بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده: علوم

گروه: فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش نظری

عنوان پایان نامه

حل معادله سینوسی گوردن تعمیم یافته

استاد راهنما :

دکترکیومرث منصوری

نگارش: فرشاد حدادی

شهریور ماه ۱۳۹۱

دانشکده: علوم

گروه: فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ی

فیزیک گرایش نظری

نام دانشجو: فرشاد حدادی

عنوان پایان نامه

حل معادله سینوسی گوردن تعمیم یافته

در تاریخ توسط هیات داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

۱-استاد راهنما	دکتر: کیومرث منصوری	با مرتبه علمی: استاد یار	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر: صمد بهروزی	با مرتبه علمی: استاد یار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر:محمد وحید تکوک	با مرتبه علمی: دانشیار	امضاء

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از معادلات حاکم بر زنجیره ی پاندول ها که یک مدل فیزیکی و تقریبی از معادله ی SG می باشد جواب های معادله ی SG را به دست می آوریم هرچند محیطی که در نظر گرفته ایم پیوسته نمی باشد و نمی توان از اثرات گسستگی پاندول ها چشم پوشی کرد باوجود این مشاهده می شود که زنجیره ای مورد نظر ابزار آزمایشگاهی مناسبی برای مطالعه خصوصیات سالیتون های معادله ی SG می باشد. همچنین به معرفی و حل معادله ی SG تعمیم یافته که در واقع مغز پایان نامه می باشد پرداخته ایم که با استفاه از تبدیلات هودوگراف شکل معادله را به صورت معادله دیفرانسیل معمولی درآورده سپس از فرمول بندی دو خطی و توابع تاوی که برای معادله SG تعریف شده است استفاده می کنیم و توابع تاو جدیدی برای معادله ی SG تعمیم یافته به دست می آوریم که نقش اصلی در به دست آوردن جواب های معادله ی SG تعمیم یافته دارد. سالیتون هایی که برای این معادله به دست می آیند برای اولین بار مشاهده شده اند زیرا برخلاف سالیتون های معادله ی SG، سرعت تابعی کاهنده از دامنه می باشد و سالیتون های با دامنه کمتر سرعت بیشتری نسبت به سالیتون های با دامنه ی بزرگتر دارند.

فهرست مطالب

صفحه **عنوان**

فصل اول

مقدمه ای بر سالیتون

فصل اول

مقدمه ای بر سالیتون

۱-۱ مقدمه

سالیتون[1] ها نقش مهمی در بسیاری از پدیده ها ایفا می کنند. گاهی آن ها به شکل بی خطری مثل امواج منفرد در یک کانال ظاهر می شوند و گاه به شکل امواج عظیمی به نام سونامی که مسافت های طولانی را می پیمایند، تهدیدی برای سواحل به شمار می آیند. سالیتون های اپتیکی ظرفیت فیبرها را برای ارتباطات تلفنی زیاد کرده اند و سالیتون های Sine-Gordon در موارد چگال اتفاق می افتند. در همه این موارد یک سالیتون پایدار است. هدف اصلی در این پایان نامه بررسی معادله SG تعمیم یافته و به دست آوردن جواب های این معادله ی غیرخطی و رسم نمودار این امواج با استفاده از نرم افزار مطلب می باشد. شکل اصلی معادله ی SG تعمیم یافته[2] به این صورت $U_{xt} = (1 + v\,\partial_x^2)\sin u$ است که در دو فصل مجزا آن را برای V=1 و V=-1 حل می کنیم. در ابتدا با استفاده از تبدیلات هودوگراف[3] که معادلات PDE[4] را به ODE[5] تبدیل می کند معادله ی جدیدی برای معادله SG تعمیم یافته به دست می آوریم و سپس با استفاده از تغییر متغیرهای دیگری آن رابه شکل ساده تری تغییر شکل می دهیم، سپس باتوجه به این که تبدیلات دو

---

[1] SOLITON
[2] .Generalized sine- gordon
[3] .hodograph transformation
[4] Partial differential equation
[5] . Ordinary differential equation

