وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

جبرهای نرم دار متشکل از توابع مشتق پذیر

توسط:

شادی محمدخواه

استاد راهنما:

دکتر مرتضی ابطحی ایوری

استاد مشاور:

دکتر غلامرضا عباسپور

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

جبرهای نرم دار متشکل از توابع مشتق پذیر

توسط:

شادی محمدخواه

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش آنالیز)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر مرتضی ابطحی ایوری استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر غلامرضا عباسپور استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محمد رمضانپور استادیار دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر سید ناصر هاشمی استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادرم

و

خواهر و برادران عزیزم

سپاسگزاری

ستایش...

مخصوص خداست که، هستی او اول است، بی آنکه قبل از او اولی باشد و آخر است، بی آنکه بعد از او آخر و انتهایی باشد و ستایش مخصوص خداست که خود را به ما شناساند و از نعمت بی نهایت شکرش بهره ای به ما الهام کرد و از درهای نامتناهی علم به ربوبیتش، بر ما گشود.

سپاس و قدردانی فراوان خدمت پدر و مادر گرامی ام به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند. سپاس و قدردانی فراوان از زحمات بی دریغ و تلاشهای بی وقفه استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مرتضی ابطحی که در راستای انجام این پایان نامه با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده اند.

همین طور از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر غلامرضا عباسپور در سمت استاد مشاور تشکر می کنم و از اساتید بزرگوار آقایان دکتر اصفهانی و دکتر رمضانپور که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند سپاسگزاری می‌کنم.

زندگی صحنه یکتای هنرمندی ماست

هر کسی نغمه خود خواند و از صحنه رود

صحنه پیوسته بجاست

خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد.

چکیده

جبرهای نرم دار متشکل از توابع مشتق پذیر

به وسیله‌ی:

شادی محمدخواه

فرض کنیم X یک زیرمجموعه فشرده و کامل از صفحه مختلط باشد. فرض کنیم $D^1(X)$ جبر متشکل از تمام توابع مختلط مقدار به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی X باشد. $D^1(X)$ همراه با نرم زیر یک جبر تابعی نرم‌دار است

$$\|f\|_1 = |f|_X + |f'|_X \qquad (f \in D^1(X)).$$

یک مسأله مهم درباره این جبر، مسأله کامل بودن آن است. مثال‌هایی از مجموعه فشرده و کامل X وجود دارد که جبر نرم‌دار $(D^1(X), \|\cdot\|_1)$ کامل نیست.

در این پایان‌نامه به بررسی این مسأله می‌پردازیم و شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن $D^1(X)$ کامل است. به علاوه به مسأله کامل سازی این جبر می‌پردازیم.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

جبرهای نرم‌دار متشکل از توابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر روی مجموعه فشرده و کامل X برای اولین بار توسط دیلز و دیو در سال ۱۹۷۳ ارائه شد [۱۲]. این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد در فصل اول برخی تعاریف و قضایای مقدماتی از آنالیز ریاضی و جبرهای باناخ ارائه می‌دهیم. در فصل دوم جبر نرم‌دار متشکل از توابع مشتق‌پذیر $D^1(X)$ را تعریف می‌کنیم و مثالی از مجموعه فشرده و کامل X ارائه خواهیم داد که $D^1(X)$ کامل نیست سپس به بررسی کامل بودن این جبر می‌پردازیم و شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن $D^1(X)$ کامل است به عنوان مثال نشان می‌دهیم برای مجموعه فشرده و کامل X جبر نرم‌دار $(D^1(X), \|\cdot\|_1)$ کامل است اگر و فقط اگر به ازای هر $z \in X$، ثابت $C_z > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $w \in X$ و برای هر $f \in D^1(X)$،

$$|f(w) - f(z)| \leq C_z |w - z| \big(|f|_X + |f'|_X\big).$$

در فصل سوم به مسأله کامل سازی $D^1(X)$ می‌پردازیم، برای این منظور مفهوم جدیدی از مشتق که بر اساس خانواده‌ای سودمند از مسیرها در X تعریف می‌شود معرفی می‌کنیم. چنانچه $\mathcal{F}$ خانواده مورد نظر از مسیرها در X باشد، $D^1_{\mathcal{F}}(X)$ را مجموعه تمام توابع پیوسته f قرار می دهیم که دارای مشتق به مفهوم جدید است و نشان می‌دهیم اولاً $D^1_{\mathcal{F}}(X)$ یک جبر تابعی باناخ است و ثانیاً $D^1(X) \subseteq D^1_{\mathcal{F}}(X)$ و در بسیاری از موارد $D^1_{\mathcal{F}}(X)$ کامل شده $D^1(X)$ است به عنوان مثال نشان می‌دهیم که اگر X اجتماع متناهی از مجموعه‌های منظم باشد و $\mathcal{F}$ خانواده تمام مسیرهای جردن طولپذیر در X باشد آن‌گاه $D^1(X) = D^1_{\mathcal{F}}(X)$.

