بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

روش کوادراتور کسری برای معادله انتگرال ولترا

نگارش

آسیه محمدی

استاد راهنما: دکتر رضا ملاپور اصل

استاد مشاور: دکتر حمید صفدری

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

۱۳۹۳ خرداد

بسمه تعالی

اصالت اثر تعهدنامه

اینجانب آسیه محمدی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف(در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

نام و نام خانوادگی: آسیه محمدی
امضاء

تهران – لویزان – کدپستی١٦٧٨٨– صندوق پستی١٦٣ – ١٦٧٨٥ تلفن ٩– ٢٩٧٠٠٦٠ (داخلی ٢٣٤٧) نمابر ٢٢٩٧٠٠١١
پست الکترونیکی
sru@sru.ac.ir

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

روش کوادراتور کسری برای معادله انتگرال ولترا

نگارش

آسیه محمدی

استاد راهنما: دکتر رضا ملاپور اصل

استاد مشاور: دکتر حمید صفدری

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

۱۳۹۳ خرداد

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

"هر کس از بندگان خداوند تشکر نکند از خداوند تشکر نکرده است"

خداوند مهربانم را سپاس می‌گویم که به من نعمت هستی بخشید و مرا به لطف خود در راه تحصیل علم و دانش رهنمون ساخت.

تشکر واژه‌ی کوچکی است در برابر مهربانی‌های پدر و مادرم که بی‌دریغ به من بخشیدند. با احترام این واژه را به مادرم که بهترین آموزگار زندگی من و پدرم که استوارترین تکیه‌گاه من هستند، هدیه می‌کنم.

برگ سبزی ست تحفه درویش   چه کند بینوا ندارد بیش

استاد شهید، مطهری چه نیکو سخن گفته است "من ستایشگر معلمی هستم که اندیشیدن را به من بیاموزد نه اندیشه‌ها را." بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر ملاپور اصل که برای من مصداق بارز اندیشیدن هستند نه اندیشه‌ها، تشکر کنم و بگویم: شاگردی در محضر شما بهترین تجربه‌ی زندگیم بوده است.

دلسوزی‌ها و رهنمودهای بی‌دریغ استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر حمید صفدری برای من فراموش نشدنی‌ست و درسهایی که از ایشان فرا گرفته‌ام بی شک شایسته ستایش است.

پیمودن راه پر تلاطم دانش‌اندوزی برای من میسر نبود مگر به آموختن از اساتیدی که دانش خود را بی‌منت به من بخشیدند، از همه‌ی ایشان بینهایت سپاسگزارم.

باز هم خدای خود را می‌ستایم که در این راه دوستانی به من هدیه کرد که شادی من شادی آنها و غم من غم آنهاست، دست یکایک آنها را می‌بوسم و دعا می‌کنم: خدایا به فرشتگانت بسپار که در لحظه لحظه‌ی نیایش خویش دوستان مرا از یاد نبرند.

چکیده

در این پایان نامه با درونیابی چند جمله ای ها و شکل باری سنتریک آن ها شروع می کنیم و ویژگی های آن ها را بیان می کنیم . آن به خوبی شناخته شده است که درونیابی گویا تقریب های بهتری نسبت به درونیابی چند جمله ای ها به ویژه برای دنباله ی بزرگی از نقاط می دهند اما چون شناسایی مکان قطب ها مشکل می باشد لذا یک خانواده از درونیابی گویا را که هیچ قطبی ندارند و مرتبه ی تقریب بالایی دارند را بررسی می کنیم .

این درونیابی ها به خطی بودن داده ها وابسته هستند و ساختاری از بروت را به عنوان یک حالت ویژه شامل می شوند . در ادامه ثابت لبگ این درونیابی ها و روش کوادراتور مستقیم و غیر مستقیم را بر پایه ی درونیابی گویای خطی بررسی می کنیم و همچنین دو روش کوادراتور مستقیم را بر پایه ی درونیابی گویای خطی برای حل معادلات انتگرال ولترا از نوع دوم بررسی می کنیم .

