بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده فنی و مهندسی

بخش مهندسی برق

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق گرایش مخابرات- میدان

استفاده از روش های بدون مش در حل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان با تاکید بر مبحث پایداری

مؤلف:

فاطمه انصاری‌زاده

استاد راهنما:

دکتر مسعود موحدی

استاد مشاور:

دکتر احمد حکیمی

بهمن ماه ۱۳۹۱

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش مهندسی برق

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فاطمه انصاری زاده

استاد راهنما: آقای دکتر مسعود موحدی

استاد مشاور: آقای دکتر احمد حکیمی

داور ۱ : آقای دکتر کامبیز افروز

داور۲ : آقای دکتر عظیم ریواز

نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع: آقای دکتر مجتبی برخورداری

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده: دکتر مریم احتشام‌زاده

تقدیم به

تلاشی است ناقابل و شاید هیچ، اما به رسم ادب تقدیم می‌شود
به پیشگاه مقدس امام عصر (عج)

تقدیم به مادر مهربان و پدر بزرگوارم

مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست. آنان‌که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر. توانشان رفت تا به توانایی برسم، سپید موی گشتند تا سپیدروی بمانم. آنان‌که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی دل‌هایشان سرمایه جاودان زندگی من است.

در برابر وجود گرامی آنان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم. سایه پر مهر وجودشان پاینده باد!

و نیز به برادران بسیار عزیزم که مایه دلگرمی هستند.

تشکر و قدردانی

با سپاس از:

استاد ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر مسعود موحدی به خاطر راهنمایی‌های مدبرانه و نیز تلاش‌های بی‌شائبه ایشان در پیش‌برد و تصحیح این پایان نامه، و نیز به خاطر تمام آموخته‌های علمی و اخلاقی که از ایشان فرا گرفتم، چراکه حقیقتاً بدون راهگشایی ایشان این هدف میسر نبود. باشد که این یادآوری نمایان‌گر ارادت خالصانه اینجانب نسبت به مساعدت های بی‌دریغ ایشان باشد.

و استادِ به غایت گرامی جناب آقای دکتر احمد حکیمی به واسطه زحمات و تلاش‌های ایشان در این دوره از تحصیل و نیز دوره کارشناسی که سعادت استفاده از محضر ایشان را داشتم. شایسته است تشکر ویژه‌ای از حضور ایشان به جهت درس‌های زندگی که ایشان چون پدری دلسوز به ما آموختند داشته باشم.

از جناب آقای دکتر کامبیز افروز و نیز آقای دکتر عظیم ریواز، به خاطر قبول داوری این پایان نامه و حسن دقتی که در تصحیح آن داشتند، و نیز راهنمایی ایشان در راستای اصلاح پایان‌نامه سپاسگزارم.

و با سپاس فراوان از دوست و همکلاس عزیزم، جناب آقای مهندس هادی نادریان.

چکیده

تا به امروز روش‌های بدون‌مش کارآمدترین روش عددی موجود برای یافتن پاسخ معادلاتی که در مسائل مختلف با آن روبرو هستیم، بوده‌اند. یکی از محدودیت‌های اساسی به هنگام استفاده از الگوریتم‌های عددی زمان‌بر بودن فرآیند شبیه‌سازی است. با افزایش گام زمانی این فرآیند در زمان کوتاهتری انجام خواهد شد، بنابراین افزایش هرچه بیشتر اندازه گام زمانی مطلوبِ بسیاری از روش‌های ارائه شده در سال‌های اخیر بوده‌اند.

در این پایان‌نامه روشی بی‌قید و شرط پایدار برای تحلیل معادلات ماکسول براساس روش‌های بدون‌مش، با بهره گیری از تکنیک گام زمانی شکسته شده[1] ارائه شده است. در فصل اول پایان‌نامه در مورد روش‌های بدون مش، دلیل پیدایش و مزایای آن نسبت به روش‌های پیشین توضیح مختصری ارائه شده‌است. برای درک مفهوم پایداری بی‌قید وشرط، در فصل دوم مبحث حوزه زمان مطرح شده و شرط پایداری در حوزه تفاضل محدود بیان می‌شود. پس از آن در فصل سوم تکنیک شکستن گام زمانی که پیش از این به کمک روش تفاضل محدود پیاده‌سازی شده بود، این بار با روش بدون‌مش پیاده‌سازی شده و پایداری آن بررسی می‌شود. در نهایت مقایسه‌ای بین سرعت فازِ روش‌های مختلفی که در آن‌ها از تکنیک شکستن گام زمانی استفاده شده، در دو روش تفاضل محدود و بدون‌مش انجام گرفته‌است.