در فصل چهارم برخی شرایط که تحت آن $D^1(X)$ کامل نیست را بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات

در ابتدا به بیان چند قرارداد می‌پردازیم

(۱) در سراسر این پایان‌نامه خط حقیقی را با $\mathbb{R}$ و صفحه مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم

$$\mathbb{I} = [۰, ۱], \qquad \mathbb{R}^{+} = [۰, \infty), \qquad \mathbb{R}^{+\bullet} = (۰, \infty)$$

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}, \quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}, \quad \Delta = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}.$$

(۲) تابع همانی روی $\mathbb{C}$، $z \mapsto z$، یا تحدید این تابع روی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ را با z نمایش می‌دهیم.

(۳) فرض کنیم (a_n) دنباله‌ای در $\mathbb{R}^{+}$ و (b_n) دنباله‌ای در $\mathbb{R}^{+\bullet}$ باشد، هرگاه دنباله $(\frac{a_n}{b_n})$ کراندار باشد، می‌نویسیم

$$a_n = O(b_n)$$

و هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = ۰$ ، می‌نویسیم

$$a_n = o(b_n)$$

وقتی $n \to \infty$.

۱-۱ مسیرها در صفحه مختلط

تعریف ۱.۱.۱. یک مسیر در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ یک تابع پیوسته مانند $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ است که a و b اعداد حقیقی هستند و $a < b$. در این صورت γ را یک مسیر از $\gamma(a)$ به $\gamma(b)$ می‌گوییم. چنانچه $\gamma(a) = \gamma(b)$، آن‌گاه γ را یک مسیر بسته گوییم. نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر γ را به ترتیب با γ^- و γ^+ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$\gamma^- = \gamma(a) \qquad , \qquad \gamma^+ = \gamma(b).$$

تعریف ۲.۱.۱. مسیر $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ را یک مسیر جردن [۱] گوییم هرگاه γ یک به یک باشد. چنانچه $\gamma(a) = \gamma(b)$ و γ بر بازه (a, b) یک به یک باشد، آن‌گاه γ را یک مسیر ساده بسته گوییم.

باید توجه داشت که ما هر مسیر را یک نگاشت تعریف می‌کنیم و نه یک مجموعه از نقاط. البته به هر مسیر $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$، یعنی برد γ، مربوط می‌کنیم و آن را با γ^* نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}.$$

دقت می‌کنیم که γ و γ^* با هم متفاوتند. ممکن است دو مسیر متفاوت دارای بردهای یکسانی باشند. به عنوان مثال

$$\gamma_۱(t) = e^{it}, \qquad \gamma_۲(t) = e^{۲it}, \qquad (۰ \leq t \leq ۲\pi)$$

دو مسیر متفاوت هستند ولی برد یکسان دارند. در واقع $\gamma_۲$ دو بار دایره واحد را طی می‌کند در حالیکه $\gamma_۱$ تنها یک بار دایره واحد را می‌پیماید.

تعریف ۳.۱.۱. اگر X زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ باشد یک مسیر در X عبارت است از مسیر γ در $\mathbb{C}$ به طوری که $\gamma^* \subseteq X$.

