دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکدهٔ فیزیک

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ فیزیک

تاثیر نوفه بر فرآیند همگام سازی در مدل کوراموتو بر روی شبکه‌های بی مقیاس و شبکه‌های تصادفی

حمید خوشبخت

استاد راهنما :

دکتر فرهاد شهبازی

فروردین ۸۷

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ فیزیک

تحت عنوان

تاثیر نوفه بر فرآیند همگام سازی در مدل کوراموتو بر روی شبکه‌های بی مقیاس و شبکه‌های تصادفی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکدهٔ فیزیک

توسط

حمید خوشبخت

در تاریخ ۱۳۸۷/۱/۲۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱—استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر فرهاد شهبازی
۲—استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر کیوان آقابابائی سامانی
۳—استاد مدعو	دکتر سید اکبر جعفری
۴—استاد ممتحن داخلی	دکتر بهروز میرزا
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر سید ظفرالله کلانتری

تشکر و قدر دانی

از:

خداوند مهربان که در تقدیر من قرار داد آنچه را که خواست من بود،

خانواده‌ی عزیزم به خاطر فراهم نمودن بسترو امکانات مناسبی برای‌ادامه تحصیلم ،

استاد راهنمای ارجمندم **آقای دکتر شهبازی** به خاطر راهنمایی‌های بسیار ارزشمند وزحماتشان در طول این دوره،

استاد مشاور پایان‌نامه **آقای دکتر آقابابائی سامانی** به خاطر رهنمودهای ارزنده‌شان در همه زمینه‌ها چه درسی و چه غیر از آن ،

اساتید داور **آقای دکتر میرزا و آقای دکتر جعفری** به خاطر مطالعه پایان‌نامه،

اساتید محترم دانشکده فیزیک به خصوص از **آقای دکتر بارزی** به خاطر آنچه در طول دوره‌ی تحصیل از ایشان آموخته‌ام،

دوستان عزیزم **آقایان مجتبی اعلایی، حجت قلی‌زاده، محمد رحیمی، حمید مصدق** و **مهدی دهقانی** که در طی این دوره صمیمانه در کنار من بودند،

. سپاسگزارم.

تقدیم به‌استاد گرامی جناب آقای

دکتر حسین عصاریان

که مرا به تحصیل در این رشته امر نمود.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه اثر نوفه بر فرایند همگام سازی در مدل کوراموتو بر روی دو نوع شبکه بی مقیاس و تصادفی بررسی می شود. به علت پیچیدگی ساختار این شبکه ها، امکان مطالعه تحلیلی بر روی آنها وجود ندارد. لذا برای بررسی رفتار آنها از روشهای عددی کمک می گیریم. برای این منظور، ابتدا شبکه ای بی مقیاس با $۱۰^۴$ رأس و $۱۰^۵$ یال شبیه سازی کرده و ثابت جفت شدگی بحرانی را برای آن به صورت عددی تعیین می نماییم. سپس با استفاده از الگوریتم ایتو برای انتگرال گیری عددی از توابع تصادفی، از معادله کوراموتو در حضور نوفه انتگرال می گیریم و پارامتر نظم را به ازای شدت های مختلف نوفه محاسبه می نماییم. چنین فرایندی برای شبکه تصادفی با همان تعداد رأس و همان تعداد یال تکرار می شود. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که فاز همگام در شبکه بی مقیاس نسبت به شبکه تصادفی در مقابل اعمال نوفه مقاومت بیشتری از خود نشان می دهد. به علاوه، از بین رفتن همگامی در شبکه بی مقیاس با زیاد شدن شدت نوفه به آرامی کاهش می یابد، در حالیکه شبکه تصادفی رفتاری ناپیوسته از خود نشان می دهد.

