دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
وزارت علوم و تحقیقات و فناوری
دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض
گرایش جبر

عنوان
کوهمولوژی موضعی و زیررسته‌های سر

استاد راهنما
دکتر شیرویه پیروی

استاد مشاور
دکتر محمّد اخوی زادگان

نگارنده
نغمه السّادات رزم‌آراء

اسفند ۱۳۹۰

ارزش انسان، زعلم و معرفت پیدا شود   بی هنر چون دعوی بیجا کند، رسوا شود

لاف دانایی زدن، تنها ملاک علم نیست   در عمل، میزان علم هر کسی پیدا شود

تقدیمی ناقابل خدمت عزیزترین عزیزانم:

پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

با تقدیر و سپاس از:

خداوندی را که داشتنش جبران همه‌ی نداشتن‌های من است. خانواده‌ی مهربانم به ویژه، پدر و مادرم که قامتشان خمید تا من راست بایستم. اساتیدم که زحمت کشیدند، تا من بیاموزم آنچه را نمی‌دانم. به ویژه، استاد بزرگوار، فرزانه و فرهیخته، استاد راهنمایم جناب آقای دکتر شیرویه پیروی که تجارب ارزشمندشان را در اختیار اینجانب قرار داده‌اند و مرا در تکمیل این پایان‌نامه از علم بی‌پایان خود بهره‌مند نمودند. همچنین، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر محمّد اخوی زادگان که از راهنمایی‌های ایشان در هر چه بهتر شدن نتیجه‌ی این کار بهره برده‌ام. در پایان، با تشکّر از تمامی کسانی که نامشان ذکر نشد ولی یادشان همیشه در ذهن می‌ماند. کسانی که زحمت کشیدند تا ما بیاموزیم و استوار بایستیم.

نغمه السّادات رزم‌آراء

چکیده

فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و M یک $R-$مدول در زیررسته‌ی سر از رسته‌ی $R-$مدول‌ها باشد. در این پایان‌نامه برای هر $i > n$ و $i < n$ خواص مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^n_{\mathfrak{a}}(M)$ را مطالعه خواهیم کرد.

همچنین مفاهیم رشته‌های منظم و عمق را تعمیم خواهیم داد و ارتباط بین این مفاهیم و مدول‌های کوهمولوژی موضعی را خواهیم یافت.

به عنوان یک نتیجه‌ی مهم، نشان خواهیم داد که عضویت مدول‌های کوهمولوژی موضعی یک مدول با تولید متناهی در یک زیررسته‌ی سر، تنها به تکیه‌گاه مدول بستگی دارد.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

i–امین تابعگون مشتق شده‌ی راست تابعگون دقیق چپ $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$	$\mathrm{Ext}^i_R(N,-)$
i–امین جمله در تحلیل انژکتیو مینیمال مدول M	$E^i(M)$
i–امین عدد باس مربوط به مدول M نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{p}$	$\mu^i(\mathfrak{p},M)$
i–امین مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$	$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$
اجتماع عناصری از مدول M که توسط توانی از $\mathfrak{a}$ پوچ می شوند	$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$
ایده‌آل اول	$\mathfrak{p}$
ایده‌آل اول وابسته به مدول M	$\mathrm{Ass}_R(M)$
ایده‌آل حلقه‌ی R	$\mathfrak{a}$
بعد کوهمولوژیکال $\mathfrak{a}$ در R	$\mathrm{cd}(R,\mathfrak{a})$
p–امین همولوژی مدول همبافت کوزول	$H_p(\underline{x},M)$
پوچساز $\mathfrak{a}$ روی مدول M	$o:_M \mathfrak{a}$
پوش انژکتیو	$E(M)$
تحلیل انژکتیو مدول M	E°
تکیه‌گاه مدول M	$\mathrm{Supp}_R(M)$
حلقه‌ی نوتری	R
زیررسته‌ی سر	S
سوپریمم	$\sup$
شرط روی زیررسته‌ی سر S	$C_{\mathfrak{a}}$
طول S–رشته‌های منظم ماکزیمال روی مدول M در ایده‌آل $\mathfrak{a}$	$\mathrm{S}-\mathrm{depth}_{\mathfrak{a}}(M)$
ماکزیمال	$\max$
مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر مدول M	$Z(M)$
همبافت کوزول	$K_\bullet(\underline{x})$

