

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده فنی و مهندسی

بخش مهندسی برق

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق گرایش
مخابرات - میدان

استفاده از روش های بدون مش در حل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان با تاکید بر
مبحث پایداری

مؤلف:

فاطمه انصاری زاده

استاد راهنما:

دکتر مسعود موحدی

استاد مشاور:

دکتر احمد حکیمی

بهمن ماه ۱۳۹۱



دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط درجه کارشناسی ارشد به

بخش مهندسی برق

دانشکده فنی و مهندسی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فاطمه انصاری زاده

استاد راهنما: آقای دکتر مسعود موحدی

استاد مشاور: آقای دکتر احمد حکیمی

داور ۱: آقای دکتر کامبیز افروز

داور ۲: آقای دکتر عظیم ریواز

نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع: آقای دکتر مجتبی برخوردار

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده: دکتر مریم احتشامزاده

حق چاپ محفوظ و مخصوص به دانشگاه شهید باهنر کرمان است

تقدیم به

تلاشی است ناقابل و شاید هیچ، اما به رسم ادب تقدیم می‌شود
به پیشگاه مقدس امام عصر (عج)

تقدیم به مادر مهربان و پدر بزرگوارم

مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگی، مدیون حضور سبز آنهاست. آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و وجودشان برایم همه مهر. توانشان رفت تا به توانایی برسم، سپید موی گشتند تا سپیدروی بمانم. آنان که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی دل‌هایشان سرمایه جاودان زندگی من است.

در برابر وجود گرامی آنان زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی مملو از عشق، محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می‌زنم. سایه پر مهر وجودشان پاینده باد!

و نیز به برادران بسیار عزیزم که مایه دلگرمی هستند.

تشکر و قدردانی

با سپاس از:

استاد ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر مسعود موحدی به خاطر راهنمایی‌های مدبرانه و نیز تلاش‌های بی‌شائبه ایشان در پیش‌برد و تصحیح این پایان‌نامه، و نیز به خاطر تمام آموخته‌های علمی و اخلاقی که از ایشان فرا گرفتم، چراکه حقیقتاً بدون راهگشایی ایشان این هدف میسر نبود. باشد که این یادآوری نمایان‌گر ارادت خالصانه اینجانب نسبت به مساعدت‌های بی‌دریغ ایشان باشد.

و استاد به‌غایت گرامی جناب آقای دکتر احمد حکیمی به واسطه زحمات و تلاش‌های ایشان در این دوره از تحصیل و نیز دوره کارشناسی که سعادت استفاده از محضر ایشان را داشتم. شایسته است تشکر ویژه‌ای از حضور ایشان به جهت درس‌های زندگی که ایشان چون پدری دلسوز به ما آموختند داشته باشم.

از جناب آقای دکتر کامبیز افروز و نیز آقای دکتر عظیم ریواز، به خاطر قبول داوری این پایان‌نامه و حسن دقتی که در تصحیح آن داشتند، و نیز راهنمایی ایشان در راستای اصلاح پایان‌نامه سپاسگزارم.

و با سپاس فراوان از دوست و هم‌کلاس عزیزم، جناب آقای مهندس هادی نادریان.

چکیده

تا به امروز روش‌های بدون‌مش کارآمدترین روش عددی موجود برای یافتن پاسخ معادلاتی که در مسائل مختلف با آن روبرو هستیم، بوده‌اند. یکی از محدودیت‌های اساسی به هنگام استفاده از الگوریتم‌های عددی زمان‌بر بودن فرآیند شبیه‌سازی است. با افزایش گام زمانی این فرآیند در زمان کوتاه‌تری انجام خواهد شد، بنابراین افزایش هرچه بیشتر اندازه گام زمانی مطلوب بسیاری از روش‌های ارائه شده در سال‌های اخیر بوده‌اند.