واژه های کلیدی: معادله های انتگرال ولترا ، روش کوادراتور مستقیم ، درونیابی گویای باری سنتریک خطی ، کوادراتور گویای خطی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

درونیابی باری سنتریک

۱.۱ مقدمه

در سال **۱۹۴۵** تیلور [1] فرمول باری سنتریک [2] را برای ارزیابی چند جمله ای های درونیاب پیدا کرد و در سال **۱۹۸۴** ورنر [3] اولین نتیجه را از این حقیقت که این فرمول معمولاً یک درونیاب کسری است ، ارائه داد. در سال **۱۹۸۷** بروت [4] در مقاله خود به معرفی نوع دیگری از این درونیاب پرداخت که فاقد مجانب و دارای مرتبه تقریب نسبتاً خوبی بود .

در سال **۲۰۰۷** فلوتر [5] و هورمن [6] به خانواده ی جدیدی از درونیاب های باری سنتریک دست یافتند که تمامی خانواده های درونیاب کسری پیشین را در خود جای می داد و سر آغاز پژوهش های نوینی در این راستا شد .

۲.۱ درونیابی چند جمله ای

فرض می کنیم $n+۱$ نقطه مجزای به نام گره در بازه $[a,b]$به صورت $a = x_۰ < x_۱ < \dots < x_n = b$ با مقادیر مربوطه $f_۰, \dots, f_n$ داشته باشیم . هدف پیدا کردن تابع g از یک زیر فضای متناهی البعد($\|\ .\ \|$,$C[a,b]$)،فضای $Banach$ تابع های پیوسته در بازه $[a,b]$ با نرم ماکسیمم یعنی$\|.\| = \max_{a\le x\le b}|.|$ می باشد به طوری که g ، داده ها را درگره ها درونیابی می کند یعنی g دارای خصوصیت درونیابی $g(x_i) = f_i$برای $i = ۰, \dots, n$ می باشد . دو گروه درونیابی وجود دارد .

۱-درونیابی خطی ، که g به صورت ترکیب خطی از تابع های b_iکه مستقل از f_i است نوشته می شود یعنی

$$g(x) = \sum_{i=۰}^{n} b_i(x) f_i \qquad (۱.۱)$$

۲-دومین نوع درونیابی شامل اسپلاین ها ، تقریب های پَدِهِ ، درونیابی گویای کلاسیک و...می شود . بیشتر مثال های کلاسیک از درونیابی خطی بین مجموعه داده شده از $n+۱$ مقادیر،درونیابی چند

[1] W.Taylor
[2] Barycentric
[3] W.Warner
[4] Berrut
[5] Floater
[6] K.Hormann

جمله ای منحصر به فرد p_nاز درجه کوچکتر یا مساوی n می باشد که داده ها را درونیابی می کند و می تواند به شکل لاگرانژنوشته شود

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f_i$$

با

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{۱.۲}$$

که $l_i(x)$تابع های بنیادی لاگرانژ با خصوصیت زیر است

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{۱.۳}$$

p_n نوشته شده در این شکل نیاز به $o(n^2)$ عملیات برای هر نقطه x دارد . شکل باری سنتریک از شکل لاگرانژبه دست می آید . ابتدا چند جمله ای گره ای

$$L(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{۱.۴}$$

و وزن های باری سنتریک

$$\lambda_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)} \tag{۱.۵}$$

را تعریف می کنیم . یک محاسبه ساده نشان می دهد [۱]

$$\lambda_i = \frac{1}{L'(x_i)}$$

تابع بنیادی ۱.۲ به صورت زیر نوشته می شود

$$l_i(x) = L(x) \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

$$p_n(x) = L(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{x - x_i} f_i \tag{۱.۶}$$

که۱.۶ رافرمول لاگرانژ اصلاح شده یا فرمول درونیابی باری سنتریک نوع اول می نامند . معادله ۱.۶ به وسیله ژاکوبی در [۲]در سال **۱۸۲۵**بیان شده است که تجزیه کسر جزئی $\frac{p_n}{L}$ را محاسبه و $\frac{p_n}{L}$را به عنوان جمع در سمت راست ۱.۶ بیان می کند . اگر وزن های باری سنتریک از فرمول ۱.۵محاسبه

شوند به $O(n^{۲})$ عملیات نیاز دارند و چند جمله ای باری سنتریک نوع اول تنها در $O(n)$ عملیات برای هر x محاسبه می شود .