خطی[6] و توابع تاوی[7] که از معادلات دو خطی تبعیت می کنند برای معادلات SG تعریف شده است، با فرض این که جواب های معادله SG تعمیم یافته ترکیبی از جواب های معادله SG می باشد به حل معادله می پردازیم. در فصل اول این پایان نامه به معرفی سالیتون ها به عنوان امواج منزوی خود تقویت کننده پرداخته شده است.در فصل دوم، معادله ی SG را از معادلات حاکم بر زنجیره ی پاندول ها ظاهر می کنیم و جواب های آن را به دست می آوریم. فصل سوم شامل معرفی معادله ی تعمیم یافته و حل آن برای حالت V=-1 می باشد که سالیتون هایی با خصوصیات جدید که در جواب های هیچ معادله ی دیگری ظاهر نشده به دست می آوریم و در فصل چهارم همین معادله را برای حالت V=1 بررسی می کنیم

۱-۲ موج منفرد

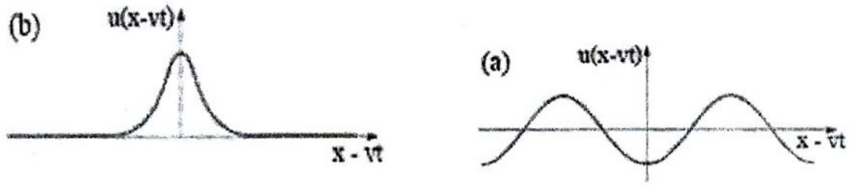
تا سال ۱۹۶۰ فیزیک دان ها فکر می کردند که تقریباً به تمامی خواص و ویژگی های حرکت موجی پی برده اند. امواج در محیط های گوناگون مثل امواج آب و امواج الکترومغناطیسی و ... جملگی از قوانین بنیادی واحدی پیروی می کنند که دامنه، بسامد و سرعت امواج با معادلات ساده ای به خواص محیط انتشار مربوط می شوند. اما در میان امواج غیرعادی تر موج و همچنین انواعی که توصیف ریاضی آن ها دشوارتر است امواجی هستند که آن ها را امواج منفرد می نامند. موج منفرد شامل یک برآمدگی یا یک فرورفتگی است که به صورت انفرادی حرکت می کند.

اکثر امواج واقعی کاملاً سینوسی نیستند. امواج غیرسینوسی را امواج مرکب می نامند و می توانند بسیار متنوع باشند. به عنوان مثال، شکل امواج دریا ممکن است پیچیده و پر اعوجاج باشد، نور به ندرت تکفام است، موج صوتی نوعاً آمیزه ای از چندین بسامد است و طنین آن عمدتاً توسط شکل موج تعیین می شود. تحلیل ریاضی