کلید واژه: پایداری بی‌قید و شرط، روش المان محدود FEM، روش‌های بدون‌مش MLM، روش تفاضل محدود FDM و شرط پایداری CFL.

---

[1] Split-Step

فهرست مطالب:

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه

با پیشرفت علوم مهندسی نیازی روزافزون برای تحلیل مسائل پیچیده مهندسی وجود دارد. روش-های عددی بدون‌مش در حال حاضر جدیدترین و کارآمدترین روش عددی شناخته شده هستند. پیش از آن روش المان محدود[1] به عنوان قدرتمندترین ابزار در تحلیل مسائل علوم مهندسی مطرح بود. تولید شبکه‌ای متشکل از المان‌هایی که می‌بایست به گونه‌ای خاص با یکدیگر در ارتباط باشند تا اجزای تشکیل دهنده دامنه مساله هیچ همپوشانی[2] نداشته و از سوی دیگر هیچ فضای خالی[3] بین آن‌ها باقی نماند، فرآیندی بسیار زمان‌بر بود. از این گذشته چنانچه دامنه مساله الکترومغناطیسی دارای ناپیوستگی و یا مرزهای متغیر با زمان می‌بود، ایجاد شبکه‌ی وفقی از دقت پاسخ کم کرده و زمان محاسبات را بسیار بالا می‌برد. حال آن‌که در روش‌های بدون مش هیچ‌گونه ارتباط از پیش تعریف شده‌ای بین نقاط پراکنده شده روی دامنه و مرز برقرار نیست و بنابراین به هنگام پیچیده بودن مرز، محیط و یا معادلات مدل کننده مسائل الکترومغناطیسی این روش‌ها انعطاف پذیری بسیار بالایی دارند. در کنار این محاسن، در روش‌های بدون‌مش با تغییر تراکم نقاط پراکنده شده روی دامنه می‌توان به میزان دقت مورد نیاز دست یافت و از انجام محاسبات اضافی رهایی یافت. این ویژگی‌های منحصر به-فرد سبب شده با وجود نوظهور بودن، این دانش در سال‌های اخیر پیشرفت قابل توجهی داشته و در مهندسی عمران، مکانیک و برق بسیار مورد استقبال واقع شود. هرچند امروزه کامپیوترهایی با سرعت بالا در دسترس هستند، اما مساله اساسی یافتن الگوریتم عددی مناسب به منظور یافتن پاسخی تقریبی با دقت قابل قبول برای چنین مسائلی است. در مهندسی برق و خصوصاً مبحث الکترومغناطیس به طور گسترده‌ای با معادلات ماکسول که به صورت کرل و دیورژانس میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بیان می شوند، سر و کار داریم. معادلات ماکسول به دو فرم انتگرالی ودیفرانسیلی قابل نمایش هستند،که البته فرم انتگرالی حالت کلی‌تر معادلات را بیان می‌کند [۱]. به منظور بررسی چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی نیاز به داشتن پاسخ معادلات ماکسول است.

به منظور یافتن جواب معادلات ماکسول ابتدا از روش‌های تحلیلی[4] کمک می‌گیریم. چرا که به کمک این گونه روش‌ها به پاسخی دقیق برای مساله دست می‌یابیم و علاوه بر این، معمولا روش‌های تحلیلی

---

[1]Finite-Element Method (FEM)
[2]Overlap
[3] gap
[4]Anatytical Solution

در زمان کوتاهتری به جواب می‌رسند و این پاسخ به طور پیوسته در همه نقاط دامنه برقرار خواهد بود. در عمل مسائل بسیار محدودی و در شرایط خاص، دارای پاسخ تحلیلی[1] هستند، چرا که در طبیعت و عالمِ واقع شرایط و نیز مرز یک مساله می‌تواند بسیار پیچیده باشد [۲]. در مقابلِ روش‌های تحلیلی که تنها در مورد مسائلی به فرم متعارف[2] کارآمد است، در راستای یافتن پاسخ برای مسائلی که پاسخ تحلیلی برای آن‌ها میسر نیست، ناگزیر از استفاده از روش‌های عددی[3] هستیم. در حقیقت روش‌های عددی قابل اعمال به تمامی مسائل هستند. اما معضل اصلی در مورد روش‌های اخیر محدودیت تقریبِ مدل‌سازی و گسسته‌سازی است. از این گذشته چنین نیست که معیار دقت، پایداری و همگرایی در این روش‌ها همواره معین باشد [۳].