وین ریچ [۶]،[۷] تعدادی از عملیات مورد نیاز برای بررسی p_n نوشته شده در شکل لاگرانژ ، شکل باری سنتریک و الگوریتم های آیت کِنز [۸] و نویلِس [۹] را مقایسه کرد [۱]. او نتیجه گرفت که ، اگر تعدادی از گره ها بزرگتر یا مساوی ۵ باشند چند جمله ای به شکل باری سنتریک باید ترجیح داده شود .

هایم [۱۰]،[۷] نشان داد که ۶.۱بدون شرط پایدار است . فرمول باری سنتریک نوع دوم نیز وجود داردکه اغلب فرمول باری سنتریک نامیده می شود و همچنین می تواند در بازه $[a, b]$ به پایداری اولین شکل بررسی شود . فرمول باری سنتریک دوم به این صورت است که p_nیک چند جمله ای منحصر به فرد از درجه کمتر یا مساوی n می باشد که مقادیر (f_i) رادرونیابی می کند . اگر همه ی مقادیر برابر ۱ باشد آن گاه چون چند جمله ای منحصر به فرد است داریم

$$۱ = \sum_{i=۰}^{n} l_i(x) = L(x) \sum_{i=۰}^{n} \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

این معادله به وسیله ژاکوبی در[۲] به عنوان تجزیه کسر جزئی $\frac{۱}{L}$بیان شد حال p_n بیان شده در ۶.۱ را بر ۱ تقسیم می کنیم

$$p_n(x) = \sum_{i=۰}^{n} \frac{\lambda_i}{x - x_i} f_i \bigg/ \sum_{i=۰}^{n} \frac{\lambda_i}{x - x_i} \qquad (۷.۱)$$

این فرمول شکل باری سنتریک درونیابی چند جمله ای ها است و در بررسی درونیابی چند جمله ای ها ، پایدار می باشد [۳، ۴]

مزیتی که شکل دوم باری سنتریک دارد این است که وزن ها در صورت و مخرج کسر ظاهر می شوند بنابراین به طور معمول ضریب ها حذف می شوند که منجر به عبارت ساده تری برای λ_i می شود . برای گره های متساوی الفاصله وزن ها

$$\lambda_i = (-۱)^i \binom{n}{i}$$

و برای نقاط چیبشف نوع دوم

$$\lambda_i = (-۱)^i \delta_i \qquad \delta_i = \begin{cases} \frac{۱}{۲} & i = ۰, \\ ۱ & i \neq ۰ \end{cases}$$

می باشد . [۵]

[۷] Winrich
[۸] Aitkens
[۹] Nevilles
[۱۰] Higham

۳.۱ درونیابی گویای باری سنتریک خطی

فرمول دوم باری سنتریک یک تبدیل مستقیم از درونیابی چند جمله ای به درونیابی گویای باری سنتریک را نتیجه می دهد . اگر وزن های λ_i به وزن های مخالف صفر w_i تغییر کنند آن گاه $L(x)\sum_{i=۰}^{n}\frac{w_i}{x-x_i}$ ضرورتاً برابر ۱ نیست . عبارت اول لم زیر در حال حاضر توسط ورنر [۱۱] در[۸] و عبارت دوم در [۹]اثبات شده است .

لم ۱.۳.۱ ۱) فرض کنید $\{(x_i, w_i, f_i)\}_{i=۰,...,n}$ یک مجموعه از $n+۱$ سه تائی مختلط یا حقیقی با $x_j \neq x_k$ برای $j \neq k$ باشد.آن گاه اگر تمام $w_i \neq ۰$ ، تابع گویای

$$r_n(x)=\sum_{i=۰}^{n}\frac{w_i}{x-x_i}f_i\bigg/\sum_{i=۰}^{n}\frac{w_i}{x-x_i} \tag{۸.۱}$$

f_i رادر x_i درونیابی می کند: $\lim_{x\longrightarrow x_i} r_n(x)=f_i$
۲) همچنین هر درونیابی گویا که صورت و مخرج کسرآن یک چند جمله ای از درجه نا بیشتر از n باشد می تواند در شکل ۸.۱ برای وزن های w_i نوشته شوند.