فصل ۱

مقدمه

۱–۱ تاریخچه

آنچه که امروزه به عنوان پدیدهٔ همگام سازی[۱] شناخته می‌شود اولین بار در قرن هفدهم میلادی (۱٦٦۵ هـ.م) توسط کریستین هویگنس[۲] هنگامی که در بستر بیماری بود، مشاهده شد. برروی دیوار مقابل او دو عدد ساعت پاندول دار قرار داشت. پس از چند روز مشاهده نوسان پاندول‌ها، هویگنس دریافت که دو ساعت پاندول دار که از یک دیوار آویزان شده‌اند پس ازگذشت مدتی با هم نوسان می‌کنند. او این آزمایش را چندین بار انجام داد و در تمامی آنها مشاهده کرد که پس از مدتی فرکانس آونگ‌ها با هم مساوی و نوسان آنها در خلاف جهت هم می‌شود. هویگنس این پدیده را«هم سازی دو ساعت»[۳] نامید. او این پدیده را ناشی از ایجاد یک حرکت غیر قابل مشاهده در تکیه گاهی که آونگ ها

---

۱ Synchronization

۲ Christian Huygens

۳ Sympathy of two clocks

از آن آویخته شده‌اند و انتقال آن به آونگ دیگر توسط تکیه گاه می‌دانست. امروزه تکیه گاه (عامل انتقال اثر نوسان یک نوسانگر روی دیگری) را « جفت شدگی »[۴] و این پدیده را « هم گام شدن »[۵] می‌نامند.

پس از هویگنس، همگام شدن در بسیاری از پدیده‌های طبیعی و آزمایشات علمی مشاهده شد و کاربردهای فراوانی پیدا کرد. برای مثال می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- مشاهده همگام شدن در کرم‌های شب تاب توسط انگلبرت کمفر[۶] در سال ۱۷۲۷
- مشاهده همگام شدن دو گیاه لوبیا توسط جین جاکوز[۷] در سال ۱۷۲۹
- مشاهدات اشل[۸] و وینسنت[۹] در مورد همگام سازی مولدهای جریان متناوب در سال ۱۹۲۰ (بعدها به این نتیجه رسیدند که به کمک این پدیده می‌توانند برای پایدار کردن فرکانس یک مولد قوی از یک مولد ضعیف با فرکانس دقیق استفاده کنند.)
- مشاهده همگام شدن در سیستم‌های اکوسیتکی توسط لردریلی[۱۰] در سال ۱۹۴۵

از آن پس مطالعات در زمینه « هنگام سازی » افزایش یافت. به مرور توصیف دانشمندان از این پدیده کاملتر شد و مدلهای مختلفی نیز برای توصیف آن ارائه شد. یکی ازاین مدلها «مدل کوراموتو»[۱۱] (۱۹۷۵) است که در ادامه به شرح آن خواهیم پرداخت [۳، ۲، ۱].

---

[۴] Coupling

[۵] Synchronization

[۶] Engelbert Kaempfer

[۷] Jean-Jacques

[۸] W.H.Eceles

[۹] J.H.Winsent

[۱۰] Lord Rayleigh

[۱۱] Kuramoto

۱ـ۲ تعریف همگام سازی و اصطلاحات مربوط به آن

همگام سازی به عنوان سازگاری آهنگ نوسانگرها از طریق برهم کنش ضعیف بین آنها شناخته می‌شود[۴، ۱]. به طور کلی یک گروه از نوسانگرها را وقتی هم گام شده می‌نامند که فرکانس هر نوسانگر مقدار یکسانی که همهٔ نوسانگرهای دیگر برگزیده‌اند، اختیار کند. البته همگام شدن نباید با پدیدهٔ تشدید که در آن شدت نوسان یک نوسانگر تحت نوسان‌های نوسانگر دیگری با همان فرکانس افزایش می‌یابد، یکسان انگاشته شود. در واقع پدیدهٔ همگام سازی بین نوسانگرهایی رخ میدهد که در اصطلاح به آنها «نوسانگرهای خود نگهدار»[۱۲] گفته می‌شود. یک نوسانگر خود نگهدار ویژگی‌های زیر را داراست :

۱) خود فعال[۱۳] است. بدین معنی که دارای یک منبع‌داخلی تولید انرژی برای حرکت نوسانی خود است.

۲) شکل نوسان آن به پارامترهای داخلی سیستم بستگی دارد و مستقل از نحوهٔ شروع نوسان است.

۳) پایدار[۱۴] است بدین معنی که اگر نوسانات آن مختل شود، پس از مدت کوتاهی به شکل اصلی خود بر می‌گردد.