۲-۱ تابع‌های با تغییر کراندار و مسیرهای طول‌پذیر

بازه فشرده $[a, b]$ که $a < b$ را در نظر می‌گیریم. اگر

$$a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_{n-۱} < x_n = b,$$

[۱] Jordan path

آن‌گاه مجموعه $P = \{x_۰ = a, x_۱, \dots, x_n = b\}$ را یک افراز از بازه $[a,b]$ می‌نامیم. بازه $[x_{k-۱}, x_k]$ را زیربازه kام P می‌نامیم و قرار می‌دهیم $\Delta x_k = x_k - x_{k-۱}$. در این صورت $\sum_{k=۱}^{n} \Delta x_k = b - a$. دسته همه افرازهای ممکن روی $[a,b]$ با نماد $P[a,b]$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. اگر

$$P = \{x_۰ = a, x_۱, \dots, x_n = b\}$$

یک افراز روی $[a,b]$ باشد، به ازای $۱ \le k \le n$ قرار می‌دهیم

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-۱}) \qquad , \qquad \Lambda(f,P) = \sum_{k=۱}^{n} |\Delta f_k|.$$

هرگاه عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر افراز P روی $[a,b]$،

$$\Lambda(f,P) \le M,$$

آن‌گاه گوییم f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است و تغییر کل f روی $[a,b]$ را با $\Lambda(f)$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Lambda(f) = \sup\Big\{\Lambda(f,P) : \text{است } [a,b] \text{ یک افراز بر } P\Big\}.$$

دو قضیه زیر مثال‌هایی از تابع‌های با تغییر کراندار را بدست می‌دهند.

قضیه ۲.۲.۱. *هرگاه $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یکنوا باشد، آن‌گاه f بر این بازه با تغییر کراندار است.*

اثبات. به صفحه ۱۸۹، قضیه ۵.۶ از مرجع [۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۳.۲.۱. *هرگاه $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و f' بر (a,b) موجود و کراندار باشد، آن‌گاه f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است.*

اثبات. به صفحه ۱۸۹، قضیه ۶.۶ از مرجع [۱] مراجعه کنید. □

مثال ۴.۲.۱. فرض کنیم $f(۰) = ۰$ و برای $x \neq ۰$ قرار می‌دهیم $f(x) = x\cos(\frac{\pi}{۲x})$ به آسانی دیده می‌شود که f بر $[۰, ۱]$ پیوسته است. حال افراز

$$P_n = \Big\{۰, \frac{۱}{۲n}, \frac{۱}{۲n-۱}, \dots, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, ۱\Big\}$$

را روی $[\circ, ۱]$ در نظرمی‌گیریم. با محاسبه ساده‌ای معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\Lambda(f, P_n) = \sum_{k=۱}^{۲n} |\Delta f_k| &= \frac{۱}{۲n} + \frac{۱}{۲n} + \frac{۱}{۲n-۲} + \frac{۱}{۲n-۲} + \cdots \\ &+ \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}.\end{aligned} \qquad (۱.۱)$$

چون سری توافقی $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست. پس برای هر $M > \circ$ می‌توان nای یافت که $\Lambda(f, P_n) > M$. لذا f بر $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار نیست. در این مثال f' بر $(\circ, ۱)$ وجود دارد ولی f' بر این بازه کراندار نیست.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنیم $f(\circ) = \circ$ و برای $x \neq \circ$ قرار می‌دهیم $f(x) = x^۲ \cos(\frac{۱}{x})$، در این صورت f بر $[\circ, ۱]$ با تغییر کراندار است، زیرا f' بر $[\circ, ۱]$ کراندار می‌باشد.

حال فرض کنیم $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ یک مسیر و P افرازی بر $[a, b]$ باشد. آن‌گاه $\Lambda(\gamma, P)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda(\gamma, P) = \sum_{i=۱}^{n} |\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-۱})|.$$

جمله iام در این مجموع فاصله بین نقاط $\gamma(x_i)$ و $\gamma(x_{i-۱})$ در $\mathbb{C}$ می‌باشد. پس $\Lambda(\gamma, P)$ طول یک منحنی چندضلعی با رئوس $\gamma(x_\circ), \ldots, \gamma(x_n)$ است. هر قدر افراز P ظریفتر باشد این چندظلعی به برد γ بیشتر نزدیک می‌شود.