عبارت اول از این لم یک مزیت اضافی از درونیابی باری سنتریک را نشان می دهد(خصوصیت $r_n(x_i)=f_i$ همیشه تضمین شده است حتی اگر وزن های w_i با خطا محاسبه شوند به شرطی که w_i مخالف صفر باشند) .
درونیابی گویای r_n خطی است اگر وزن های باری سنتریک به مقادیر $f_۰, ..., f_n$ وابسته نباشند
.

بروت [۱۲][۱۰]اثبات کرد که درونیابی باری سنتریک۸.۱با وزن ها ی $(-۱)^i$برای هر توزیع از گره ها قطب ندارد علاوه بر این او همگرایی خطی زمانی که $h\longrightarrow ۰$ با سرعت $O(h)$ را حدس زد یعنی $\| f-r_n \|\leq kh$ با

$$h=\max_{۰\leq i\leq n-۱}(x_{i-۱}-x_i) \tag{۹.۱}$$

و k یک ثابت مستقل از n می باشد . برای گره های متساوی الفاصله او به طور عددی انتخاب یکسانی از وزن ها ، با اولین و آخرین وزن تقسیم شده بر ۲ را بررسی کرد و همگرایی سریع تر را نسبت به انتخاب قبلی از وزن ها مشاهده کرد همگرایی $O(h^۲)$ را [۱۱]حدس زد .

۴.۱ درونیابی فلوتر –هورمن

در ۲۰۰۷ فلوتر و هورمن [۱۳][۱۲] یک خانواده از درونیابی گویای باری سنتریک خطی را بیان کردند و فرمول صریحی را برای وزن های باری سنتریک اثبات کردند. ساختار شامل وزن هایی از بروت می باشد که در انتهای بخش قبلی بیان شده است. برای ایجاد فرمول ابتدا یک پارامتر صحیح $d\in ۰,۱,...,n$ را انتخاب می کنیم و به وسیله p_i برای $i=۰,...,n-d$ مشخص می کنیم

[۱۱] Werner
[۱۲] Berrut
[۱۳] Floater Horman

. p_i یک چند جمله ای منحصر به فرد از درجه کمتر یا مساوی با d است که زیر مجموعه ای از $d+۱$مقادیر $f_i, f_{i+۱}, ..., f_{i+d}$ را درونیابی می کند. تابع گویای

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i=۰}^{n-d} \lambda_i(x)\ p_i(x)}{\sum_{i=۰}^{n-d} \lambda_i(x)} \tag{۱۰.۱}$$

با

$$\lambda_i(x) = \frac{(-۱)^i}{(x-x_i)...(x-x_{i+d})} \tag{۱۱.۱}$$

داده ها را درونیابی می کند و می تواند به عنوان ترکیبی از درونیابی چند جمله ای $p_۰, ..., p_{n-d}$ با ترکیب تابع های $\lambda_۰(x), ..., \lambda_{n-d}(x)$بیان شود . انتخاب$d = n$درونیابی چند جمله ای را می دهد . درونیابی گویای ۱۰.۱درونیابی فلوتر هورمن نامیده می شود که یک زیر گروه از درونیابی باری سنتریک خطی است . فرض می کنیم بر n, d ، $d \leq n$ همیشه اعداد صحیح نا منفی هستند .
همانطور که در[۱۲]بیان شده است خانواده ای از درونیابی های ۱۰.۱ به وسیله فلوتر وهورمن زمانی که بر روی درونیابی منحنی های دو وجهی تو در تو کار می کردند پیدا شد .