۱-۱- روند کلی حل یک مساله با روش‌های عددی

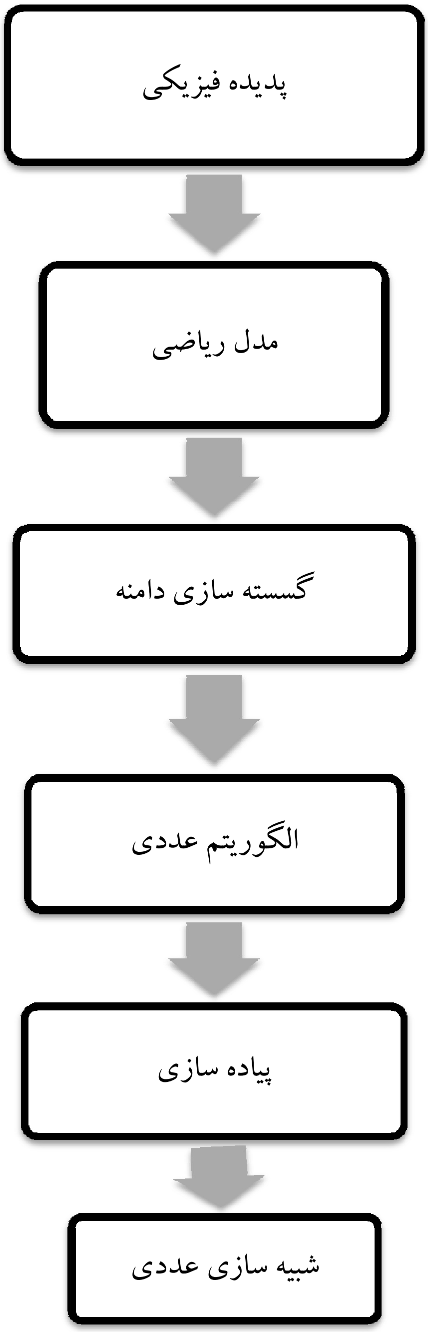
تمامی روش‌های عددی در راستای ارائه پاسخ فرآیند مشابهی را طی می‌کنند. این فرآیند چند مرحله اساسی و بنیادین دارد که به اختصار در شکل (۱-۱) نمایش داده شده‌است. در ابتدا پدیده فیزیکی مورد نظر بررسی شده و با لحاظ کردن ساده‌سازی و فرضیات ممکن، مدل ریاضی پدیده ارائه خواهد شد. این مدل ریاضی توسط معادلات حاکم بر سیستم و نیز شرایط مرزی[4] و شرایط اولیه[5] مناسب بیان می‌شود. معادلات حاکم بر سیستم می‌توانند به صورت یک سری معادلات دیفرانسیلی معمولی یا جزیی، معادلات انتگرالی و یا هر نوع معادله‌ای که قوانین فیزیکی اجازه می‌دهند، وجود داشته باشند. وجود شرایط مرزی و یا اولیه لازمه‌ی یافتن پاسخ یکتا هستند. برای حل عددی مساله می‌بایست هندسه (دامنه) مساله به قسمت‌های گسسته‌ای تقسیم شود، یعنی دامنه‌ی پیوسته با تعداد محدودی اجزای تشکیل دهنده نمایش داده شود. البته چگونگی این گسسته‌سازی بسته به روش عددی به کار گرفته شده، متفاوت است [۴]. در حقیقت گسسته‌سازی ابزاری برای تبدیل عملگرهای انتگرالی یا دیفرانسیلی موجود در معادلات حاکم بر سیستم، از حالت پیوسته به حالت گسسته است. پس از گسسته‌سازی دامنه و عملگرها می‌توان معادلات حاکم بر سیستم را به یک سری معادلات جبری تبدیل کرد.

[1] Closed Form
[2] Canonical
[3] Numerical Methods
[4] Boundary Conditions
[5] Initial Conditions

۱-۲- تاریخچه روش‌های عددی

در مطالعات و بررسی‌های علمی، شبیه‌سازی عددی روش جایگزینِ بسیار مناسبی برای آزمایش-های پرهزینه، زمان‌بر و گاهی خطرناک داخل آزمایشگاه است. مبحثی از الکترومغناطیس که در آن روش‌های محاسباتی حل مسائل مورد بررسی قرار می‌گیرند، الکترومغناطیس محاسباتی[1] نامیده می-شود. تا سال ۱۹۴۰ بیشتر مسائل الکترومغناطیسی با به کارگیری روش‌های کلاسیک نظیر جدا سازی متغیرها[2] حل می‌شدند. با پیدایش کامپیوترهای پرسرعت در اواسط دهه ۱۹۶۰ مبحث روش‌های عددی مطرح شد [۳]. از جمله قدیمی‌ترین و پرکاربردترین روش‌های عددی، روش تفاضل محدود و روش المان محدود بوده که هر یک محاسن و معایب خاص خود را دارند [۲]. در هر دو روش مذکور فضای دامنه‌ی مساله موردنظر به ترتیب به نقاط و المان‌های مختلف تفکیک می‌شود و پاسخ بدست آمده، منحصراً برای آن نقاط و المان‌ها و نه تمام فضای دامنه صادق خواهد بود. روش‌های فوق که بر پایه مش‌بندیِ[3] فضای دامنه استوار هستند، به دلایلی نظیر پرهزینه بودن، چه به لحاظ زمان‌بر بودن محاسبات و چه حجم حافظه‌ی مورد نیاز و نیز عدم توانایی در مدل کردن مرزهای پیچیده، برای حل مسائل مورد نیاز در علوم امروز ناکارآمد هستند.

