بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

بررسی پوچ ساز ایده‌آل های حلقه‌های چندجمله‌ای روی حلقه‌های ناجابجایی

استاد راهنما

خانم دکتر صدیقه محسنی رجایی

پژوهشگر

ملیحه کاهه

اسفند ۱۳۹۱

کلیه دستاوردهای ناشی از تحقیق فوق متعلق به

دانشگاه الزهراء (س) است.

الهی هرچه بیشتر می دانم، می فهمم که هیچ نمی دانم

از فضل بیکرانت بر علم و ایمانم بیفزا

قدردانی و تشکر

حمد و ستایش خاص پروردگاری است که نعمت وجود را به ما ارزانی داشته است.

حال که این رساله به تحریر درآمده بر خود واجب دانستم که از زحمات بی دریغ استاد گرانقدر سرکار خانم دکتر محسنی رجایی که در طول این پایان نامه مرا یاری نمودند، کمال تشکر را داشته باشم و برای ایشان آرزوی سلامتی دارم.

همچنین از پدر و مادر مهربانم که همیشه مشوق من در راه تحصیل بوده اند و همسر عزیزم که پشتیبان من در تمام لحظات بوده است قدردانی می کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یکدار هستند وهرجا که حلقه جابجایی باشد، ذکر می‌کنیم. ما به بررسی پوچ‌سازهای یک حلقه و حلقه‌ی چندجمله‌ای روی آن می‌پردازیم و نشان می‌دهیم رابطه‌ی دوسویی بین مجموعه‌ی پوچ‌سازهای یک حلقه و حلقه‌ی چندجمله‌ای روی آن وجود دارد اگر و فقط اگر حلقه، آرمنداریز باشد.

همچنین رابطه‌ی دوسویی بین مجموعه‌ی پوچ‌سازهای ایده‌آل‌های یک حلقه و حلقه‌ی چندجمله‌ای روی آن وجود دارد اگر و فقط اگر حلقه، شبه‌آرمنداریز باشد.

بدین منظور به معرفی حلقه‌های آرمنداریز و شبه‌آرمنداریز می‌پردازیم وخواص آنها را بیان کرده و ارتباط آنها را با حلقه‌های دیگر نشان می‌دهیم و شرایطی را که تحت آن یک حلقه شبه‌آرمنداریز می‌شود، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی : پوچ‌ساز، ایده‌آل، حلقه‌ی آرمنداریز، حلقه‌ی شبه‌آرمنداریز، حلقه‌ی گاوسی، حلقه‌ی شبه‌بئر

مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه شرکت‌پذیر و یکدار باشد. $R[x]$ را حلقه چندجمله‌ای روی R در نظر می‌گیریم.
اگر U زیرمجموعه R باشد، پوچ‌ساز چپ (راست) U را چنین تعریف می‌کنیم:

$$l_R(U) = \{a \in R \mid aU = 0\} \qquad (r_R(U) = \{a \in R \mid Ua = 0\}).$$

برای اینکه روابط بین پوچ‌سازهای یک حلقه و حلقه چندجمله‌ای روی آن را نشان دهیم، نیاز به پیشنیاز هایی داریم که در فصل اول به آنها اشاره می‌کنیم. سپس مروری بر حلقه‌های آرمنداریز داریم.
مطالعه در مورد حلقه‌های آرمنداریز که به حلقه‌های چندجمله‌ای مربوط می‌شود توسط آرمنداریز [1] در سال ۱۹۹۴ آغاز شد و رجه [2] و چاوچاریا [3] درسال ۱۹۹۷ در مقاله‌ی [۱۱] آنرا مورد بررسی قرار دادند. سپس در سال۱۹۹۸

---

[1] Armendariz

[2] Rege

[3] Chhawchharia

اندرسون [۴] و کامیلو [۵] در مقاله‌ی [۲] ارتباط حلقه‌های آرمنداریز را با حلقه‌های گاوسی و بعد از آنها در سال ۲۰۰۰ کیم و یانگ لی در مقاله‌ی [۸] به ارتباط حلقه‌های آرمنداریز و حلقه‌های کاهشی پرداختند، که مطالب مهمی که از این دو مقاله نیاز داریم را در فصل ۲ و۴ بیان می‌کنیم.

در فصل دوم نشان می‌دهیم هر حلقه‌ی کاهشی، حلقه‌ی آرمنداریز است و هر حلقه‌ی آرمنداریز، حلقه آبلی است. همچنین اگر حلقه آرمنداریز باشد، آنگاه یک حلقه بئر (p.p) است اگر و فقط اگر حلقه چندجمله‌ای آن بئر (p.p) باشد.