---

[6] Bilinear formalism
[7] Tau- functions

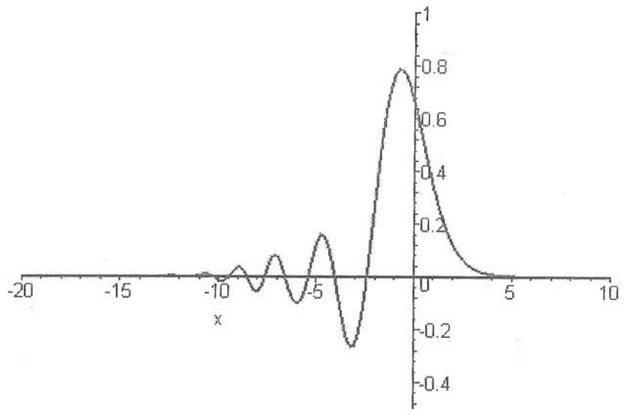
امواج مرکب نسبت به امواج سینوسی خالص به مراتب دشوارتر است. مثلاً موج مرکب در حین انتشار الزاماً شکل خود را حفظ می کند و بنابراین معادلات توصیف کننده این امواج باید وابستگی آن ها به زمان و مکان را به صراحت نشان بدهند. در مقابل امواج سینوسی دست کم در محیط بدون اصطکاک هرگز تغییر نمی کنند. پس معادلات آن هم بسیار ساده ترند. به غیر از امواج منفرد تمامی امواجی که درباره شان صحبت کردیم تناوبی اند و این از مشخص های ماهیتی آن هاست. از لحاظ ریاضی دامنه چنین موجی در هر نقطه یک تابع تناوبی از مکان و زمان است. به عنوان مثال، یک موج یک بعدی مثل موج در یک طناب بی نهایت دراز و بدون اصطکاک را در نظر بگیرید. فرض می شود طول موج λ و دوره تناوبT باشد. در این صورت اگر دامنه در مکان مشخصی مثلX معلوم باشد، در$\lambda - x$ و $\lambda + x$ والی آخر هم معلوم خواهد بود. به همین ترتیب اگر دامنه در زمان t اندازه گیری شود فوراً می توان مقدار آن را در زمان های $T - t$ و $T + t$ نیز معلوم کرد. در نتیجه کل موج را به جهت الگوی تکرار شونده اش می توان با دانستن شکل یک طول موج توصیف کرد.



شکل(۱-۱) موج سینوسی(a) وموج منفرد(b)

برای بررسی شکل موج های مرکب آنالیز فوریه فوق العاده مفید است. نیازی نیست که انتشار امواج مرکب را مستقیماً توصیف کرد بلکه می توان آن ها را به مؤلفه های سینوسی شان، توابع سینوسی و کسینوسی سری فوریه تجزیه کرد و به بررسی حرکت های ساده تر این امواج پرداخت. این مؤلفه ها که دامنه های آن ها توصیفی از موج معینی را به دست می دهند هارمونیک نامیده می شوند. در مرحله نهایی می توان این امواج سینوسی را

مجدداً باهم جمع کرد تا موج جدیدی حاصل شود. این فرآیند که مکمل آنالیز فوریه است سنتز فوریه نام دارد. یکی از خواص مهم امواج مرکب که به کمک آنالیز فوریه آن را به آسانی می توان فهمید، پاشیدگی است. پاشیدگی گرایش موج به پخش شدن در فضاست که به اتلاف آن می انجامد. علت اساسی پاشندگی این است که امواج دارای بسامد امواج بیشتر باشد حرکت آن ها آهسته تر است و این امواج در پشت پیکره اصلی موج ظاهر می شوند و موج کوتاه تر و پهن تر می شود. هرچه این امواج بیشتر پیش می روند تعداد بیشتری از امواج عقب می افتند و پیکره اصلی موج بازهم کوتاهتر و پهن تر می شود. اگر موج می توانست به طور نامتناهی پیش برود، چنان پهن و کوتاه می شد که به کلی ناپدید می شد.

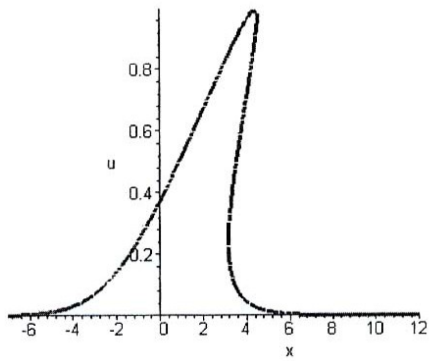


شکل(۱-۲) پاشندگی موج[٦]

این حکم درباره امواج صوتی و امواج آب و نیز امواج نوری که در محیط های مادی در حرکت باشند صادق است. پاشندگی می تواند موج را تحت شرایط ایده آل که هیچ گونه تضعیف ناشی از اصطکاک یا اثرهای مرتبط با آن وجود ندارد منهدم کند. موج سینوسی ساده علی الاصول می تواند تا بی نهایت دوام بیاورد اما موج مرکب عمر محدودی دارد و در اثر پاشندگی از بین می رود. از آن جا که هر موج منفرد ضرورتاً یک موج مرکب است پس هر موج منفرد باید در معرض پاشندگی باشد. قانون پاشندگی در مورد امواج مرکب لغو نمی شود، اما اثر جبران کننده ای هم در کار است که دقیقاً با پاشندگی موازنه می کند. از آن جا که پاشندگی

