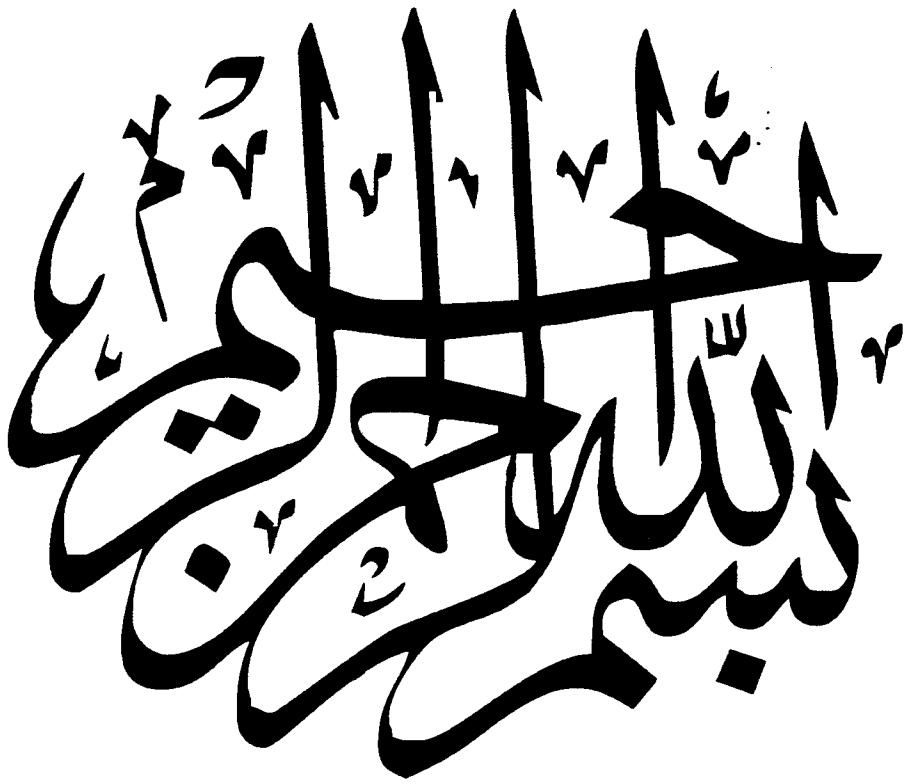

١٤٩٢٨٥

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکدهٔ علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

عنوان

مسائل درخت اشتاینر در بهینه‌سازی شبکه‌های مخابراتی

نگارش
فریبا کاظمی گلباغی

استاد راهنما
دکتر کاوه شیبانی

استاد مشاور
دکتر سهرابعلی یوسفی

مهر ۱۳۸۹

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران
مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
IRANDOC

۱۴۹۲۸۵

۱۳۸۹/۱۰/۱۹

تاریخ .....
شماره .....
پیوست.....

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۳۴۳۷/۲۰۰/د مورخ ۸۹/۷/۵ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: خانم **فریبا کاظمی گلباغی** شماره شناسنامه: ۳۱ صادره از: **دلفان** متولد: **۱۳۶۵** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: **ریاضی کاربردی**

با عنوان:

مسائل درخت اشتاینر در بهینه سازی شبکه‌های مخابراتی

به راهنمایی:

آقای دکتر کاوه شیبانی

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۹/۷/۴ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره هفده و شصت و یک — ۱۷/۶۱ — درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت.

		مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱.	**استاد راهنما:** آقای دکتر کاوه شیبانی	استادیار	مرکز تحقیقات مخابرات	
۲.	**مشاور:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	
۳.	**داور:** آقای دکتر محمدحسام تدین	استادیار	مرکز تحقیقات مخابرات	
۴.	**داور:** آقای دکتر حسین آذری	استادیار	شهید بهشتی	
۵.	**مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

كلية حقوق اعم از چاپ و تكثير، نسخه برداري، ترجمه، اقتباس و ... از اين پايان نامه براي دانشگاه شهيد بهشتي محفوظ است. نقل مطالب با ذكر مأخذ آزاد است.

قدردانی

بر خود وظیفه می‌دانم از استاد بزرگوار جناب آقای دکترکاوه شیبانی که با راهنمایی‌هایشان من را در انجام این پایان‌نامه یاری رساندند صمیمانه قدردانی نمایم.

همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکترسهرابعلی یوسفی که مشاورهٔ این پایان‌نامه را بر عهده داشتند و اساتید محترم جناب آقای دکتر آذری و جناب آقای دکتر تدین که زحمت داوری آن را تقبّل فرمودند، کمال تشکر را دارم.

در پایان، از مرکز تحقیقات مخابرات ایران، جهت حمایت مالی از این پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

چکیده

امروزه، مسائل بهینه‌سازی در قسمت‌های مختلف مخابرات مورد استفاده قرار می‌گیرند. مسیریابی ارسال چندمنظوره، یک تکنیک برای فرستادن اطلاعات در شبکه هایی است، که آدرس دهی به چندین مقصد به طور همزمان مجاز می باشد. معمولا در این شبکه‌ها هدف پیدا کردن راهی است برای توزیع داده‌ها، در حالی‌که میزان استفاده از منابع چون هزینه ی اتصالات، زمان و پهنای باند به کمترین مقدار خود برسد. اتصال یک مجموعه‌ی داده شده از نقاط با کمترین هزینه‌ی ممکن، یکی از مسائل مهم در طراحی شبکه‌های مخابراتی است. چنین مسئله‌ایی را می‌توانیم به‌خوبی در یک گراف پیاده‌سازی کنیم. یک گراف وزندار داده شده است، مسئله‌ی درخت اشتاینر در گراف به‌دنبال یافتن یک زیرگراف با وزن کمینه است که بتواند مجموعه‌ایی خاص از رئوس را به‌هم متصل نماید. این مسئله می‌تواند به‌صورت یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ترکیباتی در گراف در نظر گرفته شود. از آنجائی‌که ثابت شده است که یافتن چنین درختی یک مسئله‌ی ترکیباتی سخت است، بنابراین؛ برای حل این مسئله از الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکارری فراوانی استفاده شده است. هرچند می‌توان با استفاده از روش‌های دقیق، حالت‌های خاص و ساده‌ی این مسئله را حل نمود.

کلمات کلیدی: درخت اشتاینر، بهینه‌سازی ترکیباتی، گراف، شبکه‌های مخابراتی ، مسیریابی ارسال چند منظوره

پیشگفتار

مسئله‌ی درخت اشتاینر کلاسیک به‌صورت زیر تعریف می‌شود: مجموعه‌ایی از نقاط در یک فضای متری داده شده است، به‌دنبال یافتن کوتاه‌ترین شبکه‌ی اتصال دهنده‌ی این نقاط هستیم. چنین شبکه‌ایی را یک درخت اشتاینر در مجموعه‌ی داده شده می‌نامیم.

مسئله‌ی درخت اشتاینر یکی از معروف‌ترین و مهم‌ترین مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی است که در طراحی شبکه‌های مخابراتی، طراحی مدارهای $VLSI$ و غیره کاربرد فراوانی دارد. این مسئله دارای تاریخچه‌ی بسیار طولانی است. برای اولین بار، حدود سیصد سال پیش، فرمت (۱۶۰۱ - ۱۶۶۵)، مسئله‌ایی را به‌صورت زیر مطرح نمود: به‌دنبال یافتن نقطه‌ایی هستیم که، فاصله‌ی آن از سه نقطه‌دیگر داده شده در فضا به کم‌ترین مقدار خود برسد. به‌وضوح حل این مسئله منجر به حل مسئله‌ی درخت اشتاینر برای سه نقطه در فضا می‌شود. ریاضی‌دانان فراوانی برای حل این مسئله اقدام نمودند. حالت کلی این مسئله توسط گاوس(۱۷۷۷ - ۱۸۸۵)، بوجود آمد.

ثابت شده است که این مسئله، یک مسئله‌ی ترکیبیاتی سخت است و برای حل آن می‌توان از الگوریتم‌های متفاوتی استفاده نمود.

در فصل اول این پایان‌نامه، به معرفی مسیریابی ارسال چندمنظوره پرداخته شده است که مسئله‌ی درخت اشتاینر یکی از مسائل کاربردی در این زمینه می‌باشد.

افراد فراوانی برای حل این مسئله با استفاده از الگوریتم‌های دقیق تلاش نموده‌اند، در فصل دوم این پایان‌نامه، معروف‌ترین الگوریتم‌های دقیقی که برای حل مسئله درخت اشتاینر در گراف وجود دارد گردآوری شده است.

