discrete memoryless channel

۲- بخش معکوس:

برای هر دنباله از $(۲^{nR}, n)$ کد، اگر $R > C$ باشد آنگاه برای $n \to \infty$ داریم $P_e^{(n)} \to ۱$.

قضیه کدینگ کانال نویزی شانون، مخابره قابل اطمینان را از طریق کانال‌های نویزی ممکن می‌سازد زیرا نرخ مخابره‌ای است که زیر یک آستانه معین یعنی همان ظرفیت کانال قرار دارد. ظرفیت یک کانال با سیستم‌های کدینگ و دکدینگ مناسب قابل حصول می‌باشد.

در حقیقت بنیادی‌ترین معیار محدودیت‌های عملکرد یک سیستم مخابراتی، ظرفیت و ناحیه ظرفیت است. در سیستم‌هایی نظیر کانال شانون که فقط یک پیام از یک منبع به یک مقصد ارسال می‌شود، ظرفیت یک عدد است و در سیستم‌هایی نظیر کانال پخش[۸]، کانال دستیابی چندگانه[۹] و کانال تداخل[۱۰] که ارسال بیش از یک پیام مستقل و یا مشترک از یک و یا چند منبع به یک یا چند مقصد مطرح است، ناحیه ظرفیت تعریف می‌شود. تئوری اطلاعات در تعیین ظرفیت و یا ناحیه ظرفیت با چالش‌های فراوانی روبروست و از این جهت ظرفیت سیستم‌ها را در حالت‌های خاص تعیین می‌کنند و یا کران‌های بالایی و پایینی را برای ظرفیت و کران‌های خارجی و داخلی را برای نواحی ظرفیت محاسبه می‌کند.

اثبات بخش مستقیم قضیه ظرفیت:

۱- تولید کتاب کد تصادفی[۱۱]: تولید ۲^{nR} کلمه کد به طور تصادفی، یکنواخت و مستقل مطابق با توزیع زیر:

$$P(x^n) = \prod_{i=۱}^{n} p(x_i)$$

۲- در نظر گرفتن کتاب کد به صورت زیر:

$$C = \begin{pmatrix} x_۱(۱) & \cdots & x_n(۱) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_۱(۲^{nR}) & \cdots & x_n(۲^{nR}) \end{pmatrix}$$

هر عضو از این ماتریس بطور مستقل مطابق با توزیع $p(x)$ تولید می‌شود، بنابراین احتمال تولید یک کد خاص ℓ به صورت زیر می‌باشد:

$$Pr(\ell) = \prod_{w=۱}^{۲^{nR}} \prod_{i=۱}^{n} p\big(x_i(w)\big).$$

حال دنباله وقایع زیر را در نظر بگیرید:

۱- تولید یک کد تصادفی ℓ مطابق با توزیع $p(x)$.

---

[۸] – Broadcast channel

[۹] – Multiple access channel

[۱۰] – Interference channel

[۱۱] – Code book generation

۲- آشکار شدن این کد ℓ برای هر دو طرف فرستنده و گیرنده.

۳- انتخاب پیغام W مطابق با توزیع یکنواخت زیر:

$$Pr(W = w) = ۲^{-nR},\ \ w = ۱,۲, \dots, ۲^{nR}$$

٤- کلمه کد w ام از $\mathrm{X^n(w)}$، مطابق با ردیف w ام از ℓ از طریق کانال فرستاده می‌شود.

٥- گیرنده دنباله $\mathrm{Y^n}$ را مطابق با توزیع زیر دریافت می‌کند:

$$p(y^n|x^n(w)) = \prod_{i=۱}^{n} p(y_i|x_i(w)).$$

٦- گیرنده حدس می‌زند که کدام پیغام فرستاده شده است. توجه شود که پروسه بهینه برای می‌نیمم کردن احتمال خطا، آشکارسازی بیشترین شباهت (ML)[۱۲] می‌باشد اما این پروسه برای تحلیل بسیار مشکل می‌باشد پس به جای آن ما از آشکارسازی مجموعه‌های نوعی استفاده می‌کنیم. آشکارسازی توسط این مجموعه‌ها ساده‌تر و تقریبا نزدیک به بهینه است.

گیرنده در صورت ارضای شرایط زیر اعلام می‌دارد که $\widehat{W}$ ارسال شده است:

۱- $\left(X^n(\widehat{W}), Y^n\right)$ تواما نوعی باشند.

۲- هیچ $W' \neq \widehat{W}$ وجود نداشته باشد به‌طوریکه $\left(X^n(W'), Y^n\right) \in A_\epsilon^{(n)}$ باشند.

۳- اگر هیچ $\widehat{W}$ وجود نداشته باشد و یا بیشتر از یکی وجود داشته باشد آنگاه خطا رخ داده است.