در این پایان‌نامه روشی بی‌قید و شرط پایدار برای تحلیل معادلات ماکسول براساس روش‌های بدون‌مش، با بهره‌گیری از تکنیک گام زمانی شکسته شده¹ ارائه شده است. در فصل اول پایان‌نامه در مورد روش‌های بدون‌مش، دلیل پیدایش و مزایای آن نسبت به روش‌های پیشین توضیح مختصری ارائه شده است. برای درک مفهوم پایداری بی‌قید و شرط، در فصل دوم مبحث حوزه زمان مطرح شده و شرط پایداری در حوزه تفاضل محدود بیان می‌شود. پس از آن در فصل سوم تکنیک شکستن گام زمانی که پیش از این به کمک روش تفاضل محدود پیاده‌سازی شده بود، این بار با روش بدون‌مش پیاده‌سازی شده و پایداری آن بررسی می‌شود. در نهایت مقایسه‌ای بین سرعت فاز روش‌های مختلفی که در آن‌ها از تکنیک شکستن گام زمانی استفاده شده، در دو روش تفاضل محدود و بدون‌مش انجام گرفته است.

کلید واژه: پایداری بی‌قید و شرط، روش المان محدود FEM، روش‌های بدون‌مش MLM، روش تفاضل محدود FDM و شرط پایداری CFL.

¹Split-Step

فهرست مطالب:

فصل اول مقدمه	۱
۱-۱- روند کلی حل یک مساله با روش های عددی	۳
۲-۱- تاریخچه روش های عددی	۴
۳-۱- معرفی روش تفاضل محدود	۶
۱-۳-۱- چگونگی فرموله کردن روش تفاضل محدود	۶
۲-۳-۱- مفهوم خطا در روش های عددی	۸
فصل دوم معرفی روش های بدون مش و بررسی تاریخچه آن	۹
۱-۲- معرفی روش های بدون مش و بررسی تاریخچه آن	۱۰
۱-۱-۲- مفهوم مش و مش بندی	۱۱
۲-۲- تکنیک های تقریب تابع	۱۲
۱-۲-۲- تقریب تابع بر اساس تفاضل محدود	۱۲
۲-۲-۲- تقریب تابع بر اساس سری محدود	۱۳
۳-۲-۲- تقریب تابع بر اساس انتگرال محدود	۱۳
۴-۲-۲- روش بدون مش SPH	۱۴
۳-۲-۳- دسته بندی روش های بدون مش	۱۴
۱-۳-۲- روش های فرم قوی	۱۵
۲-۳-۲- روش های فرم ضعیف	۱۵
۳-۳-۲- روش های فرم ضعیف-قوی	۱۵
۴-۲-۴- پرکاربردترین روش های بدون مش	۱۶
۵-۲- چگونگی عملکرد روش های بدون مش	۱۷
۲-۵-۲- دامنه پشتیبانی	۱۹
۳-۵-۲- دامنه تاثیر	۱۹
۴-۵-۲- تفاوت دامنه تاثیر و دامنه پشتیبانی	۲۰
۶-۲- مراحل پیاده سازی روش های بدون مش	۲۱
۱-۶-۲- مرحله اول: توصیف معادلات و دامنه مساله	۲۱
۲-۶-۲- مرحله دوم: توزیع گره درون دامنه	۲۱

- ۲۲-۳-۶-۲ مرحله سوم: تقریب متغیر مجهول به کمک تابع شکل.....
- ۲۲-۴-۶-۲ مرحله چهارم: گسسته‌سازی و تشکیل دستگاه معادلات و اعمال شرایط مرزی.....
- ۲۳-۵-۶-۲ مرحله پنجم: حل دستگاه معادلات جبری.....
- ۲۳-۶-۶-۲ مرحله ششم.....
- ۲۳-۷-۲ تکنیکهای مختلف در روش‌های بدون مش.....
- ۲۴-۸-۲ توابع شکل.....
- ۲۷-۹-۲ تابع شکل درون‌یاب نقطه‌ای (PIM).....
- ۲۷-۱-۹-۲ توابع شکل PIM بر اساس توابع پایه چند جمله‌ای.....
- ۳۰-۲-۹-۲ ویژگی توابع درون‌یاب نقطه‌ای با استفاده از توابع پایه چند جمله‌ای.....
- ۳۱-۳-۹-۲ توابع پایه شعاعی.....
- ۳۴-۴-۹-۲ ویژگی‌های تابع شکل RPIM.....
- ۳۷-۱۰-۲ چگونگی تاثیر پارامترهای تابع پایه روی تابع شکل.....
- ۳۸-۱۱-۲ انتخاب یک پارامتر تابع شکل.....
- ۳۸-۱۲-۲ چگونگی یافتن پارامترهای تابع شکل بهینه.....
- ۳۹-۱-۱۲-۲ روش LOOCV.....