از آنجائی‌که این مسئله، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی سخت می‌باشد بنابراین، تنها در حالت‌های ساده و مقیاس‌های پائین می‌توان از الگوریتم‌های دقیق استفاده نمود و دراین راستا الگوریتم‌های ابتکاری

برای حل آن بسیار مؤثر هستند. در فصل سوم این پایان‌نامه الگوریتم‌های ابتکاری برای حل این مسئله بیان و توضیح داده شده‌اند.

یکی از عیب‌های استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری گیر افتادن در بهینه‌ی نسبی است. برای فرار از این مشکل و اینکه بتوانیم جواب بهتری برای این مسئله داشته باشیم، استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری بسیار مفید خواهد بود. در فصل آخر ضمن معرفی الگوریتم‌های فراابتکاری، آن‌دسته از الگوریتم‌هایی که برای حل مسئله‌ی درخت اشتاینر در گراف مورد استفاده قرار گرفته اند را به‌طور مفصل‌تری شرح داده‌ایم.

فهرست مطالب

پیشگفتار ز

۱ بهینه سازی شبکه های مخابراتی ۱

۱.۱ بهینه‌سازی ترکیباتی ۱

۱.۲ مسیریابی ارسال چند منظوره ۲

۱.۳ کاربردهای مسیریابی ارسال چندمنظوره ۴

۱.۴ مسائل اساسی در مسیریابی ارسال چندمنظوره ۴

۱.۴.۱ اصطلاحات نظریه‌ی گراف ۵

۱.۴.۲ تعاریف پایه ۹

۱.۴.۳ اهداف بهینه سازی ۱۰

۱.۵ معرفی مسئله اشتاینر ۱۰

۱.۵.۱ درخت اشتاینر در گراف ۱۲

۱.۵.۲ مسئله درخت اشتاینر اقلیدسی ۱۴

۱.۵.۳ مسئله درخت اشتاینر مستقیم الخط ۱۷

۱.۵.۴ مسئله درخت اشتاینر ارزش دار ۱۸

۱.۵.۵ بسط و اصلاح مسئله ۱۹

۱.۵.۶ مسئله‌ی اشتاینر تعمیم داده شده ۱۹

۱.۵.۷ مسئله درخت اشتاینر با محدودیت های جهشی ۲۰

۱.۵.۸ مسئله درخت اشتاینر با سود، بودجه و محدودیت‌های جهشی ۲۱

۲ الگوریتم های دقیق ۲۳
۲.۱ الگوریتم شمارشی درخت پوششی ۲۳
۲.۲ الگوریتم شمارشی توپولوژی ۲۴
۲.۳ الگوریتم برنامه ریزی پویا ۲۶
۲.۴ فرمول های برنامه ریزی ریاضی ۲۹
۲.۴.۱ فرمول بندی جریان ۲۹
۲.۴.۲ فرمولبندی با دو نقطه‌ی ترمینالی ۳۱
۲.۴.۳ فرمولبندی با درجه‌ی محدود شده ۳۲
۲.۴.۴ فرمولبندی مجموعه‌ی پوششی ۳۳
۲.۴.۵ الگوریتم انشعاب و برش ۳۳
۲.۴.۶ سست سازی لاگرانژی ۴۰

۳ روش های ابتکاری ۴۳
۳.۱ مسیرهای ابتکاری ۴۳
۳.۱.۱ کوتاهترین مسیرهای ابتکاری ۴۴
۳.۱.۲ کوتاه‌ترین مسیر ابتکاری تکراری ۴۵
۳.۱.۳ کوتاهترین مسیر با استفاده از روش ابتکاری اصلی ۴۶
۳.۱.۴ روش ابتکاری بر اساس روش کروسکال ۴۶
۳.۱.۵ روش وای ابتکاری ۴۶
۳.۲ درخت‌های ابتکاری ۴۸
۳.۲.۱ روش ابتکاری درخت پوششی کمینه ۴۹
۳.۲.۲ روش ابتکاری درخت حریصانه ۴۹
۳.۲.۳ روش ابتکاری فاصله ایی شبکه ۵۱
۳.۲.۴ روش ابتکاری شبکه ی فاصله ایی تکرار شونده ۵۲
۳.۲.۵ روش ابتکاری شبکه ی فاصله ی شبکه ایی چند گانه ۵۲