در فصل سوم بااستفاده از مقاله‌ی [۵] با تعمیم حلقه‌های آرمنداریز، حلقه‌های شبه‌آرمنداریز را معرفی می‌کنیم و شرایطی را که تحت آن یک حلقه، شبه‌آرمنداریز می‌شود مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم هر حلقه‌ی شبه‌بئر، یک حلقه‌ی شبه‌آرمنداریز است. و همچنین بعضی از توسیع های یک حلقه‌ی شبه‌آرمنداریز، شبه‌آرمنداریز است.

همچنین در فصل چهارم بعد از معرفی حلقه‌های گاوسی و تعمیم آن به حلقه‌های شبه‌گاوسی در حالت ناجابجایی نشان می‌دهیم هر حلقه‌ی گاوسی یک حلقه‌ی آرمنداریز و هر حلقه‌ی شبه‌گاوسی یک حلقه‌ی شبه‌آرمنداریز است.

در فصل پنجم به بررسی مقاله [۵] که هدف پایان‌نامه است می‌پردازیم .

مجموعه‌ی پوچ‌سازهای حلقه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$rAnn(R) = \{r_R(U) | U \subseteq R\}$$

نشان می‌دهیم نگاشت $\phi : rAnn(R) \longrightarrow rAnn(R[x])$ با ضابطه‌ی $\phi(I) = IR[x]$ دوسویی است اگر و فقط اگر R حلقه‌ی آرمنداریز باشد.

---

[۴] Anderson

[۵] Camillo

همچنین به‌ازای هر ایده‌آل U از R تعریف می‌کنیم:

$$rAnn(id(R)) = \{r_R(U) \mid R \text{ ایدآل } U\}$$

و ثابت می‌کنیم نگاشت $\phi : rAnn(id(R)) \longrightarrow rAnn(id(R[x]))$ با ضابطه‌ی $\phi(A) = AR[x]$ دوسویی است اگر و فقط اگر R حلقه‌ی شبه‌آرمنداریز باشد.

سوال مهمی که بعد از بررسی این مطالب در ذهن ایجاد می‌شود اینست که بسیاری از ویژگی هایی که در مورد حلقه ها بیان کردیم، در مورد حلقه‌های چندجمله‌ای آنها نیز صادق بود، آیا در مورد همه ویژگی ها این مطلب صادق است یا خیر ؟

برای نشان دادن نادرستی این مطلب در فصل ششم از مقاله‌ی [۷] مثالی را ارائه کرده و نشان می‌دهیم حلقه چندجمله‌ای روی یک حلقه‌ی گولدی، لزوماً گولدی نیست.

ملیحه کاهه
اسفند ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل ابتدا به مرور مفاهیمی می‌پردازیم که خواننده احتمالاً با آنها آشناست و ما در این پایان‌نامه از آنها استفاده می‌کنیم. سپس در بخش دوم حلقه‌ی آرمنداریز را معرفی می‌کنیم و خواص آن را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در تمام مراحل پایان‌نامه حلقه R فقط شرکت‌پذیر و یکدار است ولی لزوما جابجایی نیست و هرجا که جابجایی باشد ذکر می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه R را رادیکال اول R نامند و با $P(R)=\bigcap_{\text{اول}\, P} P$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. حلقه R را نیم‌اول گوییم اگر $P(R)=0$.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه R را اول گوییم اگر ایده‌آل صفر یک ایده‌آل اول باشد. به عبارتی اگر $IJ = ۰$ داشته باشیم $I = ۰$ یا $J = ۰$.

تعریف ۴.۱.۱. اشتراک تمام ایده‌آل های چپ ماکزیمال حلقه‌ی R را رادیکال جیکوبسن R گوییم وبا $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه R راساده گوییم اگر تنها ایده‌آل های آن ، صفر و خودش باشد.

تعریف ۶.۱.۱. عضو a در حلقه‌ی R را پوچ‌توان گوییم اگر به‌ازای عددی صحیح و مثبت n داشته باشیم $a^n = ۰$.

تعریف ۷.۱.۱. عضو a در حلقه‌ی R را خودتوان گوییم اگر $a = a^۲$.

تعریف ۸.۱.۱. حلقه R را نیمه‌جابجایی نامند اگر به‌ازای دو عضو a,b در R داشته باشیم $ab = ۰$ آنگاه $aRb = ۰$.

تعریف ۹.۱.۱. حلقه R را کاهشی نامند اگر شامل هیچ عنصر پوچ‌توان غیر صفر نباشد. به تعبیر دیگر اگر $a^۲ = ۰$ آنگاه $a = ۰$.