۵.۱ ویژگی ها

به خوبی شناخته شده است که درونیابی گویا تقریب بهتری نسبت به درونیابی چند جمله ای به ویژه برای دنباله های بزرگ از نقطه ها می دهد اما شناسایی مکان قطب ها مشکل است در این بخش ویژگی خانواده ای از درونیابی گویای باری سنتریک که هیچ قطبی ندارد و مرتبه ی دقت بالا دارد را بررسی می کنیم .
یک راه ساده به تقریب تابع $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ انتخاب یک دنباله از نقطه های $a = x_۰, < x_۱ < ... < x_n = b$ و مجهز کردن f به درونیابی چند جمله ای منحصر به فرد p_n از درجه حداکثر n در این نقطه ها یعنی مجموعه ی $p_n(x_i) = f(x_i)$ می باشد با این حال p_n شناخته شده ممکن است یک تقریب خوبی به fنباشد و برای n بزرگ می تواند نوسانات زیادی را نشان دهد .
برای مثال تابع رانگ[۱۴]که در آن $f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$ و $x_i = -۵ + ۱۰\frac{i}{n}$ در بازه $[-۵, ۵]$، به دنباله ای از چند جمله ای ها ی p_n زمانی که $n \longrightarrow \infty$ واگرا است .
اگر نقطه های درونیابی x_i به ما داده باشند نیاز به بررسی یک نوع از درونیابی ها می باشد که در حال حاضر یک جایگزین بسیار معروف استفاده از اسپلاین ها است که یک ابزار استاندارد برای هر نوع از درونیابی ها و تقریب الگوریتم ها می باشد. استفاده از درونیابی گویا می تواند منجر به یک تقریب بهتری نسبت به چند جمله ای های معمولی شود .
در درونیابی گویای کلاسیک ابتدا M و Nرا طوری انتخاب می کنیم که $M + N = n$ و $f(x_i)$ یک تابع گویای به شکل $\frac{p_M}{q_N}$ ، که p_M و q_N چند جمله ای از درجه حداکثر M و N به ترتیب می باشند .
مشکل اصلی این است که کنترلی در وقوع قطب ها در بازه ای از درونیابی وجود ندارد . بروت[۱۵]ومیتلمن[۱۶]حدس زدند که استفاده از تابع های گویا از درجه بالا ممکن است مانع قطب ها

---

[۱۴] Runges
[۱۵] Berrut
[۱۶] Mittelman

شود . آن ها الگوریتمی با تابع های گویای مناسب که درجه صورت ومخرج کسر هر دو به بزرگی n می باشد را در نظرگرفتند این یک گروه مناسب از درونیابی های گویا است [۱۱]این چنین درونیابی هایی می توانند در شکل باری سنتریک $r(x)=\dfrac{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{w_i}{x-x_i}\ f(x_i)}{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{w_i}{x-x_i}}$ برای مقادیر w_i نوشته شود. حال برای مشخص کردن r کافی است که وزن های $w_0,\ldots,w_n$ را مشخص کنیم . هدف جستجوی وزن هایی از درونیابی r است که هیچ قطبی ندارد و هم چنین ویژگی های تقریب خوبی دارد . نوع های متفاوتی از این نوع درونیابی ها توسط بروت[17]،میتلمن[18] و بالتن اسپرگر [19] بررسی شد [۱۳]

درونیابی چند جمله ای p_n با گرفتن $\prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$ $w_i=$ می تواند در شکل باری سنتریک بیان شود این وزن ها از قطب ها جلوگیری می کنند اما برای درونیابی نقاط در حالت کلی یک تقریب خوبی را نمی دهند گزینه های دیگری توسط بروت [۱٤]حدس زده شد ، قرار می دهیم $w_i=(-1)^i$ برای $i=0,\ldots,n$ داریم

$$r(x)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{(-1)^i\ f(x_i)}{x-x_i}}{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{(-1)^i}{x-x_i}}$$

که یک تابع گویا می باشد بروت نشان داد که این درونیابی هیچ قطبی در $\mathbb{R}$ ندارد او همچنین آن را برای درونیابی تابع رانگ استفاده کرد و نشان داد که مرتبه تقریب برای هر توزیع از نقطه ها $\dfrac{1}{n}$ است . همه ی نتایج عددی سرعت تقریب نسبتاً پایین $\dfrac{1}{n}$را تایید کردند و این باعث شد که یک درونیابی گویا با مرتبه تقریب بالا را جستجو کنیم.