حاصل جفت شدگی بسامد موج با سرعت انتشار موج است. اثر جبران کننده در امواج منفرد باید حاصل جفت شدگی دامنه و سرعت باشد. این اثر جبران کننده را اثر غیرخطی موج می نامند. یعنی در محیط های گوناگون که حامل امواج منفردند، امواج مرتفعتر سریعتر حرکت می کنند. همین جفت شدگی است که موج منفرد را پایدار می سازد و به آن همدوسی چشمگیری می دهد.

با پاشیده شدن موج منفرد، مؤلفه های دارای بسامد بیشتر از مؤلفه های دارای بسامد کمتر عقب می مانند. در نتیجه کل موج تخت تر می شود. یا به عبارت دیگر دامنه اش کاهش می یابد. اما مؤلفه های کم دامنه تر آهسته تر حرکت می کنند و این یعنی که قله موج کم کم از لبه پیش رونده که دامنه کمتری دارد سبقت می گیرد. اثر دامنه شیب موج را تیزتر می کند که معادل با وارد کردن مؤلفه های با بسامد بیشتر است (شکل ۱-۳) . این دو پدیده رقیب، پهن شدن ناشی از وابستگی بسامد و تیزشدن شیب به علت وابستگی دامنه به سرعت به یک تعادل پایدار می رسند و شکل موج ثابت می ماند. اثرهای غیرخطی در بسیاری از انواع موج ها تحت شرایط حدی مشاهده می شوند و برای تشکیل امواج منفرد و سالیتونها بسیار اساسی اند. این که پاشندگی و غیرخطی بودن دقیقاً یکدیگر را خنثی می کنند و امواج منفرد پدید می آورند، شاید یک توصیف غیرعادی و ناموجه به نظر برسد و در واقع تصادف هیچ دخالتی در این قضیه ندارد. شکل موج را توازن بین این گرایش های متضاد تعیین می کند. درست به گونه ای که وزن قایق با نیروی شناوری آب به تعادل می رسد. اگر شرایط به نفع پاشندگی بیشتر تغییر کند موج منفرد به یک نمایه پهن تر تغییر خواهد کرد و اگر آثار غیرخطی غالب شوند موج تیزتر خواهد شد. یکی از پیامدهای غیرخطی بودن این است که اصل برهم نهی دیگر صادق نیست یعنی یک موج بزرگ با مجموع دو موج کوچک تر معادل نیست.



شکل(۱-۳) اثر غیر خطی موج [٦]

امواج منفرد را نخستین بار در اواسط قرن نوزدهم از راه آزمایش مشاهده کردند، اما ۵۰ سال طول کشید تا توضیح مناسبی دال بر وجود آن ها پیدا شد و ۵۰ سال دیگر گذشت تا تکنیک های مناسبی تدوین شدند و امکان پژوهش درباره این امواج را فراهم آوردند.

۱-۳ در جستجوی سالیتون ها

جان اسکات راسل که مهندس ساختمان و اهل اسکاتلند بود در سال ۱۸۳۴ برای نخستین بار امواجی با شکل ثابت را ثبت کرد. او یک موج سالیتوری را در کانال مشترک در اسکاتلند مشاهده کرد. راسل برای تحقیقات عملی و نظری روی این امواج مقداری زمان صرف کرد، او مخزن های موجی در خانه اش ساخت و متوجه برخی خواص کلیدی شد.