فصل سوم بیان مفهوم پایداری و معرفی روش‌های بی‌قید و شرط پایدار..... ۴۰

- ۴۱-۱-۳ مقایسه دو حوزه زمان و فرکانس در حل معادلات ماکسول.....
- ۴۱-۲-۳ بررسی معادلات ماکسول در حوزه زمان.....
- ۴۱-۱-۲-۳ انگیزه انتخاب حوزه زمان برای بررسی مسائل الکترومغناطیسی.....
- ۴۲-۳-۳ پایداری.....
- ۴۲-۱-۳-۳ مفهوم پایداری در سیستم‌ها.....
- ۴۲-۴-۳ مفهوم گام زمانی و بررسی وضعیت پایداری.....
- ۴۳-۱-۴-۳ ارتباط اندازه گام زمانی و پایداری.....
- ۴۳-۵-۳ بررسی چگونگی پایداری در روش‌های بر پایه مش‌بندی.....
- ۴۳-۱-۵-۳ معیار پایداری در روش تفاضل محدود.....
- ۴۴-۲-۵-۳ روش تست پایداری ون نیومن.....
- ۴۵-۳-۵-۳ کاستی‌های روش تفاضل محدود در حوزه زمان.....

- ۴۶-۳-۵-۴- مبحث پایداری در روش المان محدود.....
- ۴۶-۳-۶- بررسی پایداری بر اساس معادلات مدل کننده مساله.....
- ۴۶-۳-۶-۱- مفهوم صریح یا ضمنی بودن یک معادله.....
- ۴۷-۳-۷- پایداری بی قید و شرط.....
- ۴۷-۳-۸- روش های بی قید و شرط پایدار معرفی شده.....
- ۴۷-۳-۸-۱- روش Crank-Nicolson (CN).....
- ۴۸-۳-۸-۲- روش Alternating direction method (ADI).....
- ۴۸-۳-۸-۳- چگونگی عملکرد روش ADI.....
- ۴۹-۳-۸-۴- استفاده از تکنیک ADI در روش تفاضل محدود.....
- ۴۹-۳-۹- مقایسه دو روش ADI و CN.....
- ۵۰-۳-۱۰- تکنیک های ارائه شده در روش تفاضل محدود برای بهبود بخشیدن به وضعیت پایداری.....
- ۵۱-۳-۱۱- فعالیت های انجام شده روی روش های بدون مش.....
- ۵۱-۳-۱۱-۱- روش بدون مش در حوزه زمان بر اساس توابع شکل RPIM.....
- ۵۲-۳-۱۱-۲- روش ADI پیاده سازی شده توسط روش های بدون مش.....
- ۵۵-۳-۱۱-۳- روشی بر پایه RPIM با استفاده از چند جمله ای های لاگور.....
- ۵۷-۳-۱۲- مبحث پایداری در روش های بدون مش.....
- فصل چهارم تکنیک شکستن گام زمانی در روش های بدون مش.....**
- ۶۰-۴-۱- روش گام زمانی شکسته شده برای حل معادلات مختلف.....
- ۶۰-۴-۲- تکنیک گام زمانی شکسته شده در حل معادلات کرل ماکسول.....
- ۶۱-۴-۲-۱- بحث حوزه مکان.....
- ۶۱-۴-۳- زمینه کاربرد روش گام زمانی شکسته شده.....
- ۶۱-۴-۴- چگونگی عملکرد روش گام زمانی شکسته شده در حل معادلات حوزه زمان.....
- ۶۲-۴-۵- روش های گام زمانی شکسته شده با دقت زمانی مرتبه بالا.....
- ۶۲-۴-۶- دلیل انتخاب تکنیک گام زمانی شکسته شده.....
- ۶۴-۴-۷- پیاده سازی روش پیشنهادی در این پایان نامه.....
- ۶۴-۴-۷-۱- اعمال روش گام زمانی شکسته شده به معادلات ماکسول.....
- ۶۷-۴-۷-۲- گسسته سازی مکانی در روش بدون مش گام زمانی شکسته شده.....