۴ روش های فراابتکاری ۵۳
۴.۱ روش های خطی ۵۴
۴.۱.۱ جستجوی محلی پایه ایی ۵۴
۴.۱.۲ جستجوی همسایگی متغیر ۵۵
۴.۱.۳ روش جستجوی محلی تکرار شونده ۵۵
۴.۱.۴ شبیه سازی تبرید ۵۶
۴.۱.۵ جستجوی ممنوع ۶۱
۴.۱.۶ روش های جستجوی تصادفی حریصانه با قابلیت تطبیق ۷۷
۴.۲ روش های جمعیتی ۹۱
۴.۲.۱ الگوریتم ژنتیک ۹۱
۴.۲.۲ بهینه سازی کلونی مورچگان ۱۰۸

۵ پیشنهاد برای کارهای بیشتر ۱۱۷
۵.۱ بررسی حریصانه ی فازی ۱۱۷
۵.۱.۱ مجموعه های فازی ۱۱۷
۵.۱.۲ بررسی حریصانه‌ی فازی ۱۱۹
۵.۱.۳ ویژگی های ریاضی ۱۲۱
۵.۱.۴ الگوریتم حریصانه‌ی فازی ۱۲۲

مراجع ۱۲۵

واژه نامه ۱۲۹

فصل ۱

بهینه سازی شبکه های مخابراتی

به‌طور کلی یک وظیفه‌ی اصلی در سیستم شبکه‌ها، مسیریابی [۱] است. در واقع یکی از وظایف اصلی در هر شبکه فرستادن اطلاعات از سرویس دهنده [۲] به سرویس گیرنده [۳] است. تکنیک‌های مورد استفاده برای مسیریابی در گذشته را می توان به دو گروه زیر تقسیم بندی نمود:

ارتباط بین دو کامپیوتر [۴]

توزیع داده ها به تمام سرویس گیرنده‌های یک شبکه [۵]

هر دو روش فوق با اینکه سودمند می‌باشند، ولی کافی نیستند، به‌خصوص وقتی که لازم است اطلاعات مشابهی به گروه نسبتا بزرگی از سرویس گیرنده‌ها که در نواحی جغرافیایی جداگانه هستند، فرستاده شود. این نیازمندی منجر به شکل‌گیری تکنیک دیگری به نام مسیر یابی ارسال چندمنظوره [۶] شده است. مسیریابی ارسال چندمنظوره قادر به فرستادن اطلاعات به یک گروه از مقصدها به‌طور همزمان است (رزینده، ۲۰۰۶) .

۱.۱ بهینه‌سازی ترکیباتی

در دهه‌های اخیر، تلاش برای یافتن جواب بهینه برای دسته‌ایی از مسائل که بهینه‌سازی ترکیباتی نامیده می‌شود، روبه افزایش بوده است. این موضوع بسیار گسترده است و کارهای بسیاری در این

[۱] Routing
[۲] Server
[۳] Client
[۴] Routing Unicast
[۵] Routing Broadcast
[۶] Routing Multicast

زمینه انتشار یافته است. یک نمونه از مسئله‌ی بهینه‌سازی ترکیباتی را می‌توانیم با یک مجموعه از نمونه‌ها مشخص کنیم. هر نمونه از این مسائل با یک مجموعه‌ی گسسته‌ی X ، یک فضای شدنی S با این ویژگی که $S \subseteq X$ که با توجه به محدودیت‌های مسئله مشخص می‌شود همراه با یک تابع هدف $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ مشخص می‌شود. یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ترکیباتی را می‌توان بصورت یک مسئله‌ی کمینه‌سازی در نظر گرفت.

شرح مسائل ترکیباتی ساده است درصورتی که حل آن‌ها مشکل می‌باشد. اساس نظریه‌ی پیچیدگی محاسباتی توسط کوک مطرح شده است. او در مقاله‌اش تلاش نمود که مسائل را به دو دسته‌ی آسان و سخت دسته بندی نماید. یک مسئله آسان نامیده می‌شود، هرگاه بتوانیم مسئله را در یک زمان چندجمله‌ایی حل نمائیم. و یک مسئله را سخت می‌نامند، هرگاه یک الگوریتم کارا در زمان چندجمله‌ایی برای حل آن وجود نداشته باشد.