چنین نوسانگرهایی وقتی در کنار همدیگر قرار می‌گیرند می‌توانند پس از مدتی همگام شوند و با یک فرکانس نوسان کنند. البته همیشه هم این اتفاق رخ نمی‌دهد. در واقع همگام شدن یا نشدن مجموعه‌ای از نوسانگرها به دو عامل بستگی دارد :

۱ـ شدت جفت شدگی [۱۵]

شدت جفت شدگی معیاری از شدت و ضعف برهمکنش بین نوسانگرهاست. اگر نوسانگرها با هم هیچ ارتباطی نداشته باشند، شدت جفت شدگی برابر صفر خواهد بود. نوسانگرها به صورت دو نوسانگر مستقل

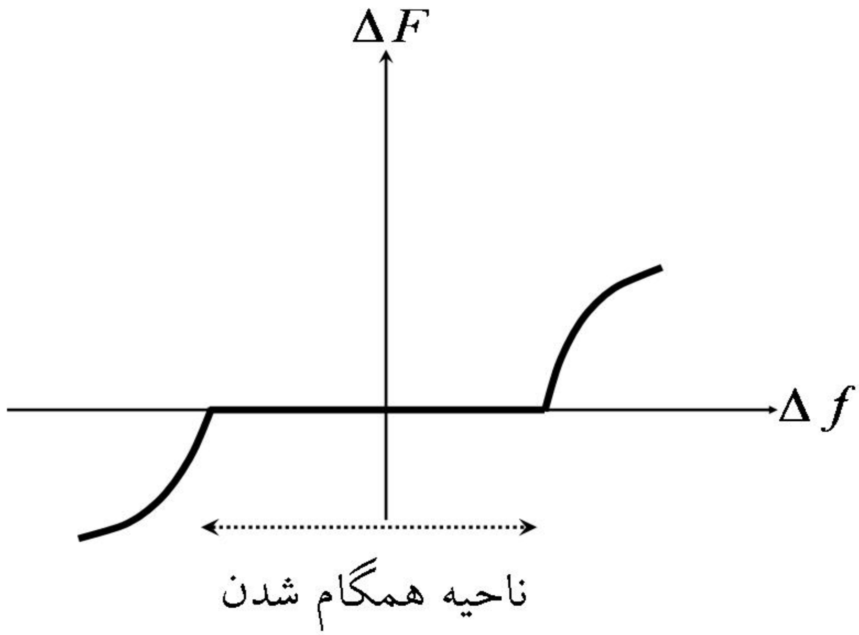
---

۱۲ Self-sustained oscillator

۱۳ Active

۱۴ Stable

۱۵ Coupling strength



شکل (۱—۱): نمودار اختلاف فرکانس نوسانگرها در حالتی که با هم برهمکنش دارند (ΔF) بر حسب فرکانس ناکوکی (Δf). در گسترهٔ خاصی از فرکانس ناکوکی، اختلاف فرکانس نوسانگرها صفر شده و با هم همگام می‌شوند. معمولاً با زیاد شدن شدت جفت شدگی، گسترهٔ این بازه نیز افزایش می‌یابد.

رفتار می‌کنند و در نتیجه همگام نمی‌شوند.

۲ـ فرکانس ناکوکی [۱۶]

به اختلاف فرکانس ذاتی نوسانگرها در غیاب اثر نوسانگرهای دیگر فرکانس ناکوکی گفته می‌شود. اگر این اختلاف کوچک باشد، نوسانگرها می‌توانند پس از اتصال به یکدیگر با هم همگام شوند و اگر این اختلاف از مقدار خاصی بزرگتر شود امکان نوسان آنها با یک فرکانس یکسان وجود نخواهد داشت (شکل۱—۱).

اگر شدت جفت شدگی آنقدر زیاد شود که اثر نوسانگر اول روی دیگری مانع از نوسان طبیعی نوسانگر دوم شود، اگر چه هر دو با یک فرکانس نوسان کنند باز هم همگام سازی اتفاق نیفتاده است. زیرا در پدیدهٔ همگام سازی هر نوسانگر باید نوسان طبیعی خود را داشته باشد[۱].