* امواج پایدار بودند و می توانستند در مسیرهای خیلی طولانی حرکت کنند (امواج معمولی مایلند که یا پهن شوند و یا سرازیر شده و بیافتند)

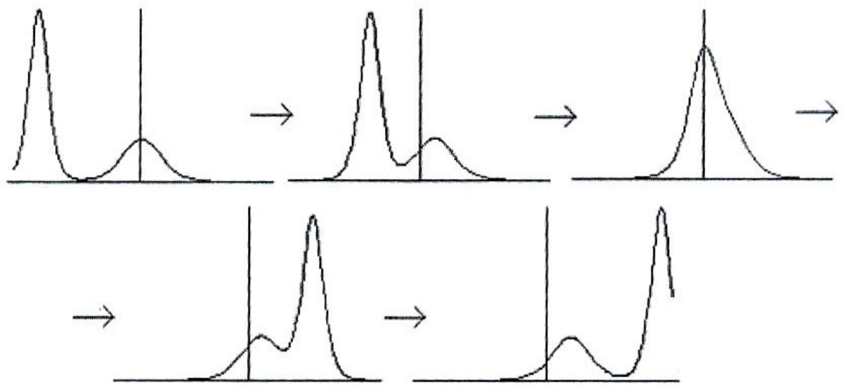
* سرعت به اندازه ی موج و به پهنایش روی عمق آب بستگی دارد.

* برخلاف امواج معمولی هیچ گاه ترکیب نمی شوند و بنابراین یک موج بزرگ به جای ترکیب با یک موج کوچک، از آن سبقت می گیرد.

* اگر یک موج به ازای عمق آب خیلی بزرگ باشد به دو موج یکی بزرگ و دیگری کوچک تقسیم می شود.

* سرعت چنین موجی دقیقاً به دامنه ی آن بستگی دارد. سرعت امواج در آب عمیقتر ، بیشتر است و امواج مرتفعتر سریعتر از امواج تخت تر حرکت می کنند.

تا سال ۱۹۶۰ به نظر می رسید که در امواج منفرد چیزهای عجیب و غریب دیگری وجود ندارد اما بعد کشف غیرمنتظره ای روی داد. نورمن زابوسکی از آزمایشگاه های بل و مارتین کروسکال از دانشگاه پرینستون مشغول مطالعه تغییرات این امواج از طریق شبیه سازی های کامپیوتری حرکت آن ها بودند. چیزی که در شبیه سازی ها مشاهده شد این بود که دو موج منفرد پس از برخورد از میان یکدیگر عبور می کنند و با همان شکل و هویت قبلی خود سالم از طرف دیگر در می آیند. امواج منفرد چنان همدوسی و پایداری چشمگیری را به نمایش گذاشتند که به نظر می رسید شبیه ذرات ماده هستند تا شبیه امواج. به همین جهت زابوسکی و کروسکال به پیروی از این رسم که ذرات بنیادی در فیزیک با کلمات مختوم به اون نامگذاری می شوند این امواج را سالیتون نامیدند. برجسته ترین خصوصیت سالیتون ها این است که آن ها شبیه ذرات رفتار می کنند. مطابق شکل (۱-۴) که برخورد دو موج سالیتونی را نشان می دهد موج با دامنه بیشتر سریعتر حرکت می کند و پس از برخورد با موج کوتاه تر بدون تغییر شکل به مسیر خود ادامه می دهد.



شکل (۱-٤) برخورد دو موج منفرد

درازین و جانسون (۱۹۸۹) سه خاصیت به سالیتون نسبت دادند. به موجی که سه خاصیت زیر را دارا باشد سالیتون می گویند:

۱. شکل آن تغییر نکند.

۲. در منطقه ای از فضا محدود باشد.

۳. بعد از برخورد با سالیتون های دیگر شکل خود را حفظ کند.

روش های جدید و قدرتمندی برای توصیف این امواج به زبان ریاضی ابداع شده و بیش از یک صد معادله به دست آمده که امواج منفرد می توانند جواب های آنها باشند. از جمله معادله کورتوگ- دوریز (KDV)، معادله غیرخطی شرودینگر و معادله ساین- گوردون و ... به علاوه این امواج در حوزه های طبیعی گوناگون مثل جو اقیانوس ها، فیزیک پلاسما و احتمالاً در دستگاه های عصبی موجودات زنده مشاهده شده اند. و سالیتون ها نقش مهمی در ارتباطات راه دور برعهده گرفتند. پایداری شکل و مصونیت امواج در برابر اعوجاج، آن ها را

حامل های ایده آلی برای سیگنال های راه دور ساخته است. سالیتون ها را برطبق معادلات غیرخطی ای که تکامل آن ها را توصیف می کند می توان طبقه بندی کرد.در این جا دو نوع از این معادلات آمده است.