به‌خاطر اهمیت مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی روش‌های حل فراوانی برای آن‌ها به‌وجود آمده است. این روش‌ها به دو دسته‌ی دقیق و تقریبی تقسیم می‌شوند. روش‌های دقیق تضمین می‌کنند که یک جواب بهینه در یک زمان مشخص را بدست آوریم. بدیهی است که برای مسائل بهینه سازی ترکیباتی که متعلق به دسته‌ی مسائل ترکیباتی سخت هستند، روش‌های دقیق نیازمند زمان نمایی هستند. این الگوریتم‌ها برای کارهای عملی نیازمند زمان اجرای بیش از اندازه هستند. بنابراین روش‌های تقریبی برای حل مسائل بهینه‌سازی سخت بسیار مناسب هستند. در این حالت برای اینکه بتوانیم یک جواب بهینه را در یک زمان قابل قبول داشته باشیم بایستی بهینگی را از دست بدهیم(شیبانی، ۲۰۰۵) .

۱.۲ مسیریابی ارسال چند منظوره

هدف اصلی در مسیریابی ارسال چندمنظوره، فرستادن داده از یک یا چند منبع به چندین مقصد، ضمن کمینه کردن استفاده از منابع می‌باشد. مثال‌هایی از منابع که می‌تواند کمینه شوند شامل پهنای باند، زمان و هزینه‌های ارتباطی است.

کاربرد اصلی شبکه‌های کامپیوتری شامل ارسال اطلاعات از برخی از سرویس دهنده‌ها، به تعداد

زیادی از سرویس گیرنده‌ها، به‌طور گزینشی است. برای مثال می‌توان به چنین کاربردهایی اشاره نمود: سیستم‌های توزیع چندرسانه (*Pasquale et al.*1998) ، ویدئو کنفرانس (*Eriksson*1994) ، انتقال نرم افزارها (*Han and Shahmehri et al.* 2000) ، گروه - افزارها (*Chockler et al.* 1996) ، و انجمن‌های بازی (*Park and Park et al.* 1997) .

در میسریابی ارسال چند منظوره، هدف ارسال چندمنظوره فناوری است، که به جهت تسهیل این نوع تبادل اطلاعات، با ارسال داده از یک یا چند منبع به تعداد بسیاری مقصد استفاده شده است. این کار به گونه‌ای انجام می‌گیرد که استفاده کلی از منابع شبکه تحت نظر، کمینه شده باشد.

در دهه‌های گذشته برای بکارگیری مسیریابی ارسال چندمنظوره، پروتوکول‌های بسیاری از فناوری‌های ارسال چندگانه به انجام رسیده است. هر فناوری پیشنهاد شده به جواب مسائل ترکیباتی (معمولا سخت) نیاز دارند.

در سیستم‌هایی که در پخش صدای رادیویی بکار گرفته می‌شوند، ایده ارسال اطلاعات برای تعداد زیادی کاربر رایج است. رادیو و تلویزیون دو مثال استاندارد از سیستم‌های پخش رادیویی هستند که به وفور استفاده شده‌اند. از سوی دیگر، شبکه‌ها در ابتدا به منظور استفاده در وسائل ارتباطی میان افراد نسبتا کمی طراحی شده بوده است.

بسته پروتکل TCP/IP که فناوری اصلی مورد استفاده در اینترنت است، برای انتقال بسته‌های اطلاعاتی، به سمت مقاصد منفرد، از پروتکل‌های مسیریابی استفاده می‌کند. بیشتر این پروتکل‌ها بر اساس محاسبات کوتاه‌ترین مسیر هستند. یک مثال خوب از یک پروتکل مسیریابی بسیار پر کاربرد، پروتکل $OSPF$ است که برای محاسبه مسیریابی جدول‌ها برای مسیریاب‌ها درون یک زیر شبکه بکار رفته است. در $OSPF$ ، هر مسیریاب در شبکه مسئول پشتیبانی جدولی از مسیرها، برای مقصدهای قابل حصول است. این جدول می‌تواند با استفاده از الگوریتم دیجسترا (۱۹۵۹) [۷] کوتاه‌ترین مسیرها از گره کنونی تا تمام مقصدهای دیگر در زیر شبکه کنونی را محاسبه کند. این فرایند می‌تواند به طور جبری در زمان چندجمله‌ای با استفاده از بیشترین مرتبه n^3 انجام شود که n تعداد گره‌های درگیر است.