- ۶۹..... اعمال تحریک به محفظه تشدید ۳-۷-۴
- ۷۰..... تحلیل معادلات به دست آمده در روش پیشنهادی ۸-۴
- ۷۰..... گسترش معادلات کرل ماکسول برای موج TEz ۱-۸-۴
- ۷۱..... شرایط مرزی مساله برای مورد بررسی ۲-۸-۴
- ۷۱..... انواع شرایط مرزی ۳-۸-۴
- ۷۳..... بررسی وضعیت مساله در حالت پایداری مشروط ۹-۴
- ۷۳..... انتخاب گام زمانی در روش های بدون مش ۱-۹-۴
- ۷۴..... پیاده سازی الگوریتم leap-frog توسط روش بدون مش ۲-۹-۴
- ۷۶..... نمایش برقراری پایداری بی قید و شرط در روش های CN و ADI ۱۰-۴
- ۷۸..... پایداری بی قید و شرط در روش CN ۱-۱۰-۴
- ۷۸..... پایداری بی قید و شرط در روش ADI ۲-۱۰-۴
- ۷۹..... نمایش پایداری بی قید و شرط با بهره گیری از روش شکستن گام زمانی ۱۱-۴
- ۸۰..... مقایسه ای بین روش های مختلف گام زمانی شکسته شده ۱۲-۴
- ۸۲..... سرعت فاز در شبکه Yee ۱۳-۴
- ۸۴..... سرعت فاز در روش های بدون مش ۱۴-۴
- ۸۴..... تکنیک به کار گرفته شده برای محاسبه سرعت فاز ۱-۱۴-۴
- ۸۴..... چگونگی تغییرات سرعت فاز در روش های بدون مش ۲-۱۴-۴
- ۸۷..... فصل پنجم نتیجه گیری و پیشنهادات**
- ۸۸..... نتیجه گیری کلی بحث ۱-۵
- ۸۸..... روش های گام زمانی شکسته شده مختلف ۱-۱-۵
- ۸۸..... تغییر پارامترهای تابع شکل ۲-۱-۵
- ۸۹..... سرعت فاز ۳-۱-۵
- ۸۹..... پیشنهاداتی برای ادامه این پژوهش ۲-۵