تعریف ۶.۲.۱. گوییم مسیر γ طول‌پذیر [۲] است، هرگاه به ازای همه افرازهای $[a, b]$ مانند P مجموعه $\Lambda(\gamma, P)$ها کراندار باشد. در این صورت طول مسیر γ را با $|\gamma|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|\gamma| = \sup \left\{ \Lambda(\gamma, P) : \text{است } [a,b] \text{ یک افراز بر } P \right\}.$$

چنانچه مجموعه $\Lambda(\gamma, P)$ها بیکران باشد، γ با طول نامتناهی نامیده می‌شود و طول γ را ∞ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۷.۲.۱. مسیر $\gamma = \alpha + i\beta$ (که α و β *مؤلفه‌های* γ هستند) *طول‌پذیر است اگر و فقط اگر* α *و* β *هر دو با تغییرات کراندار باشند.*

اثبات. به صفحه ۱۹۸، قضیه ۱۷.۶ از مرجع [۱] مراجعه کنید. □

[۲] rectifiable

مثال ۸.۲.۱. تابع $\gamma(t) = t\cos(\frac{\pi}{2t})$ به ازای $t \neq 0$ و $\gamma(0) = 0$، بر بازه $[0, 1]$ با تغییرات کراندار نیست. بنابراین γ یک مسیر با طول نامتناهی می‌باشد.

تعریف ۹.۲.۱. گوییم مسیر γ تکه‌ای هموار [3] است اگر γ' همه جا بر $[a, b]$، مگر (احتمالاً) در تعداد متناهی نقطه، پیوسته باشد. در این نقطه‌های استثنایی لازم است که هر دو مشتق راست و چپ وجود داشته باشند.

ملاحظه ۱۰.۲.۱. مسیرهای تکه‌ای هموار کراندار هستند.

قضیه ۱۱.۲.۱. *اگر مسیر γ تکه‌ای هموار باشد، آن‌گاه طول‌پذیر است و طول آن از تساوی زیر بدست می‌آید*

$$|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

اثبات. از قضیه ۲۷.۶ در مرجع [۲] نتیجه می‌شود. □

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ یک مسیر باشد. یک زیرمسیر از γ مسیری است که از تحدید γ به زیربازه بسته‌ای از $[a, b]$ بدست آمده باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. مسیر γ در $\mathbb{C}$ پذیرفتنی [4] نام دارد هرگاه γ طول‌پذیر باشد و هیچ زیرمسیر ثابتی نداشته باشد.

قرارداد ۱۴.۲.۱. در طول این پایان نامه منظور از یک کمان در X تصویر یک مسیر ناثابت در X است و منظور از یک کمان طول‌پذیر در X، تصویر یک مسیر ناثابت طول‌پذیر در X است. منظور از یک کمان پذیرفتنی، یک کمان جردن و یک کمان جردن طول‌پذیر در X، به ترتیب، تصویر یک مسیر ناثابت پذیرفتنی، تصویر یک مسیر ناثابت جردن و تصویر یک مسیر ناثابت جردن طول‌پذیر در X می‌باشد.

قضیه ۱۵.۲.۱. *فرض کنیم X یک مجموعه فشرده باشد و $z, w \in X$. فرض کنیم γ مسیر واصل z و w در X باشد، آن‌گاه یک مسیر جردن در X از z به w وجود دارد.*

اثبات. به مرجع [۱۳] مراجعه کنید. □

---

[3] piecewise smooth

[4] admissible

۱-۳ انتگرال مسیری

ابتدا برای درک مفهوم انتگرال ریمان اشتیل یس خواننده را به منابع [۱] و [۲] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ مسیری در صفحه مختلط باشد و فرض کنیم تابع مختلط f بر γ^*، برد γ، تعریف شده باشد. انتگرال مسیری f در امتداد γ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t)$$

(در صورتی که انتگرال ریمان اشتیل یس طرف راست وجود داشته باشد.) گاهی این انتگرال را به صورت‌های

$$\int_a^b f(z)dz \qquad , \qquad \int_\gamma f(z)dz$$

نیز می‌نویسیم.

قضیه ۲.۳.۱. *هرگاه γ طول‌پذیر باشد، آن‌گاه شرط کافی برای وجود انتگرال مسیری $\int_\gamma f$ آن است که f بر γ^* پیوسته باشد.*

اثبات. به صفحه ۲۳۳، قضیه ۲۷.۷ از مرجع [۱] مراجعه کنید. □

خواص جمع‌پذیری زیر برای انتگرال‌های مسیری برقرار است

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنیم γ یک مسیر باشد.*

(۱) *هرگاه انتگرال‌های $\int_\gamma f$ و $\int_\gamma g$، وجود داشته باشند، آن‌گاه به ازای هر جفت عدد مختلط α و β انتگرال $\int_\gamma(\alpha f + \beta g)$ وجود دارد و داریم*

$$\int_\gamma(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g.$$

(۲) *فرض کنیم γ_1 و γ_2، به ترتیب، تحدید γ به $[a,c]$ و $[c,b]$ باشند که در آنها $a < c < b$. هرگاه دو انتگرال از سه انتگرال مذکور در تساوی زیر وجود داشته باشند، آن‌گاه سومی نیز وجود دارد و*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