٤- اگر $W \neq \widehat{W}$ باشد آنگاه خطا آشکار می‌شود.

نکات کلیدی شانون در این قضیه:

۱- احتمال خطای بسیار کوچک اما غیر صفر قابل پذیرش می‌باشد.

۲- محاسبه احتمال متوسط خطا روی یک انتخاب تصادفی از کتاب‌های کد.

۳- استفاده پی در پی از کانال.

ایده‌های پشت اثبات:

۱- انتخاب کد تصادفی.

۲- احتمال متوسط خطا.

۳- اثبات توسط دنباله‌های توام نوعی: یعنی جستجو برای کلمه کدی که با دنباله دریافتی به طور توام نوعی است.

[۱۲]- Maximum likelihood

نکاتی پیرامون قضیه کدینگ کانال:

۱- از کدینگ تصادفی بعنوان اثبات این قضیه استفاده می‌شود.

۲- تواما نوعی بودن به عنوان یک قانون برای آشکارسازی محسوب می‌شود.

۳- این قضیه نشان می‌دهد کدهای خوب با احتمال خطای بسیار کوچک وجود دارد.

٤- این قضیه راهی برای ساختن بهترین کدها ارائه نمی‌دهد.

۵- اگر کد به صورت تصادفی و با توزیع مناسب تولید شود آنگاه کد خوبی تلقی شده ولی آشکارسازی آن دشوار خواهد بود.

فصل سوم

آنالیز ظرفیت کانال‌های تک کاربره یک‌طرفه در حضور اطلاعات جانبی

۳-۱: مقدمه

نظریه مخابرات با اطلاعات جانبی به عنوان یک انشعاب بین دو حالت اطلاعات جانبی علی[۱۳] و اطلاعات جانبی غیرعلی[۱٤] تشکیل شده است. محرک و انگیزه اصلی برای اطلاعات جانبی غیرعلی از ذخیره‌سازی اطلاعات و پنهان سازی اطلاعات ایجاد می‌شود در حالی که اطلاعات جانبی علی، گرفتن تغییرات موقتی کانال است که فقط ممکن است بر مبنای مشاهدات قبلی پیگیری و دنبال شود.

تعیین ظرفیت مخابرات قابل اطمینان بین یک فرستنده و گیرنده در حضور اطلاعات جانبی مساله‌ای به قدمت خود تئوری اطلاعات می‌باشد. سیگنال اطلاعات جانبی کانال[۱۵] یا(CSI) می‌تواند در دسترس فرستنده[۱٦] (CSIT) و یا در دسترس گیرنده[۱۷] (CSIR) و یا در دسترس هر دو باشد. این کانال‌ها در طی سالها بطور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته اند و می‌توانند برای مدل‌سازی در رنج وسیعی از مسائلی که در آن اطلاعات جانبی کانال مطرح است در نظر گرفته شوند. نکته دیگری که باید مدنظر قرار دهیم این است که باید بین کانال‌هایی که دارای CSIT علی است با آنهایی که CSIT غیرعلی است تمایز قائل شویم. در مورد علی، ارسال در هر لحظه فقط به گذشته و حال CSI بستگی دارد در حالی که در مورد غیرعلی، فرستنده پیشتر کل دنباله جانبی را از ابتدا تا انتهای بلوک می‌داند. مدل کانال CSIT علی در سال ۱۹۵۸ توسط شانون معرفی شد [۱] کسی که توانست ظرفیت این کانال را نیز بیابد. در واقع با تعریف شانون از ظرفیت با اطلاعات جانبی علی و معرفی مدل کانال CSIT غیرعلی در سال ۱۹۷٤ توسط کازانتسف و تیسباکوف و تعیین ظرفیت آن توسط گلفند و پینسکر در سال ۱۹۸۰ [۲]، تئوری مخابرات با اطلاعات جانبی علی و همچنین غیرعلی شروع به رشد و توسعه کرد.

بعدها کایره و شامای نشان دادند [۱۰] وقتی اطلاعات جانبی در فرستنده یک تابع معلوم از اطلاعات جانبی در گیرنده باشد، کدهای قابل حصول می‌توانند بطور مستقیم روی الفبای ورودی ساخته شوند و یا به عبارت دیگر اگر اطلاعات جانبی در فرستنده یک تابع معلوم و معین از اطلاعات جانبی در گیرنده باشد یعنی $S_T = f(S_R)$ آنگاه ظرفیت با اطلاعات جانبی علی برابر با ظرفیت با اطلاعات جانبی غیرعلی می شود. نکته مهم دیگر این است که با در نظر گرفتن CSIR تمایزی بین CSI علی و غیرعلی در گیرنده

---

[۱۳]- Casual side information

[۱٤]- Non-Casual side information

[۱۵]- Channel side information

[۱٦]- Channel side information at transmitter

[۱۷]- Channel side information at receiver