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ روند کلی عملکرد روش های عددی. ۵
- شکل ۱-۲ اجزای میدان در روش المان محدود [۸]. ۱۱
- شکل ۲-۲ گره های میدان در روش بدون مش [۸]. ۱۱
- شکل ۳-۲ ساختار شبکه پیش زمینه در روش بدون مش فرم ضعیف [۸]. ۱۷
- شکل ۴-۲ دایره و x به ترتیب نشانگر گره و یک نقطه دلخواه هستند [۸]. ۱۹
- شکل ۵-۲ دامنه تاثیر دو گره متفاوت به همراه تابع شکل آنها. ۲۰
- شکل ۶-۲ مقایسه دو مفهوم دامنه پشتیبانی و دامنه تاثیر [۸]. ۲۱
- شکل ۷-۲ دو حالت از توزیع گره های یکسان در یک دامنه. ۲۲
- شکل ۸-۲ مراحل حل مساله در روش های بدون مش. ۲۶
- شکل ۹-۲ مثلث پاسکال مربوط به تک جمله ای های توابع پایه در فضای دو بعدی [۸]. ۲۸
- شکل ۱۰-۲ تابع شکل مربوط به گره وسط در یک محفظه دو بعدی. ۳۶
- شکل ۱۱-۲ مشتق اول تابع شکل مربوط به گره وسط در یک محفظه دو بعدی. ۳۶
- شکل ۱۲-۲ مشتق دوم تابع شکل مربوط به گره وسط در یک محفظه دو بعدی. ۳۷
- شکل ۱۳-۲ توابع پایه شعاعی گوسی در یک دامنه ثابت به ازای مقادیر متفاوت پارامتر تابع شکل. ۳۷
- شکل ۱-۳ گره های میدان الکتریکی و گره های میدان مغناطیسی [۲۸]. ۵۴
- شکل ۱-۴ پالس گوسی مدوله شده توسط یک موج سینوسی. ۷۳
- شکل ۲-۴ روش leap-frog با $dt \cong \Delta tmax$ ، پیاده سازی شده توسط روش بدون مش در بازهای طولانی. ۷۵
- شکل ۳-۴ میدان درون محفظه به ازای افزایش اندکی در گام زمانی. ۷۶
- شکل ۴-۴ مقایسه پاسخ از طریق روش CN-MLTD و ADI-MLTD. ۷۷
- شکل ۵-۴ تغییرات میدان در ADI-MLTD به ازای افزایش گام زمانی. ۷۸
- شکل ۶-۴ پایدارماندن 4SS-MLTD با افزایش اندازه گام زمانی. ۸۰
- شکل ۷-۴ پایدارماندن 6 SS-MLTD با افزایش اندازه گام زمانی. ۸۰
- شکل ۸-۴ نحوه تاثیر گذاری تغییر تراکم مش بندی روی سرعت فاز [۲۰]. ۸۳
- شکل ۹-۴ نمایش گره های پراکنده روی محفظه تشدید. ۸۵

شکل ۱۰-۴ تغییرات سرعت فاز نسبت به راستای انتشار..... ۸۶

شکل ۱۱-۴ تغییرات سرعت فاز برای تکنیک ADI در روش بدون مش و تفاضل محدود..... ۸۶

فهرست جداول

- جدول ۱-۲ چند روش متداول بدون مش به ترتیب زمان پیدایش [۴]..... ۱۸
- جدول ۲-۲ پرکاربردترین توابع پایه شعاعی. ۳۵
- جدول ۱-۴ ضرایب به کار رفته در روش Split-Step به ازای زیرگام های زمانی مختلف [۴۰]..... ۶۳
- جدول ۲-۴ مقایسه زمان مورد نیاز برای شبیه سازی. ۷۷
- جدول ۳-۴ تغییرات فرکانس قطع با افزایش گام زمانی. ۷۹
- جدول ۴-۴ تغییرات فرکانس قطع به ازای افزایش گام زمانی در دو روش گام زمانی شکسته شده. ... ۸۱
- جدول ۵-۴ مقایسه زمان شبیه سازی در روش های مختلف. ۸۲