مثال ۱۰.۱.۱. حلقه های کاهشی نیمه‌جابجایی هستند.

برهان. زیرا اگر $ab = ۰$ داریم $(ba)^۲ = b\underbrace{ab}_{۰}a = ۰$

با فرض کاهشی بودن داریم $ba = ۰$ حال به‌ازای هر $r \in R$

$$(arb)^۲ = ar\underbrace{ba}_{۰}rb = ۰$$

لذا $arb = ۰$ در نتیجه $aRb = ۰$ بنابراین نیمه‌جابجایی است. □

تعریف ۱۱.۱.۱. عضو a از حلقه R منظم به‌مفهوم فون نویمان [۱] نامیده می‌شود اگر عضو b از R موجود باشد بطوریکه $aba = a$.
عضو b را شبه معکوس a گویند.

[۱] Von Neumann

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه R یک حلقه‌ی منظم به‌مفهوم فون نویمان نامیده می‌شود اگر هر عضو از R منظم به‌مفهوم فون نویمان باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. عنصر ناصفر a از حلقه‌ی R را منظم نامند هرگاه a مقسوم‌علیه راست و چپ صفر نباشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. حلقه‌ی یکدار $Q(R)$ را یک حلقه‌ی خارج‌قسمتی راست R نامند اگر:

(i) $R \subseteq Q(R)$

(ii) هر عضو منظم در R یک یکه در $Q(R)$ باشد.

(iii) هر عضو $c \in Q(R)$ به صورت $c = ba^{-1}$ باشد که درآن a منظم است.

به طریق مشابه حلقه‌ی خارج‌قسمتی چپ حلقه‌ی R تعریف می‌شود و در شرط (iii) بجای ba^{-1} باید قرار دهیم ab^{-1}.

لزوماً حلقه‌ی خارج‌قسمتی چپ R وجود ندارد اما در صورت وجود با تقریب یکریختی یکتاست. همچنین ممکن است یک حلقه، حلقه‌ی خارج‌قسمتی چپ داشته باشد اما حلقه‌ی خارج‌قسمتی راست نداشته باشد.

حلقه‌ی خارج‌قسمتی چپ و راست حلقه‌ی R در صورت وجود، با یکدیگر یکریخت هستند.

۲.۱ حلقه‌های آرمنداریز

برای مطرح کردن خواص پوچ‌سازهای یک حلقه در این پایان‌نامه به حلقه‌ی آرمنداریز نیاز داریم که در این بخش به بیان آنها می‌پردازیم.
حلقه‌ی چندجمله‌ای روی R را با $R[x]$ و حلقه‌ی سری‌های توانی روی R را به صورت $R[[x]]$ نمایش می‌دهیم.
رجه و چاوچاریا حلقه‌آرمنداریز را بصورت زیر تعریف کرده‌اند:

تعریف ۱.۲.۱. حلقه R حلقه آرمنداریز است درصورتی‌که برای دو چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ در $R[x]$ اگر $f(x)g(x) = 0$ آنگاه به ازای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$ ، $a_i b_j = 0$.

بدیهی است که عکس این تعریف همواره برقرار است.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم p عددی اول باشد و $k \geqslant 1$. در این صورت $\mathbb{Z}_{p^k}$ حلقه‌ی آرمنداریز است.

برهان. دو عضو مخالف صفر $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ را در نظر می‌گیریم بطوریکه $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} \overline{b_j} x^j$ که در آن برای هر i ، j

$a_i, b_j \in \{0, 1, \dots, p^k - 1\}$

فرض کنیم $f(x)g(x) = 0$ حال اگر

$$F(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \text{ ، } G(x) := b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

را در نظر بگیریم، در اینصورت $F(x), G(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
با توجه به اینکه $f(x)g(x) = 0$ لذا در حلقه‌ی $\mathbb{Z}[x]$

$p^k | F(x)G(x)$

پس $H(x) \in \mathbb{Z}[x]$ وجود دارد بطوریکه

$$F(x)G(x) = p^k H(x)$$

از آنجایی که $\mathbb{Z}[x]$ یک $P.I.D$ است و p عضوی اول از آن می‌باشد،
چون $F(x)$ و $G(x)$ مخالف صفرند بنابراین

$$p^k \nmid F(x) \text{ و } p^k \nmid G(x)$$

بنابر یکتایی تجزیه $0 < r, s < k$ وجود دارند که:

$$F(x) = p^r H_1(x) G(x) = p^s H_2(x) \qquad r + s \geqslant k \qquad H_1 H_2 \in \mathbb{Z}[x]$$