---

۱۶ Frequency detuning

۱ــ۳ نوسانگرهای فاز و قفل شدگی فاز

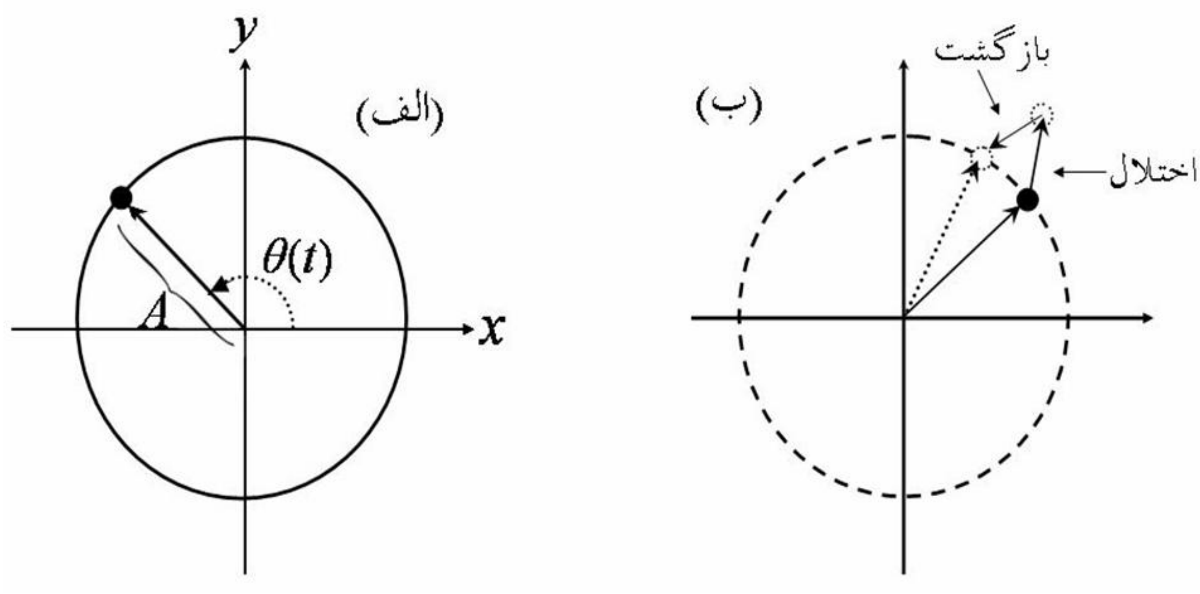
به طور کلی برای مشخص کردن نحوهٔ نوسان یک نوسانگر به دو پارامتر احتیاج داریم. چرا که اگر به عنوان مثال حرکت پاندول ساعت را در نظر بگیریم، بیان زاویه‌ای که راستای پاندول با محور قائم می‌سازد کافی نیست. زیرا در این حالت نمی دانیم که این زاویه در حال افزایش است یا کاهش. لذا باید سرعت زاویه‌ای پاندول را هم بدانیم تا شکل نوسان آن برای ما مشخص شود. اگر این متغیرها را $x(t)$ و$y(t)$ بنامیم و نمودار y را بر حسب x رسم کنیم، انتظار داریم با یک منحنی بسته روبرو شویم. زیرا در حرکت نوسانی، نوسانگر پس از گذشت یک دوره تناوب حرکت خود را تکرار می‌کند. این منحنی بسته « چرخه حدی »[۱۷] نامیده می‌شود. حالتی که نوسانگر در هر زمان در آن قرار دارد با یک نقطه روی این منحنی مشخص می‌شود و نوسان کردن نوسانگر معادل چرخش این نقطه روی چرخه حدی است. بوجود آمدن هر اختلالی در حین حرکت نوسانگر باعث می‌شود تا این نقطه از چرخهٔ حدی خارج شود. اما از آنجا که نوسانگرهای خود نگهدار، پایدار هستند، یعنی اگر حرکتشان مختل شود دو باره به شکل اصلی خود باز می‌گردند، پس می‌توان گفت برای نوسانگرهای خود نگهدار، دامنهٔ حرکت ثابت است و فقط فاز حرکت متغیر خواهد بود.(شکل ۱ـ۲) لذا برای توصیف حرکت آنها می‌توان فقط از فاز حرکت استفاده نمود. چنین نوسانگرهایی « نوسانگر فاز »[۱۸] نامیده می‌شوند.