فصل اول

مقدمه

با پیشرفت علوم مهندسی نیازی روزافزون برای تحلیل مسائل پیچیده مهندسی وجود دارد. روش‌های عددی بدون‌مش در حال حاضر جدیدترین و کارآمدترین روش عددی شناخته شده هستند. پیش از آن روش المان محدود^۱ به عنوان قدرتمندترین ابزار در تحلیل مسائل علوم مهندسی مطرح بود. تولید شبکه‌ای متشکل از المان‌هایی که می‌بایست به گونه‌ای خاص با یکدیگر در ارتباط باشند تا اجزای تشکیل دهنده دامنه مساله هیچ همپوشانی^۲ نداشته و از سوی دیگر هیچ فضای خالی^۳ بین آن‌ها باقی نماند، فرآیندی بسیار زمان‌بر بود. از این گذشته چنانچه دامنه مساله الکترومغناطیسی دارای ناپوستگی و یا مرزهای متغیر با زمان می‌بود، ایجاد شبکه‌ی وقتی از دقت پاسخ کم کرده و زمان محاسبات را بسیار بالا می‌برد. حال آن‌که در روش‌های بدون‌مش هیچ‌گونه ارتباط از پیش تعریف شده‌ای بین نقاط پراکنده شده روی دامنه و مرز برقرار نیست و بنابراین به هنگام پیچیده بودن مرز، محیط و یا معادلات مدل کننده مسائل الکترومغناطیسی این روش‌ها انعطاف پذیری بسیار بالایی دارند. در کنار این محاسن، در روش‌های بدون‌مش با تغییر تراکم نقاط پراکنده شده روی دامنه می‌توان به میزان دقت مورد نیاز دست یافت و از انجام محاسبات اضافی رهایی یافت. این ویژگی‌های منحصر به-فرد سبب شده با وجود نوظهور بودن، این دانش در سال‌های اخیر پیشرفت قابل توجهی داشته و در مهندسی عمران، مکانیک و برق بسیار مورد استقبال واقع شود. هرچند امروزه کامپیوترهایی با سرعت بالا در دسترس هستند، اما مساله اساسی یافتن الگوریتم عددی مناسب به منظور یافتن پاسخی تقریبی با دقت قابل قبول برای چنین مسائلی است. در مهندسی برق و خصوصاً مبحث الکترومغناطیس به طور گسترده‌ای با معادلات ماکسول که به صورت کرل و دیورژانس میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بیان می‌شوند، سر و کار داریم. معادلات ماکسول به دو فرم انتگرالی و دیفرانسیلی قابل نمایش هستند، که البته فرم انتگرالی حالت کلی‌تر معادلات را بیان می‌کند [۱]. به منظور بررسی چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی نیاز به داشتن پاسخ معادلات ماکسول است.

به منظور یافتن جواب معادلات ماکسول ابتدا از روش‌های تحلیلی^۴ کمک می‌گیریم. چرا که به کمک این گونه روش‌ها به پاسخی دقیق برای مساله دست می‌یابیم و علاوه بر این، معمولاً روش‌های تحلیلی

^۱Finite-Element Method (FEM)

^۲Overlap

^۳gap

^۴Analytical Solution

در زمان کوتاهتری به جواب می‌رسند و این پاسخ به طور پیوسته در همه نقاط دامنه برقرار خواهد بود. در عمل مسائل بسیار محدودی و در شرایط خاص، دارای پاسخ تحلیلی^۱ هستند، چرا که در طبیعت و عالم واقع شرایط و نیز مرز یک مساله می‌تواند بسیار پیچیده باشد [۲]. در مقابل روش‌های تحلیلی که تنها در مورد مسائلی به فرم متعارف^۲ کارآمد است، در راستای یافتن پاسخ برای مسائلی که پاسخ تحلیلی برای آن‌ها میسر نیست، ناگزیر از استفاده از روش‌های عددی^۳ هستیم. در حقیقت روش‌های عددی قابل اعمال به تمامی مسائل هستند. اما معضل اصلی در مورد روش‌های اخیر محدودیت تقریب مدل‌سازی و گسسته‌سازی است. از این گذشته چنین نیست که معیار دقت، پایداری و همگرایی در این روش‌ها همواره معین باشد [۳].

۱-۱- روند کلی حل یک مساله با روش‌های عددی

تمامی روش‌های عددی در راستای ارائه پاسخ فرآیند مشابهی را طی می‌کنند. این فرآیند چند مرحله اساسی و بنیادین دارد که به اختصار در شکل (۱-۱) نمایش داده شده‌است. در ابتدا پدیده فیزیکی مورد نظر بررسی شده و با لحاظ کردن ساده‌سازی و فرضیات ممکن، مدل ریاضی پدیده ارائه خواهد شد. این مدل ریاضی توسط معادلات حاکم بر سیستم و نیز شرایط مرزی^۴ و شرایط اولیه^۵ مناسب بیان می‌شود. معادلات حاکم بر سیستم می‌توانند به صورت یک سری معادلات دیفرانسیلی معمولی یا جزئی، معادلات انتگرالی و یا هر نوع معادله‌ای که قوانین فیزیکی اجازه می‌دهند، وجود داشته باشند. وجود شرایط مرزی و یا اولیه لازمی یافتن پاسخ یکتا هستند. برای حل عددی مساله می‌بایست هندسه (دامنه) مساله به قسمت‌های گسسته‌ای تقسیم شود، یعنی دامنه‌ی پیوسته با تعداد محدودی اجزای تشکیل دهنده نمایش داده شود. البته چگونگی این گسسته‌سازی بسته به روش عددی به کار گرفته شده، متفاوت است [۴]. در حقیقت گسسته‌سازی ابزاری برای تبدیل عملگرهای انتگرالی یا دیفرانسیلی موجود در معادلات حاکم بر سیستم، از حالت پیوسته به حالت گسسته است. پس از گسسته‌سازی دامنه و عملگرها می‌توان معادلات حاکم بر سیستم را به یک سری معادلات جبری تبدیل کرد.