---
[1] Computational Electromagnetics
[2] Separation of Variables
[3] Grid-Based



شکل ۱-۱ روند کلی عملکرد روش‌های عددی.

در راستای برطرف کردن نیاز به روشی جایگزین، در سال‌های اخیر روش‌های بدون‌مش پیشنهاد شده‌اند. چنان‌که به تفصیل بیان خواهد شد، روش‌های بدون‌مش در حالت ایده‌آل بی‌نیاز از در نظر داشتن شبکه‌ای از پیش تعریف شده از نقاط مدل کننده دامنه و مرزهای مساله هستند و لذا کارایی و انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به روش‌های پیشین دارند.

به منظور یافتن درک بهتری از روش‌های بدون‌مش مناسب است آشنایی اجمالی با روش‌های عددی که بر پایه مش‌بندی قرار دارند حاصل شود. بنابراین در ابتدای بحث توضیح مختصری در مورد روش‌های عددیِ بر پایه مش‌بندی ارائه شده و سپس مبحث اصلی که روش‌های عددی بدون‌مش هستند، مطرح و بررسی خواهد شد.

۱-۳- معرفی روش تفاضل محدود

این روش در سال۱۹۶۶ از طرف آقای Yee پیشنهاد شد [۵]. این روش در حال حاضر ساده‌ترین روش موجود از لحاظ درک و پیاده‌سازی است، و به این دلیل یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی می‌باشد. دلیل این نام‌گذاری این است که این تکنیک به منظور تقریب زدن، مشتقات موجود در معادلات ماکسول در هر دو حوزه مکان و زمان را با تفاضل محدود جایگزین می‌کند.

۱-۳-۱- چگونگی فرموله کردن روش تفاضل محدود

روش تفاضل محدود بر پایه بسط سری تیلور نوشته می‌شود. برای داشتن درک مناسبی از این روش فرض کنید تابعی پیرامون نقطه x_0 بسط داده می‌شود. به کمک بسط سری تیلور می‌توان نوشت:

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)=f(x_0)+\frac{\delta}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2!}(\frac{\delta}{2})^2f''(x_0)+\frac{1}{3!}(\frac{\delta}{2})^3f'''(x_0)+\cdots \qquad (۱-۱)$$

(۲-۱)

$$f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=f(x_0)-\frac{\delta}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2!}(\frac{\delta}{2})^2f''(x_0)-\frac{1}{3!}(\frac{\delta}{2})^3f'''(x_0)+\cdots$$

اختلاف دو رابطه فوق نشان می‌دهد:

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}(\frac{\delta}{2})^3 f'''(x_0)+\cdots \qquad (۳-۱)$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر δ خواهیم داشت:

$$\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}=f'(x_0)+\frac{1}{3!}(\frac{\delta}{2})^2 f'''(x_0)+\cdots \qquad (۴-۱)$$

ملاحظه می‌شود که جمله سمت راست بیانگر مشتق تابع در نقطه x_0 به علاوه جمله‌ای وابسته به δ^2 و بی‌نهایت جمله دیگر است که در این‌جا نشان داده نشده‌اند. پس می‌توان نوشت:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta}+O(\delta^2) \qquad (۵-۱)$$

ترم $O(\delta^2)$ نشان‌گر این است که در بین جملاتی که در این‌جا نشان داده نشده‌اند، کمترین توان δ به صورت δ^2 بوده است. برای داشتن تقریب قابل قبول δ مقدار کوچکی انتخاب می‌شود به این ترتیب می‌توان از جملاتی که با $O(\delta^2)$ نشان داده شده‌اند صرف نظر کرد.

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}\approx\frac{f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)}{\delta} \qquad (۶-۱)$$

رابطه حاصل را تقریب تفاضل مرکزی[1] می‌نامند که دارای دقتی از درجه ۲ می‌باشد، به این معنا که اگر δ با ضریب ۱۰ کاهش یابد میزان خطای تقریب با ضریب ۱۰۰ کاهش می‌یابد. برای داشتن دقت بالاتر باید جملات بیشتری از بسط سری تیلور را در نظر گرفت اما بنابر دلایلی دقت از مرتبه ۲ ترجیح داده می‌شود.

[1] Central-Difference Approximation