از طرف دیگر، هنگامی که برای مجموعه‌ای از نوسانگرهای فاز پدیدهٔ همگام سازی رخ میدهد، فرکانس نوسانات همگی آنها با هم برابر می‌شود. لذا اختلاف فاز آنها مقدار ثابتی باقی می‌ماند. به چنین حالتی « قفل شدگی فاز »[۱۹] می‌گویند.

[۱۷] Limit cycle

[۱۸] Phase oscillator

[۱۹] Phase locking



شکل (۱—۲): (الف) یک نوسانگر خودنگهدار توسط چرخش نقطه‌ای بر روی چرخه‌حدی توصیف میگردد. فاز این نوسانگر با $\theta(t)$ ودامنهٔ آن با A نشان داده میشود. (ب) اگر به دلیل وارد شدن اختلالی به نوسانگرهای خود نگهدار، این نقطه از چرخه حدی خارج شود، اثر اختلال وارد بر دامنه از بین میرود و نقطه به چرخه حدی باز میگردد ولی اثر اختلال به صورت اختلاف فاز باقی می ماند.

۱—۴ همگام سازی در حضور نوفه

هنگامی که از حرکت نوسانی به عنوان حرکتی که کاملاً خود را تکرار می‌کند یاد می‌کنیم، حالتی ایده‌آل را در نظر گرفته‌ایم. اما در طبیعت هیچ نوسانگری حرکتی کاملاً تناوبی ندارد! به عنوان مثال تمام ساعتها باید هر چند وقت یکبار تنظیم گردند. عوامل متعددی وجود دارد که باعث بی نظمی در حرکت نوسانگرهای خود نگدار می‌شود. برای سادگی به مجموعهٔ تمام این عوامل « نوفه » می‌گوئیم. از آنجا که نوفه در هر سامانه فیزیکی وجود دارد، لذا بررسی اثرات آن بر فرآیند همگام سازی از اهمیت فراوانی برخوردار است.

در فصل دوم به معرفی انواع شبکه های پیچیده خواهیم پرداخت. فصل سوم به معرفی مدل کوراموتو اختصاص یافته، و در فصل چهارم انتگرال گیری از توابع تصادفی را بررسی می کنیم. در فصل پنجم محاسبات عددی و شبیه سازی های کامپیوتری را شرح داده ایم و در فصل آخر هم به بیان نتایج پرداخته‌ایم.

فصل ۲

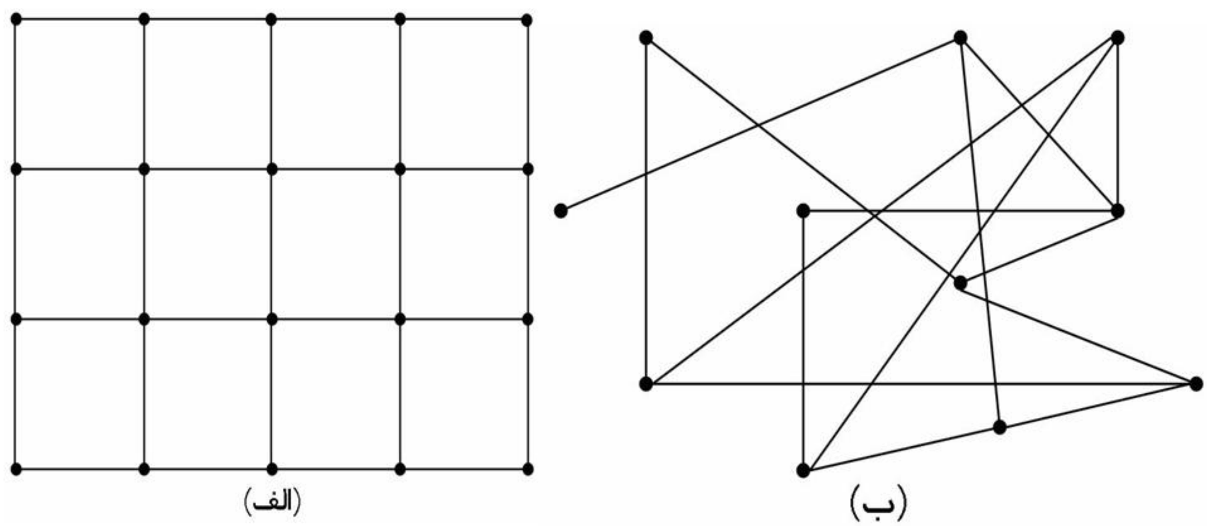
شبکه‌های پیچیده، انواع آنها و اصطلاحات مربوط به آنها