¹Closed Form

²Canonical

³Numerical Methods

⁴Boundary Conditions

⁵Initial Conditions

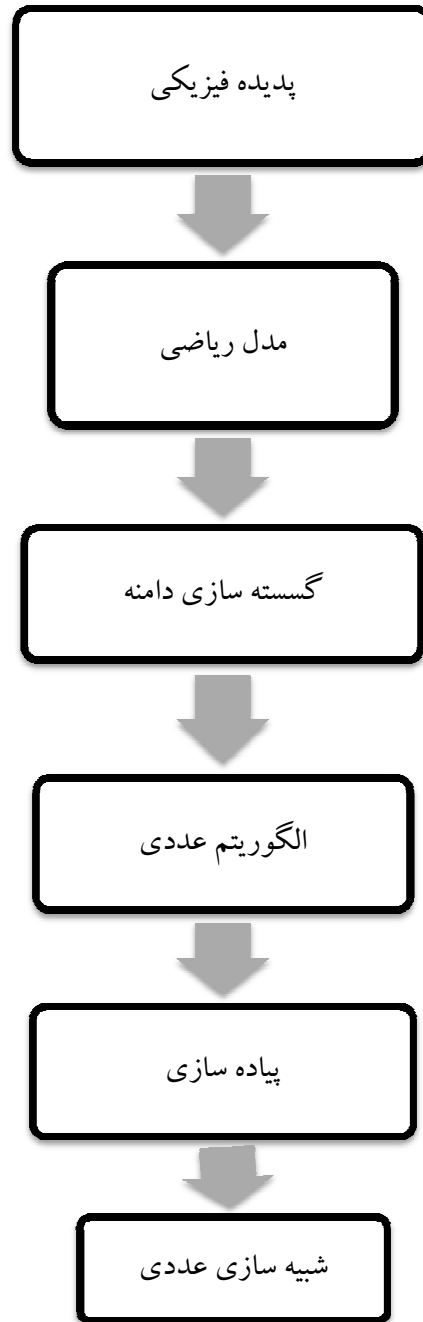
۱-۲- تاریخچه روش‌های عددی

در مطالعات و بررسی‌های علمی، شبیه‌سازی عددی روش جایگزین بسیار مناسبی برای آزمایش‌های پرهزینه، زمان‌بر و گاهی خطرناک داخل آزمایشگاه است. مبحثی از الکترومغناطیس که در آن روش‌های محاسباتی حل مسائل مورد بررسی قرار می‌گیرند، الکترومغناطیس محاسباتی^۱ نامیده می‌شود. تا سال ۱۹۴۰ بیشتر مسائل الکترومغناطیسی با به کارگیری روش‌های کلاسیک نظیر جدا سازی متغیرها^۲ حل می‌شدند. با پیدایش کامپیوترهای پرسرعت در اواسط دهه ۱۹۶۰ مبحث روش‌های عددی مطرح شد [۳]. از جمله قدیمی‌ترین و پرکاربردترین روش‌های عددی، روش تفاضل محدود و روش المان محدود بوده که هر یک محاسن و معایب خاص خود را دارند [۲]. در هر دو روش مذکور فضای دامنه‌ی مساله موردنظر به ترتیب به نقاط و المان‌های مختلف تفکیک می‌شود و پاسخ بدست آمده، منحصراً برای آن نقاط و المان‌ها و نه تمام فضای دامنه صادق خواهد بود. روش‌های فوق که بر پایه مش‌بندی^۳ فضای دامنه استوار هستند، به دلایلی نظیر پرهزینه بودن، چه به لحاظ زمان‌بر بودن محاسبات و چه حجم حافظه‌ی مورد نیاز و نیز عدم توانایی در مدل کردن مرزهای پیچیده، برای حل مسائل مورد نیاز در علوم امروز ناکارآمد هستند.