اثبات. به صفحه ۶۱۲، قضیه ۵.۱۶ از مرجع [۱] مراجعه کنید. $\square$

اکثر مسیرهای انتگرال‌گیری طول‌پذیر هستند. برای چنین مسیرهایی غالباً قضیه زیر برای تخمین قدرمطلق یک انتگرال مسیری به کار می‌رود.

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنیم γ یک مسیر طول‌پذیر با طول $|\gamma|$ باشد. هرگاه $\int_\gamma f$ وجود داشته باشد و به ازای هر z در γ^*، $|f(z)| \leq M$، آن‌گاه نامساوی زیر برقرار است*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq M|\gamma|.$$

اثبات. به صفحه ۶۱۴، قضیه ۶.۱۶ از مرجع [۱] نگاه کنید. $\square$

قضیه زیر بیان می‌کند که انتگرال‌های مسیری روی مسیرهای تکه‌ای هموار را می‌توان به عنوان انتگرال ریمان نوشت.

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنیم γ یک مسیر تکه‌ای هموار بر $[a,b]$ باشد. اگر انتگرال مسیری $\int_\gamma f$ وجود داشته باشد، آن‌گاه*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

اثبات. به صفحه ۶۱۴، قضیه ۷.۱۶ از مرجع [۱] مراجعه کنید. $\square$

۱-۴ جبرهای نرم‌دار

تعریف ۱.۴.۱. یک جبر مختلط، یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که در آن یک عمل ضرب $(x,y) \mapsto xy$ تعریف شده است که در روابط زیر صادق است

(۱) $x(yz) = (xy)z$،

(۲) $x(y+z) = xy + xz$،

(۳) $(x+y)z = xz + yz$،

(۴) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

جبر A را جابجایی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in A$، داشته باشیم $xy = yx$. جبر A یکدار نام دارد اگر عنصر $e \in A$ موجود باشد که

$$ex = xe = x \qquad (x \in A).$$

در این صورت e را عنصر همانی A می‌گوییم. عنصر همانی در صورت وجود یکتاست. عنصر $x \in A$ را معکوس‌پذیر نامیم هرگاه عنصری مانند $x^{-1} \in A$ موجود باشد به طوری که

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

مجموعه تمام عناصر معکوس‌پذیر در A را با $G(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۱. یک زیرجبر A عبارت است از یک زیرفضای برداری A مانند B به طوری که اگر $x, y \in B$، آن‌گاه $xy \in B$.

به وضوح هر زیرجبر B از جبر A یک جبر است.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم $(A, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد که همزمان A یک جبر هم هست. گوییم $\|\cdot\|$ یک نرم جبری است اگر

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A).$$

جبر A مجهز به یک نرم جبری را یک جبر نرم‌دار گوییم. جبر نرم‌دار A یک جبر باناخ نام دارد اگر نرم آن کامل باشد و گوییم A جبر باناخ یکدار است هرگاه A جبر باناخ با عنصر همانی e باشد و $\|e\| = ۱$.

مثال ۴.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. فضای برداری متشکل از تمام توابع مختلط مقدار پیوسته روی X را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. یعنی

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \;:\; \text{پیوسته است } X \text{ بر } f\}.$$

اعمال جبری را به صورت نقطه‌ای تعریف می‌کنیم و نرم سوپریمم [۵] یا نرم یکنواخت [۶] روی $C(X)$ را با $|\cdot|_X$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$|f|_X = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \qquad (f \in C(X))$$

[۵] supremum norm

[۶] uniform norm

در این صورت $(C(X), |\cdot|_X)$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار روی میدان اعداد مختلط است.

مثال ۵.۴.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ فشرده باشد، آن‌گاه $C(X) \times C(X)$ با عمل ضرب به صورت زیر یک جبر است.

$$(f_1, f_2)(g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2 + f_2 g_1) \qquad (f_1, f_2, g_1, g_2 \in C(X))$$

نرم روی $C(X) \times C(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|(f, g)\| = |f|_X + |g|_X \qquad (f, g \in C(X))$$

که نشان می‌دهیم نرم تعریف شده بالا یک نرم جبری روی $C(X) \times C(X)$ است.