از آنجایی که درجه صورت و مخرج کسر زیر

$$r(x)=\frac{\sum_{i=0}^{n-d}\mu_i(x)\ p_i(x)}{\sum_{i=0}^{n-d}\mu_i(x)}$$

با $\mu_i(x)=(-1)^{n-d}\ (x-x_0)\ldots(x-x_n)\ \lambda_i(x)$ حداکثر nاست می تواند در شکل باری سنتریک ۸.۱ قرار داده شود [۱۱] برای این نتیجه گیری ابتدا چند جمله ای p_iدر ۱۰.۱ را در شکل لاگرانژ

$$p_i(x)=\sum_{k=i}^{i+d}\prod_{j=i,j\neq k}^{i+d}\frac{x-x_i}{x_k-x_j}\ f(x_k)$$

[17] Berrut
[18] Mittelman
[19] Baltensperger

قرار داده شود و p_i را درصورت کسر ۱۰.۱ جایگزین می کنیم

$$\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x)\ p_i(x) = \sum_{i=0}^{n-d} (-1)^i \sum_{k=i}^{i+d} \frac{1}{x-x_k} \prod_{j=i,j\neq i}^{i+d} \frac{1}{x_k-x_j}\ f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k} f(x_k)$$

که

$$w_k = \sum_{i\in j_k} (-1)^i \prod_{i=j,i\neq k}^{i+d} \frac{1}{x_k-x_j} \tag{1.12}$$

با

$$j_k := \{i \in I : k-d \leq i \leq k\} \qquad I := \{0, ..., n-d\} \tag{1.13}$$

به طور مشابه برای مخرج کسر نیز داریم

$$1 = \sum_{k=i}^{i+d} \prod_{j=i,j\neq k}^{i+d} \frac{x-x_i}{x_k-x_j}$$

که منجر می شود به

$$\sum_{i=0}^{n-d} \lambda_i(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x-x_k}$$

و این نشان می دهد که rشکل باری سنتریک ۱۰.۱ با وزن های ۱۲.۱را دارد . چون به وسیله قضیه ای که در بخش های بعد اثبات خواهیم کرد که r هیچ قطبی در$\mathbb{R}$ ندارد نتایج دیگر توسط ورنر [20] و شنیدر [21] نشان می دهد که وزن های w_k باید در علامت نوسان داشته باشند [۱۵] و این می تواند به صورت زیر بیان شود

$$w_k = (-1)^{k-d} \sum_{i\in j_k} \prod_{j=i,j\neq k}^{i+d} \frac{1}{|x_k-x_j|} \tag{1.14}$$

حال w_kرا برای d های مختلف بررسی می کنیم . حالت $d = 1$ می دهد

$$w_k = (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{x_k-x_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1}-x_k}\right) \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

و

$$w_0 = \frac{-1}{x_1-x_0} \qquad w_n = \frac{(-1)^{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$$

برای d کلی داریم

$$w_k = \frac{(-1)^{k-d}}{h^d} \sum_{i\in j_k} \frac{1}{(k-i)!(i+d-k)!}$$

[20] Werner
[21] Schneider

چون مقیاس ثابتی از این وزن ها درونیابی r را تغییر نمی دهند ما می توانیم آنها را در $h^d d!$ ضرب کنیم داریم

$$w_k = (-۱)^{k-d} \sum_{i \in j_k} \binom{d}{k-i}$$

با نوشتن $\delta_k = (-۱)^{k-d} w_k = |w_k|$ مجموعه مقادیر $\delta_۰, ..., \delta_n$ به صورت زیر می باشند

$$۱, ۱, ..., ۱ \quad d = ۰$$
$$۱, ۲, ۲, ..., ۲, ۲, ۱ \quad d = ۱$$
$$۱, ۳, ۴, ۴, ..., ۴, ۴, ۳, ۱ \quad d = ۲$$
$$۱, ۴, ۷, ۸, ۸, ..., ۸, ۸, ۷, ۴, ۱ \quad d = ۳$$

مقادیر بالا برای وزن ها می تواند مستقیماً برای درونیابی چند جمله ای استفاده شود بنابر این در این حالت نیاز به محاسبه ی وزن ها نمی باشد .

در حالت $d = ۰$ همه ی وزن ها در قدر مطلق برای هر توزیع از گره ها یکسانند و این حالت دقیقاً همان حالتی است که توسط بروت [۱۰] در سال **۱۹۸۸** بیان شده بود . اکنون دو نتیجه برگرفته از[۱۲] را بیان می کنیم .

قضیه ۱.۵.۱. درونیابی گویای r_n در ۱.۱۰ قطب حقیقی ندارد .