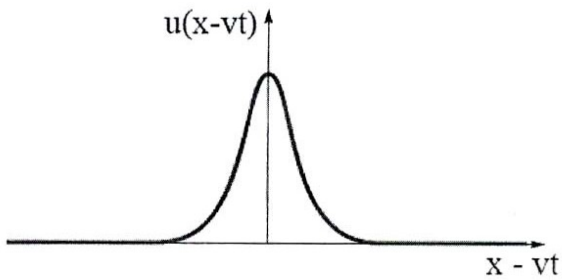
۱. معادله KDV $$U_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

۲. معادله Sine- Gordon $$U_{tt} = u_{xx} - \mathrm{Sin}\, u$$

در این معادلات، u تابعی بی بعد و وابسته به متغیرهای زمانی و فضایی است.

۱-۳-۱ سالیتون معادله KDV

ویژگی های اساسی سالیتون KDV را می توان به شکل زیر خلاصه کرد. شکل جواب دقیق معادله KDV به صورت زیر است:



شکل (۱-۵) جواب معادله KDV (Korteweg–de Vries)

۱. دامنه آن ها با سرعت افزایش پیدا می کند (و بالعکس) بنابراین آن ها نمی توانند در حالت سکون وجود داشته باشند.

۲. پهنای آن ها به طور معکوس با ریشه مربعی سرعتشان متناسب است.

۳. یک پالس موج یک سویه است، یعنی سرعتش نمی تواند برای جواب های معادله KDV منفی باشد.

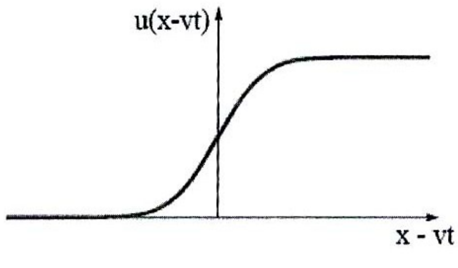
۲-۳-۱ سالیتون معادله Sine- Gordon

معادله Sine- Gordon نقش مهمی در بیشتر شاخه های فیزیک ایفا می کند. این معادله می تواند در تئوری جابجا شدگی مواد، در تئوری اتصال جوزفسون و مانند آن یافت شود. همین طور می تواند در تفسیر فرآیندهای زیستی معینی مثل دینامیک DNA استفاده شود. جواب های این معادله را از روش های مختلفی می توان به دست آورد. یکی از این روش ها جداسازی متغیرهاست که البته در این مورد جواب های محدودی به ما می دهد. روش دیگر تبدیلات بکلاند است که از طریق آن جواب های چند سالیتونی را می توان به طور کامل به دست آورد. ویژگی اصلی سالیتون های Sine- Gordon که در شکل (۱-۶) نشان داده شده است به صورت زیر خلاصه می گردد:

۱. دامنه اش مستقل از سرعت است، و این دامنه برای سرعت صفر دارای مقداری ثابت خواهد بود. بنابراین کینک ممکن است ایستا هم باشد.

۲. ویژگی هایی از یک ذره نسبیتی دارد.

۳. کینکی که جهت پیچ خورده مخالفی دارد پاد کینک نامیده می شود.



شکل (۱-۶)جواب معادله Sine-Gordon

این سالیتون ها بی نهایت پایدار هستند و تحت تأثیر اصطکاک، سرعتشان کند می شود و سرانجام می ایستند و در حالت سکون می توانند برای مدت ها باقی بمانند

فصل دوم

معادله Sine- Gordon و جواب های تک سالیتونی آن