۲−۱ مقدمه

از لحاظ تاریخی مطالعه برروی شبکه‌ها از سال ۱۷٦۳ به عنوان یکی از شاخه‌های ریاضیات گسسته با نام « نظریه گراف »[۱] آغاز شد[۴]. به مرور زمان، علاوه بر پیشرفت‌هایی که در زمینه نظریه گراف حاصل شد، مطالعهٔ شبکه‌ها به عنوان یک ابزار مهم در مطالعه بعضی زمینه‌ها مثل علوم اجتماعی گسترش یافت تا جائیکه دهه گذشته شاهد بوجود آمدن یک شاخه جدید تحقیقاتی به نام « شبکه‌های پیچیده »[۲] بود. شبکه‌های پیچیده شبکه‌هایی هستند که ساختار آنها بی نظم، پیچیده، وابسته به زمان و تعداد رئوس آنها گاهی به هزاران و میلونها رأس می‌رسد. بسیاری از سامانه های موجود در طبیعت یا

۱ Graph theory

۲ Complex networks



شکل (۲—۱): (الف)نمونه‌ای از یک شبکه منظم (ب) یک شبکه پیچیده.

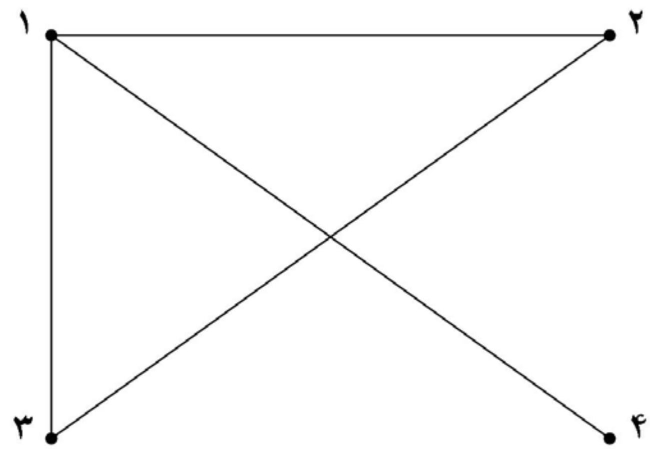
صنعت از چنین ساختارهایی تشکیل شده اند. به عنوان نمونه‌هایی از شبکه‌های پیچیده می‌توان به شبکه‌هایی مثل شبکه‌های عصبی، شبکه‌های حمل و نقل عمومی، شبکه‌های تلفن، شبکه اینترنت، شبکهٔ ارجاعات مقالات علمی و ... اشاره کرد[٦، ۵، ۲]. اولین تحقیقات، برروی **ساختار** چنین شبکه‌هایی انجام و خصوصیات آماری بسیاری از شبکه‌های واقعی (شبکه‌های موجود در طبیعت) بررسی شد. یکی از مهمترین این خصوصیتها تعداد رئوسی بود که هر رأس با آنها ارتباط مستقیم داشت. برهمین اساس و براساس چگونگی ارتباط بین رئوس مختلف، شبکه‌های پیچیده به انواع مختلفی از قبیل شبکه تصادفی، شبکه جهان کوچک، شبکه بی مقیاس و ... طبقه‌بندی می‌شوند(شکل ۲—۱).