اثبات: با ضرب صورت و مخرج کسر ۱.۱۰در

$$(-۱)^{n-d}(x - x_۰)...(x - x_n)$$

و ساده کردن ضریب های مشترک داریم

$$r(x) = \frac{\sum_{i=۰}^{n-d} \mu_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=۰}^{n-d} \mu_i(x)}$$

$$\mu_i(x) = (-۱)^{n-d}(x - x_۰)...(x - x_n)\lambda_i(x)$$

یا

$$\mu_i(x) = \prod_{j=۰}^{i-۱}(x - x_j) \prod_{k=i+d+۱}^{n} (x_k - x) \qquad (۱.۱۵)$$

که رابطه بالا نشان می دهد که درجه صورت حداکثر n و درجه مخرج $n - d$ می باشد . قرار می دهیم $s(x) = \sum_{i=۰}^{n} \mu_i(x)$. حال نشان می دهیم که sبر $x \in \mathbb{R}$ مثبت است . تعریف می کنیم

$$I = \{۰, ..., n - d\}$$

در ابتدا حالت $x = x_\alpha$برای $۰ \leq \alpha \leq n$ را در نظر می گیریم

$$j_\alpha = \{i \in I : \alpha - d \leq i \leq \alpha\}$$

حال بنابر ۱۵.۱ داریم که $\mu_i(x_\alpha) > 0$ برای همه ی $i \in j_\alpha$ و $\mu_i(x_\alpha) = 0$ برا ی $i \in I - j_\alpha$ از آنجایی که j_α مخالف تهی است

$$s(x_\alpha) = \sum_{i \in I} \mu_i(x_\alpha) = \sum_{i \in j_\alpha} \mu_i(x_\alpha) > 0$$

حال فرض می کنیم که $x \in (x_\alpha, x_{\alpha+1})$ برای α، $0 \leq \alpha \leq n-1$ سپس فرض می کنیم

$$I_1 := \{i \in I : i \leq \alpha - d\}$$

$$I_2 := \{i \in I : \alpha - d + 1 \leq i \leq \alpha\} \tag{16.1}$$

$$I_3 = \{i \in I : \alpha + 1 \leq i\}$$

s را به سه قسمت تقسیم می کنیم

$$s(x) = s_1(x) + s_2(x) + s_3(x) \qquad s_k(x) = \sum_{i \in I_k} \mu_i(x) \tag{17.1}$$

برای هر $k = 1, 2, 3$، حال نشان می دهیم اگر I_k مخالف تهی باشد $s_k(x) > 0$. اگر I_k تهی باشد آن گاه بنا بر تعریف $s_k(x) = 0$ و چون حداقل یکی از I_1, I_2, I_3مخالف تهی هستند (بنا بر I) پس $s(x) > 0$

برای این منظور ابتدا s_2را مطرح می کنیم . اگر $d = 0$ آن گاه I_2 تهی است اگر $d \geq 1$ آن گاه I_2مخالف تهی است و از ۱۵.۱می بینیم که $\mu_i(x) > 0$ برای همه ی $i \in I_2$، بنابراین $s_2(x) > 0$ سپس s_3 را در نظر می گیریم اگر $\alpha \geq n - d$ آنگاه I_3تهی است در غیر این صورت $\alpha \leq n - d - 1$ و I_3 مخالف تهی است

$$s_3(x) = \mu_{\alpha+1}(x) + \mu_{\alpha+2}(x) + \ldots + \mu_{n-d}(x)$$

با استفاده از ۱۵.۱ می بینیم که

$$\mu_{\alpha+1} > 0 \quad \mu_{\alpha+2} < 0 \quad \mu_{\alpha+3} > 0$$

جمله اول در s_3مثبت و بقیه در علامت نوسان دارند .حال نشان می دهیم که در قدر مطلق $s_3(x)$ کاهش می یابد یعنی

$$|\mu_{\alpha+1}(x)| > |\mu_{\alpha+2}(x)| > |\mu_{\alpha+3}(x)| > \ldots$$

برای این فرض می کنیم که $i \geq \alpha + 1$ و عبارت را برای μ_{i+1}مقایسه می کنیم بنا بر μ_i از ۱۵.۱

$$\mu_{i+1}(x) = \prod_{j=0}^{i} (x - x_j) \prod_{k=i+d+2}^{n} (x_k - x)$$

از آن جایی که

$$x_{i+d+1} - x > x_{i+1} - x$$