برای هر $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in C(X) \times C(X)$، داریم

$$\begin{aligned}
\|(f_1, f_2)(g_1, g_2)\| &= \|f_1 g_1, f_1 g_2 + f_2 g_1)\| \\
&\leq |f_1|_X |g_1|_X + |f_1|_X |g_2|_X + |f_2|_X |g_1|_X \\
&\leq |f_1|_X |g_1|_X + |f_2|_X |g_2|_X - |f_2|_X |g_2|_X \\
&\quad + |f_1|_X |g_2|_X + |f_2|_X |g_1|_X \\
&= |f_1|_X (|g_1|_X + |g_2|_X) + |f_2|_X (|g_1|_X + |g_2|_X) - |f_2|_X |g_2|_X \\
&\leq (|f_1|_X + |f_2|_X)(|g_1|_X + |g_2|_X) \\
&= \|(f_1, f_2)\| \, \|(g_1, g_2)\|.
\end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $\{(f_n, g_n)\}$ یک دنباله کشی در $C(X) \times C(X)$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌شود دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ در $(C(X), |\cdot|_X)$ کشی هستند و از آنجا که $C(X)$ کامل است، نتیجه می‌گیریم که $f, g \in C(X)$ وجود دارد به طوری که

$$|f_n - f|_X \to 0 \qquad , \qquad |g_n - g|_X \to 0.$$

در این صورت $(f_n, g_n) \to (f, g)$ بنابراین $(C(X) \times C(X), \|\cdot\|)$ یک جبر باناخ است.

۱-۵ جبرهای تابعی نرم‌دار

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد و $C(X)$ جبر متشکل از تمام توابع پیوسته مختلط مقدار روی X باشد. گوییم A یک جبر تابعی روی X است اگر

(الف) A زیرجبری از $C(X)$ باشد،

(ب) A نقاط X را جدا کند،

(ج) A شامل تمام توابع ثابت روی X باشد.

یک جبر تابعی نرم‌دار عبارت است از جبر تابعی A که مجهز به یک نرم جبری $\|\cdot\|$ باشد و برای هر $f \in A$، $|f|_X \leq \|f\|$. جبر تابعی نرم‌دار $(A, \|\cdot\|)$ یک جبر تابعی باناخ روی X است هرگاه $\|\cdot\|$ یک نرم کامل باشد.

مثال ۲.۵.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ فشرده باشد و $0 < \alpha \leq 1$. برای تابع $f \in C(X)$ تعریف می‌کنیم

$$P_\alpha(f) = \sup\left\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z-w|^\alpha} : \ z, w \in X, \ z \neq w \right\}$$

در این صورت مجموعه همه توابع پیوسته f که $P_\alpha(f) < \infty$ را به $\mathrm{Lip}(X, \alpha)$ نمایش می‌دهند. آن‌گاه $\mathrm{Lip}(X, \alpha)$ یک جبر تابعی روی X است. نرم روی $\mathrm{Lip}(X, \alpha)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\alpha = |f|_X + P_\alpha(f).$$

در این صورت $\mathrm{Lip}(X, \alpha)$ همراه با نرم بالا، یک جبر تابعی باناخ است.

تعریف ۳.۵.۱. اگر A جبر تابعی باناخ روی X باشد و نرم روی A همان نرم یکنواخت باشد آن‌گاه به A یک جبر یکنواخت روی X می‌گوییم.

مثلاً $C(X)$ همراه با نرم یکنواخت یک جبر یکنواخت است. در واقع جبرهای یکنواخت روی X، همان زیرجبرهای $C(X)$ است که به طور یکنواخت بسته است.

مثال ۴.۵.۱. فرض کنیم $X \subseteq \mathbb{C}$ فشرده باشد. فضای تمام چندجمله‌ای‌ها روی X را با $P_0(X)$ و فضای تمام توابع گویا روی X با قطب‌های خارج X را با $R_0(X)$ نمایش می‌دهیم. آن‌گاه $P(X)$ را بستار یکنواخت $P_0(X)$ و $R(X)$ را بستار یکنواخت $R_0(X)$ در $C(X)$ تعریف می‌کنیم. لذا $P(X)$ و $R(X)$ جبرهای یکنواخت روی X هستند و $P(X) \subseteq R(X)$.