لذا برای هر $0 \leqslant i \leqslant m$ و $0 \leqslant j \leqslant n$ داریم $p^r | a_i$ و $p^s | b_j$
و $p^{r+s} | a_i b_j$ بنابراین $p^k | a_i b_j$ در نتیجه

$$\overline{a_i}\overline{b_j} = \overline{a_i b_j} = 0$$

لذا $\mathbb{Z}_{p^k}$ حلقه‌ی آرمنداریز است. □

قضیه ۳.۲.۱. *زیر حلقه‌ی هر حلقه‌ی آرمنداریز، آرمنداریز است.*

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ی آرمنداریز باشد و A زیرحلقه‌ی R باشد و

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ ، } g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

عضوهایی از $A[x]$ باشند و $f(x).g(x) = 0$. $A[x]$ زیرحلقه‌ی $R[x]$ است لذا $f(x)$ و $g(x)$ عضو $R[x]$ می‌باشند. بنابر فرض به ازای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$ داریم $a_i b_j = 0$ ، لذا A حلقه‌ی آرمنداریز است. □

مثال ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. ادعا می‌کنیم حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی R برای $n \geq 2$ ، آرمنداریز نیست.

برهان. کافیست نشان دهیم حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی ۲×۲ روی R آرمنداریز نیست . لذا بنابر قضیه‌ی ۳.۲.۱ حکم اثبات می‌شود.
فرض کنیم S مجموعه ماتریس‌های بالا مثلثی ۲×۲ روی R باشد. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} x \qquad g(x) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} x$$

$f(x)$ و $g(x)$ عضوهای $S[x]$ هستند. بدیهی است که $f(x)g(x) = ۰$ اما $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \neq ۰$ لذا S حلقه‌ی آرمنداریز نیست. □

نتیجه ۵.۲.۱. *حلقه‌ی $M_n(R)$ آرمنداریز نیست.*

قضیه ۶.۲.۱. *حلقه‌ی R آرمنداریز است اگر و فقط اگر حلقه‌ی $R[x]$ آرمنداریز باشد.*

برهان. فرض کنیم حلقه‌ی R آرمنداریز باشد و $f(T), g(T) \in R[x][T]$

$$f(T) = f_۰ + f_۱T + \ldots + f_nT^n \qquad , \qquad g(T) = g_۰ + g_۱T + \ldots + g_mT^m$$

و $f(T)g(T) = ۰$ بطوریکه f_i, g_j عضو $R[x]$ هستند.
نشان می‌دهیم به‌ازای هر $۰ \leq i \leq n$ و $۰ \leq j \leq m$ داریم $f_ig_j = ۰$.
فرض کنیم

$$k = \deg f_۰ + \ldots + \deg f_n + \deg g_۰ + \ldots + \deg g_m$$

دو چندجمله‌ای

$$g(x^k) = g_۰ + g_۱x^k + \ldots + g_mx^{km} \text{ ، } f(x^k) = f_۰ + f_۱x^k + \ldots + f_nx^{kn}$$

از $R[x]$ را در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_{n_i}}\}$ مجموعه ضرایب f_i باشد و $\{b_{j_0}, \dots, b_{j_{m_j}}\}$ مجموعه ضرایب g_j باشد.
بدیهی است که مجموعه ضرایب f_i و g_j با مجموعه ضرایب $f(x^k)$ و $g(x^k)$ مساوی است. بنا به فرض

$$f(T)g(T) = 0$$

و چون x با اعضای R جابجا می‌شود، لذا

$$f(x^k)g(x^k) = 0$$

بنابر فرض R حلقه‌ی آرمنداریز است، بنابراین

$$a_{i_s}b_{j_t} = 0 \qquad \forall i, j, s, t$$

قرار می‌دهیم $f_i g_j = \sum_l c_l x^l$. از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر l ، $c_l = 0$ یعنی $f_i g_j = 0$ که در آن $0 \le i \le n$ و $0 \le j \le m$ و حکم اثبات می‌شود.
حال برعکس فرض می‌کنیم حلقه‌ی $R[x]$ آرمنداریز باشد، چون R زیرحلقه‌ی $R[x]$ است از قضیه ۳.۲.۱ حکم نتیجه می‌شود. $\square$

حلقه‌های آرمنداریز برای حاصلضرب دو چندجمله‌ای تعریف شده‌اند. نشان می‌دهیم این تعریف برای حاصلضرب متناهی از چندجمله‌ای ها نیز برقرار است.