[۷] Algorithm Dijkstras

الگوریتم دیجسترا، مسئله‌ی کوتاهترین مسیر با یک سرویس دهنده را حل می‌کند، به شرطی که تمام رئوس دارای وزن نامنفی باشند. شروع این الگوریتم با یک رأس، به عنوان رأس مبدأ، به رئوس دیگر است به‌طوری که تمام دیگر رئوس را، با کم‌ترین هزینه به هم متصل نماید. رئوس، با توجه به فاصله‌ی آن ها از رأس قبلی انتخاب می‌شوند. یعنی ، ابتدا با رأس مبدأ شروع می‌کنیم ، سپس نزدیک‌ترین رأس به رأس مبدأ انتخاب می‌شود، رأس نزدیک بعدی و الی آخر . به همین ترتیب الگوریتم ادامه پیدا می‌کند تا اینکه درخت بوجود آمده شامل تمام رئوس بوده و کم‌ترین هزینه را داشته باشد (اولیوریا، ۲۰۰۴) .

۱.۳ کاربردهای مسیریابی ارسال چندمنظوره

کاربردهای مسیریابی ارسال چندمنظوره طیف گسترده‌ای از جمله تجارت، دولت و سرگرمی دارد. یکی از اولین کاربردهای مسیریابی ارسال چندمنظوره در پخش رادیویی صدا بوده است. در حقیقت، اولین استفاده واقعی از اینترنت [۸] ساخته شده در سال ۱۹۹۲ بوده است.

یک کاربرد مهم دیگر از مسیریابی ارسال چندمنظوره ویدئو کنفرانس است.

از دیگر کاربردهای مسیریابی ارسال چندمنظوره، که در طول دهه‌های گذشته مورد استفاده قرار گرفته است، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود؛ ایستگاه‌های تلویزیونی، اینترنت بی‌سیم، توزیع نرم افزار و تقاضای ویدئو (اولیوریا، ۲۰۰۴) .

۱.۴ مسائل اساسی در مسیریابی ارسال چندمنظوره

در این قسمت ما مسائلی که در شبکه‌های ارسال چند منظوره رخ می‌دهد را مورد بحث قرار می‌دهیم. ابتدا، واژگان مورد استفاده را مطرح و تعریف می‌کنیم و در ادامه برخی مسائل اساسی که در مسیریابی ارسال چند منظوره، استفاده می‌شود را بررسی می‌کنیم.

---

[۸] Backbone Multimedia

۱.۴.۱ اصطلاحات نظریه‌ی گراف

تعریف ۱.۴.۱ گراف ساده‌ی G به صورت جفت $(V(G), E(G))$ است که معمولا آن را به‌صورت (V, E) نمایش می‌دهیم. V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی از عناصری به‌نام رئوس(یا گره‌ها، یا نقاط) است و E مجموعه‌ای متناهی از ازواج نامرتب از عناصر V که یال‌ها نامیده می‌شوند. اندازه‌ی رئوس یک گراف را با $|V|$ و اندازه‌ی یال‌ها را با $|E|$ نشان می‌دهیم.

توجه داریم که چون E یک مجموعه است، نه یک خانواده، در گراف ساده بین دو رأس فقط یک یال وجود دارد.

بیشتر نتایجی را که در یک گراف ساده بدست می‌آید می‌توان بدون اشکال زیادی به موارد کلی‌تر، که بین دو رأس یال‌های بیشتری وجود دارد، تعمیم داد. به‌علاوه اغلب مناسب است که محدودیت اینکه هر یال باید دو رأس متمایز را به هم متصل کند حذف کنیم، و وجود طوقه‌ها را بپذیریم. یعنی یال‌هایی که یک رأس را به خودش وصل می‌کنند. شکل حاصل را که در آن طوقه‌ها و یال‌های چندگانه وجود دارد یک گراف عمومی و یا به‌طور ساده، گراف می‌نامند(ویلسون، ۱۳۸۱) .

به شکل صوری تر، گراف G بصورت جفت $(V(G), E(G))$ تعریف می‌شود که در آن $V(G)$ یک مجموعه‌ی متناهی ناتهی است که عناصر آن را رأس می‌نامند، و $E(G)$ خانواده‌ایی است متناهی از ازواج نامرتب از عناصر $V(G)$ ، (که لزوما متمایز نیستند)، موسوم به یال. توجه دارید که استفاده از کلمه‌ی خانواده وجود یال‌های چندگانه را مجاز می‌سازد. $V(G)$ را مجموعه - رأس و $E(G)$ را خانواده - یال G می‌گویند.