^۱Computational Electromagnetics

^۲Separation of Variables

^۳Grid-Based



شکل ۱-۱ روند کلی عملکرد روش های عددی.

در راستای برطرف کردن نیاز به روشی جایگزین، در سال‌های اخیر روش‌های بدون‌مش پیشنهاد شده‌اند. چنان‌که به تفصیل بیان خواهد شد، روش‌های بدون‌مش در حالت ایده‌آل بی‌نیاز از در نظر داشتن شبکه‌ای از پیش تعریف شده از نقاط مدل‌کننده دامنه و مرزهای مساله هستند و لذا کارایی و انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به روش‌های پیشین دارند.

به منظور یافتن درک بهتری از روش‌های بدون‌مش مناسب است آشنایی اجمالی با روش‌های عددی که بر پایه‌ی مش‌بندی قرار دارند حاصل شود. بنابراین در ابتدای بحث توضیح مختصری در مورد روش‌های عددی بر پایه‌ی مش‌بندی ارائه شده و سپس مبحث اصلی که روش‌های عددی بدون‌مش هستند، مطرح و بررسی خواهد شد.

۱-۳- معرفی روش تفاضل محدود

این روش در سال ۱۹۶۶ از طرف آقای Yee پیشنهاد شد [۵]. این روش در حال حاضر ساده‌ترین روش موجود از لحاظ درک و پیاده‌سازی است، و به این دلیل یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی می‌باشد. دلیل این نام‌گذاری این است که این تکنیک به منظور تقریب زدن، مشتقات موجود در معادلات ماکسول در هر دو حوزه مکان و زمان را با تفاضل محدود جایگزین می‌کند.

۱-۳-۱- چگونگی فرموله کردن روش تفاضل محدود

روش تفاضل محدود بر پایه بسط سری تیلور نوشته می‌شود. برای داشتن درک مناسبی از این روش فرض کنید تابعی پیرامون نقطه x_0 بسط داده می‌شود. به کمک بسط سری تیلور می‌توان نوشت:

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) + \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (1-1)$$

(۲-۱)

$$f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = f(x_0) - \frac{\delta}{2}f'(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots$$

اختلاف دو رابطه فوق نشان می‌دهد:

$$f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right) = \delta f'(x_0) + \frac{2}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (3-1)$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر δ خواهیم داشت:

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} = f'(x_0) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 f'''(x_0) + \dots \quad (4-1)$$

ملاحظه می‌شود که جمله سمت راست بیانگر مشتق تابع در نقطه x_0 به علاوه جمله‌ای وابسته به δ^2 و بی‌نهایت جمله دیگر است که در این جا نشان داده نشده‌اند. پس می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} + O(\delta^2) \quad (5-1)$$

ترم $O(\delta^2)$ نشان‌گر این است که در بین جملاتی که در این جا نشان داده نشده‌اند، کمترین توان δ به صورت δ^2 بوده است. برای داشتن تقریب قابل قبول δ مقدار کوچکی انتخاب می‌شود به این ترتیب می‌توان از جملاتی که با $O(\delta^2)$ نشان داده شده‌اند صرف نظر کرد.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right)}{\delta} \quad (6-1)$$

رابطه حاصل را تقریب تفاضل مرکزی^۱ می‌نامند که دارای دقتی از درجه ۲ می‌باشد، به این معنا که اگر δ با ضریب ۱۰ کاهش یابد میزان خطای تقریب با ضریب ۱۰۰ کاهش می‌یابد. برای داشتن دقت بالاتر باید جملات بیشتری از بسط سری تیلور را در نظر گرفت اما بنابر دلایلی دقت از مرتبه ۲ ترجیح داده می‌شود.

¹ Central-Difference Approximation