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ی آرمنداریز باشد. اگر $f_1, \dots, f_n \in R[x]$ بطوریکه $f_1 \dots f_n = 0$ آنگاه $a_1 \dots a_n = 0$.*
(مجموعه ضرایب f_i را با A_i نمایش می‌دهیم که $a_i \in A_i$)

برهان. داریم $f_1(f_2 \dots f_n) = 0$ بنابراین با توجه به اینکه R حلقه‌ی آرمنداریز است، به‌ازای هر ضریب b از چندجمله‌ای $f_2 \dots f_n$ داریم $a_1 b = 0$ که نتیجه می‌دهد $a_1 f_2 \dots f_n = 0$ یعنی $a_1 f_2(f_3 \dots f_n) =$

از آنجایی که a_1a_2 یک ضریب از a_1f_2 است، لذا به‌ازای هر ضریب c از چندجمله‌ای $f_3\dots f_n$ داریم $a_1a_2c=0$ لذا $a_1a_2f_3\dots f_n=0$
با تکرار این روند نتیجه می‌گیریم $a_1\dots a_n=0$ □

حال نشان می‌دهیم حاصل‌ضرب مستقیم و حاصل‌جمع مستقیم حلقه‌های آرمنداریز، آرمنداریز است .

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ خانواده‌ای از حلقه‌ها باشد. در اینصورت داریم:*
(i) $\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز است اگر و فقط اگر برای هر α R_α حلقه‌ی آرمنداریز باشد.

(ii) $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز است اگر و فقط اگر برای هر α R_α حلقه‌ی آرمنداریز باشد.

برهان. (i) اگر $\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز باشد، با توجه به همریختی

$$R_{\alpha_0}\longrightarrow\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$$
$$x\longmapsto x_\alpha$$

بطوریکه $x_{\alpha_0}=x$ و برای هر $\beta\neq\alpha_0$ ، $x_\beta=0$
R_{α_0} زیر حلقه‌ای از $\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$ است. لذا طبق قضیه ۳.۲.۱ ، R_{α_0} حلقه‌ی آرمنداریز است.
حال اگر برای هر $\alpha\in\Gamma$ ، R_α حلقه‌ی آرمنداریز باشد، نشان می‌دهیم حلقه‌ی $\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha$ آرمنداریز است.
فرض کنیم $f(x)g(x)\in(\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha)[x]$ با توجه به اینکه

$$(\prod_{\alpha\in\Gamma}R_\alpha)[x]\cong\prod_{\alpha\in\Gamma}(R_\alpha[x])$$

می‌توان نوشت

$f(x) = (f_\alpha(x))$
$g(x) = (g_\alpha(x))$

بطوریکه $f_\alpha(x), g_\alpha(x) \in R_\alpha[x]$ حال اگر $f(x)g(x) = ۰$ آنگاه برای هر $\alpha \in \Gamma$ داریم $f_\alpha(x)g_\alpha(x) = ۰$.
چون R_α حلقه‌ی آرمنداریز است، لذا حاصل ضرب ضرایب $f_\alpha(x)$ و $g_\alpha(x)$ برار صفر است. با توجه به اینکه ضرایب $f(x)$ به شکل (x_α) می‌باشد که $x_\alpha \in R_\alpha$ و x_α ضریبی از $f_\alpha(x)$ است و ضرایب $g(x)$ به شکل (y_α) می‌باشد که $y_\alpha \in R_\alpha$ و y_α ضریبی از $g_\alpha(x)$ است، بنابراین $x_\alpha y_\alpha = ۰$.
لذا حاصل ضرب ضرایب $f(x)$ و $g(x)$ برابر صفر است و $\prod_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز است.
(ii) اگر $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز باشد، با توجه به همریختی

$$R_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$$
$$x \longmapsto x_\alpha$$

برای هر $\alpha \in \Gamma$ ، R_α زیرحلقه‌ای از $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ بوده و لذا طبق قضیه ۳.۲.۱ برای هر $\alpha \in \Gamma$ ، R_α حلقه‌ی آرمنداریز است.
حال اگر برای هر $\alpha \in \Gamma$ ، R_α حلقه‌ی آرمنداریز باشد، طبق (i) $\prod_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز است و چون $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ زیر حلقه‌ی $\prod_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ است، بنابراین طبق قضیه ۳.۲.۱ ، $\bigoplus_{\alpha\in\Gamma} R_\alpha$ حلقه‌ی آرمنداریز است. □

تعریف ۹.۲.۱. حلقه R را زیرجمع‌مستقیم [۲] خانواده‌ای از حلقه‌های $\{R_i\}_{i\in I}$ نامند اگر همریختی یک‌به‌یک مانند

$$h : R \to \prod_{i\in I} R_i$$

[۲] subdirect sum