تعریف ۱.۴.۲ گراف جهت‌دار D به‌صورت زوج $(V(D), A(D))$ تعریف می‌شود که در آن $V(D)$ یک مجموعه‌ی متناهی ناتهی، از عناصری موسوم به رأس است و $A(D)$ خانواده‌ایی متناهی از ازواج مرتب از عناصر $V(D)$ به نام کمان [۹] ، است. کمانی که عنصر اول v و عنصر دوم آن w است، یک کمان از v به w می‌نامند و بصورت $[v, w]$ می‌نویسند و یا بصورت ساده vw ، باید توجه داشت که کمان‌های vw و wv متفاوت هستند.

[۹] Arc

اگر D طوقه نداشته باشد و کمان‌های D متمایز باشند (یعنی $A(D)$ یک مجموعه باشد و نه یک خانواده)، آن‌گاه D را یک گراف جهت دار ساده گویند.

تعریف ۱.۴.۳ گراف G را در نظر بگیرید، تعداد رأس‌های G را مرتبه‌ی G می‌نامند و آن‌را با p نشان می‌دهند. همچنین، تعداد یال‌های G را اندازه‌ی G می‌نامند و آن را با q نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۴.۴ دو رأس u, v در گراف G مجاور هستند هرگاه یک یال بین آن‌ها وجود داشته باشد یعنی، $(u, v) \in E$. در این صورت می‌گویند که رئوس u و v بر آن یال واقع هستند. مجموعه‌ی رئوسی که مجاور با رأس v هستند، همسایگی v نامیده می شوند و آن را با $\Gamma(v) = \{u \in V | u, v \in E\}$ نمایش می دهیم. به همین ترتیب دو یال متمایز از G را مجاور گویند، هرگاه حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۱.۴.۵ در گراف G ، تعداد یال‌هایی را که از رأس v می‌گذرند درجه رأس v می‌نامند و آن را با $deg_G v$ و یا به اختصار با $deg\ v$ نشان می‌دهند. اگر $deg\ v$ عددی زوج باشد، v را رأس زوج و در غیر اینصورت رأس فرد می‌نامند. رأس از درجه‌ی صفر را رأس تنها یا منزوی می‌نامند.

قضیه ۱.۴.۱ اگر $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ مجموعه‌ی رأس‌های گراف G باشد، آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^{p} deg\ v_i = 2q$$

قضیه ۱.۴.۲ اگر G یک گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q باشد، در اینصورت، میانگین درجه‌ی رأس‌های G برابر است با $\frac{2q}{p}$.

تعریف ۱.۴.۶ اگر G یک گرافی با مجموعه‌ی رئوس $\{1, 2, \cdots, n\}$ باشد، ماتریس مجاورت A را به صورت یک ماتریس $n \times n$ تعریف می‌کنیم، که عنصر ij ام آن برابر تعداد یال‌هایی است که رئوس i ام و j ام را به هم وصل می‌کنند. به‌علاوه اگر یال‌ها با $\{1, 2, \cdots, m\}$ مشخص شده باشند، ماتریس وقوع M را بصورت یک ماتریس n تعریف می‌کنیم که عنصر ij ام آن یک است اگر رأس i ام بر یال j ام واقع باشد و در غیر اینصورت صفر است.

تعریف ۱.۴.۷ یک گراف ساده را که هر دو رأس متمایز در آن مجاور باشد، یک گراف کامل می‌نامند. گراف کامل با n رأس را معمولا به صورت K_n ، نشان می‌دهند، می‌توان نشان داد که K_n دارای $\frac{1}{2}(n(n-1))$ یال است.

تعریف ۱.۴.۸ گرافی که درجه‌ی تمام رئوس آن با هم برابر باشند، یک گراف منتظم است. اگر درجه‌ی هر رأس r باشد، گراف را منتظم درجه‌ی r و یا $r-$ منتظم می‌نامند.

تعریف ۱.۴.۹ فرض کنید مجموعه - رأس یک گراف را بتوان به دو مجموعه‌ی مجزای V_1 و V_2 افراز کرد، به طوری که هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 وصل کند. در این‌صورت G را یک گراف دو بخشی می‌نامند.