۲—۲ تعریف شبکه و اصطلاحات مربوط به آن

یک شبکه بدون جهت به صورت $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{N} \neq \emptyset$ و $\mathcal{L}$ مجموعه‌ای از زوجهای مرتب از اعضای $\mathcal{N}$ باشد. اعضای $\mathcal{N}$ که به صورت $\mathcal{N} \equiv \{n_۱, n_۲, ..., n_N\}$ نشان داده می‌شوند را « رأس »[۳] و اعضای $\mathcal{L}$ که به صورت $\mathcal{L} \equiv \{l_۱, l_۲, ..., l_K\}$ نشان داده می‌شوند را« یال »[۴]

[۳] Node or Vertex

[۴] Edge



شکل (۲−۲): در این شبکه $\mathcal{N}=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $\mathcal{L}=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۳)\}$ است.

می‌نامیم. تعداد اعضای $\mathcal{N}$ و $\mathcal{L}$ رابه ترتیب با N و K نمایش می‌دهیم. لذا برای نمایش دادن شبکه می‌توان از نمادهای $G(N,K)$ و $G_{N,K}$ نیز استفاده نمود(شکل ۲−۲).

معمولاً در شبکه‌های بدون جهت هر رأس با نماد i $(i=۱,۲,...,N)$ و هر یال بین دو رأس i و j با نماد (i,j) یا l_{ij}[5] معرفی می‌شود و اگر بین دو رأس یالی وجود داشته باشد آن دو را« همسایه»[6] یا مجاور یکدیگر می‌نامیم.[7]

تعداد یالهای هر شبکه حداقل ۰ و حداکثر $\frac{N(N-۱)}{۲}$ است. اگر تعداد یالها $K=\frac{N(N-۱)}{۲}$ باشد به آن « شبکه کامل[8] » گفته می‌شود. در چنین شبکه‌ای هر رأس به تمام رئوس دیگر متصل است.

---

[5] یال بین دو رأس می‌تواند جهتدار هم باشد. به چنین شبکه‌هایی شبکه جهتدار گفته می‌شود. در اینصورت $l_{i,j}$ با $l_{j,i}$ متفاوت خواهد بود. حتی ممکن است بین رأس i و j چندین یال هم وجود داشته باشد. برای توضیحات بیشتر در این زمینه می‌توانید به مرجع شماره[۴] رجوع کنید.

[6] Adjacent or Neighbore

[7] در این پایان نامه فقط شبکه‌های بدون جهت را مورد بررسی قرار داده‌ایم. لذا برای سهولت فقط از لفظ شبکه استفاده می‌کنیم.

[8] Complete graph

درجه هر رأس[۹]

به مجموع تعداد رئوسی که به رأس i متصل هستند « درجه رأسi» گفته می‌شود. به بیان دیگر تعداد یالهای گذرنده از هر رأس درجه آن رأس به حساب می آید. درجه هر رأس را با نماد k_i نشان میدهیم. بنابراین می‌توان گفت:

$$\sum_{i=۱}^{N} k_i = ۲K \qquad (۱-۲)$$

که K تعداد کل یال ها است.

۲-۲-۱ ماتریس مجاورت شبکه

برای مشخص کردن شبکه‌ها می‌توان از نمایش ماتریسی هم استفاده نمود. در این نمایش گراف $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ به طور کامل توسط یک ماتریس مربعی $N \times N$ که به آن « ماتریس مجاورت[۱۰] » می‌گویند، نشان داده می‌شود. این ماتریس را با نماد $\mathcal{A}$ و اعضای آنرا با $a_{i,j}$ $(i, j = ۱, ۲, ..., N)$ معرفی می‌کنیم. اگر رأس i بطور مستقیم به رأس j متصل باشد $a_{i,j} = ۱$ و در غیر اینصورت $a_{i,j} = ۰$ است. بنابراین ماتریس $\mathcal{A}$ یک ماتریس متقارن است که اعضای روی قطر آن برابر صفر و حاصل جمع روی درایه‌های هر سطر(ستون) برابر درجه رأس نظیر با آن سطر (ستون)خواهد شد. یعنی

$$k_i = \sum_{j=۱}^{N} a_{i,j} \qquad (۲-۲)$$

به عنوان مثال، ماتریس مجاورت شبکه‌ای که در شکل (۲ـ۲) مشاهده می‌کنیم عبارتست از :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \qquad (۳-۲)$$

---

۹ Node degree

۱۰ Adjacency Matrix