تعریف ۱.۴.۱۰ اگر دو گراف $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ و $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ داده شده باشند، که در آن بنابه فرض $V(G_1)$ و $V(G_2)$ مجزا هستند، آن‌گاه اجتماع آن‌ها $G_1 \cup G_2$ ، عبارتست از گرافی که مجموعه - رأس آن $V(G_1) \cup V(G_2)$ و خانواده‌ی یال آن $E(G_1) \cup E(G_2)$ است.

تعریف ۱.۴.۱۱ گراف G همبند نامیده می شود، هرگاه برای هر جفت v, w از رئوس، یک مسیری از v به w وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۴.۱۲ فرض کنید G یک گراف ساده، با مجموعه‌ی رئوس $V(G)$ است. مکمل G که با نماد $\bar{G}$ نشان داده می‌شود، یک گراف ساده است که مجموعه‌ی رئوس آن $V(G)$ است و در آن هر دو رأسی که در G مجاور نیستند، مجاور هستند. در نتیجه اگر G ، n رأس داشته باشد، آن‌گاه G را می‌توان با حذف تمام یال‌های G ، از K_n بدست آورد(G یک زیر گراف K_n در نظر گرفته می‌شود).

تعریف ۱.۴.۱۳ درخت یک گراف همبند است که شامل هیچ دوری نیست.

تعریف ۱.۴.۱۴ گراف بدون دوری که لزوما همبند نیست، جنگل نامیده می شود. همه ی قسمت های یک جنگل درخت هستند.

تعریف ۱.۴.۱۵ یک برگ از یک درخت، یک رأس از درجه ی یک است.

قضیه ۱.۴.۳ فرض کنید G یک گراف ساده است که n رأس دارد؛ اگر G دارای k مولفه باشد، آن‌گاه m تعداد یال‌های آن در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند.

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

قضیه ۱.۴.۴ هر گراف ساده با n رأس و بیش از $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ یال، همبند است (ویلسون، ۱۳۸۱)

در این بخش، گراف را بدون جهت و بدون حلقه در نظر می‌گیریم. در مسائل کاربردی، گره‌ها در گراف نشان دهنده‌ی میزبان، و یال‌ها بیان کننده‌ی خطوط شبکه است.

برای هر یال $(i,j) \in E$ ، می‌توانیم توابعی که ویژگی‌های شبکه را بررسی می‌کنند، مطرح کنیم. برای هر $i,j \in V$ و برای هر یال $(i,j) \in E$ توابع مورد استفاده عبارتند از؛ تابع ظرفیت $c(i,j)$ ، تابع هزینه $w(i,j)$ و تابع تأخیر $d(i,j)$.

تابع ظرفیت $c(i,j)$ ، نشان دهنده‌ی بیشینه‌ی حجم اطلاعاتی است، که می‌تواند بین گره‌ی i,j جابجا شود. تابع هزینه‌ی $w(i,j)$ برای نشان دادن مقدار هزینه‌ی خطوط شبکه‌ای بین گره‌ی i,j به کار برده می‌شود، که شامل هزینه‌ی اجاره دادن و نگهداری است.

برخی کاربردهای مسیریابی ارسال چندگانه، روی زمان تأخیر در انتقال‌ها (مانند تحویل چند رسانه‌ای) بسیار حساس می‌باشند، و نیازمند این هستند که کل زمان بین فرستادن و دریافت کردن بسته های اطلاعاتی به یک مقدار بیشینه خاص، محدود شود. تابع تأخیر $d(i,j)$ برای مدل کردن این نوع از محدودیت ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. $d(i,j)$ بیان کننده ی زمان مورد نیاز برای انتقال اطلاعات بین رأس i و رأس j می‌باشد.

یک مسیر در گراف G یک دنباله از رئوس $v_{i_j},...,v_{i_1}$ است که $(v_{i_k},v_{i_{k+1}})$ برای تمام $k \in \{1,...j-1\}$ در E می باشند. در مسئله مسیریابی ما به دنبال یافتن مسیرهایی هستیم که، یک منبع S را به یک مجموعه‌ی D از اهداف، ارتباط می‌دهد. هزینه‌ی $w(P)$ از مسیر P بصورت جمع هزینه‌ی تمام یال‌های $(v_{i_k},v_{i_{k+1}})$ در P می باشد. یک مسیر P بین رئوس u,v یک مسیر کمینه نامیده می‌شود. هرگاه هیچ مسیری مانند P' در G وجود نداشته باشد، که $w(P') < w(P)$. تأخیر