پیشگفتار

ابتدا مقدمه‌ای درباره‌ی کوهمولوژی موضعی [1] مطرح می‌کنیم. کوهمولوژی موضعی، شاخه‌ای از مبحث کلی و جامع هندسه‌ی جبری است. مقاله‌ی سر [2] با عنوان «مباحث مرتبط با جبر Faisceaux» باعث تحولی عمیق و چشمگیر در زمینه‌ی کوهمولوژی گردید که همانند یک ابزار مهم در هندسه‌ی جبری عمل می‌کرد. پیشتر از این، نظریات اساسی و قاطعی در خصوص کوهمولوژی مطرح شده بود، ولی مقاله‌ی سر در سال ۱۹۵۵ توانست، نکات بسیار ارزشمندی را ارائه دهد. بخش عظیمی از این مطالب به نظریه‌ی کوهمولوژی موضعی نزدیک است. تا سال ۱۹۶۷ در این زمینه کار قابل ملاحظه‌ای صورت نگرفت. تا اینکه مقاله‌ای با عنوان «کوهمولوژی موضعی» توسط Hartshorne انتشار یافت. این مقاله گسترش مطالبی بود که در سال ۱۹۶۱ توسط Grothendieck در دانشگاه هاروارد مطرح شده بود. چاپ مقاله‌ی Grothendieck-Hartshorne، برای بسیاری از ریاضیدان‌ها و کسانی که به صورت حرفه‌ای این موضوع را پیگیری می‌نمودند، مبحث کوهمولوژی موضعی را وارد مرحله‌ی نوینی نمود و انقلابی بزرگ در نظریه‌ی حلقه‌های نوتری ایجاد کرد. شایان ذکر است که، مقاله‌ی Grothendieck-Hartshorne، ماهیت هندسی دارد و از نقطه نظر هندسی حائز اهمیت است. بنابراین با بررسی گروه‌های کوهمولوژی از فضاهای توپولوژیک آغاز می‌گردد و یک دسته‌ی جبری از فضاهای توپولوژیک که تحت زیرفضا موضعاً بسته هستند را بکار می‌گیرد.

در اینجا به شرح کلیاتی در خصوص این پایان‌نامه می‌پردازیم.

این پایان‌نامه بر گرفته از مقاله‌ی

M. Aghapournahar, L. Melkersson, "*Local cohomology and Serre subcategories*" (2008) 1275-1287.

در سراسر این پایان‌نامه R حلقه‌ای جابجایی و نوتری است. این پایان‌نامه مشتمل بر سه فصل است:

فصل اول پیرامون مباحث اولیه و مقدماتی است.

در فصل دوم به این پرسش اساسی پاسخ خواهیم داد که، اگر $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R، M یک $R-$مدول و S یک زیررسته‌ی سر از رسته‌ی $R-$مدول‌ها باشد، چه زمان برای $i < n$ مدول‌های کوهمولوژی موضعی $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ در S قرار دارند؟

خواهیم دید $H^i_{\mathfrak{a}}(M) \in S$ هرگاه S تحت پوش انژکتیو بسته یا به طور کلی S در شرطی که آن را

[1] Local cohomology

[2] Serre

شرط $C_{\mathfrak{a}}$ می‌نامیم، صدق کند.

این شرط بیان می‌کند که

$$o:_M \mathfrak{a} \in S \qquad \& \qquad Supp_R(M) \subset V(\mathfrak{a}) \Longrightarrow M \in S.$$

برای پاسخ به این پرسش لازم است، مباحث مربوط به Ext−مدول‌ها، کوهمولوژی کوزول [۳] و به طور کلی کوهمولوژی موضعی مطالعه شوند.

همچنین، اگر M یک R−مدول با تولید متناهی باشد، S−رشته‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، S−رشته‌ها در ۲.۲.۲ تعریف می‌شوند و خواص مهم آنها در ۴.۲.۲ مطرح خواهد شد.

اگر S در شرط $C_{\mathfrak{a}}$ صدق کند، نشان خواهیم داد که اگر M یک R−مدول با تولید متناهی باشد که $M/\mathfrak{a}M \notin S$، طول همه‌ی S−رشته‌های منظم ماکزیمال در ایده‌آل $\mathfrak{a}$ یکسان است و این طول واحد را با نماد $\mathrm{S}-\mathrm{depth}_{\mathfrak{a}}(M)$ نشان می‌دهیم.

بسته به انتخاب S، رشته‌های گوناگونی، مشابهه رشته‌های منظم، فیلتر رشته‌های منظم، رشته‌های منظم تعمیم یافته و غیره بدست خواهیم آورد.

کوهمولوژی موضعی تعمیم یافته که توسط گروتندیک در [۱۲] تعریف شده است، عبارت است از تابعگون‌های مشتق شده‌ی راست، تابعگون دقیق چپ $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Hom}_R(N,-))$، که در آن N یک R−مدول با تولید متناهی است و می‌توان نشان داد که

$$H^i_{\mathfrak{a}}(N,M) \cong \lim_{\overrightarrow{n}} Ext^i_R(N/\mathfrak{a}^n N, M)$$

که در آن M یک R−مدول دلخواه است. اگر M یک R−مدول $\mathfrak{a}$−تابدار $M=\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$، آنگاه برای هر i یکریختی‌های طبیعی

$$H^i_{\mathfrak{a}}(N,M) \cong Ext^i_R(N,M)$$

موجودند.

در فصل سوم به این پرسش پاسخ خواهیم داد که، برای هر $i > n$، چه وقت $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ به S متعلق است؟

[۳] Koszul cohomology

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول به بیان پیش‌نیازها می‌پردازیم. بخش دوم مبحث پوش انژکتیو و بخش سوم پیرامون $R-$مدول‌های تابدار و بدون تاب است.

۱.۱ پیش‌نیازها

در این بخش تعاریف و قضایای مربوط به تکیه‌گاه و ایده‌آل‌های اول وابسته به یک مدول را بررسی می‌کنیم. مفاهیمی که در بخش‌های بعدی مورد نیاز هستند.

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. تکیه‌گاه M را با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نشان می‌دهیم و برابر است با مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اولی از R مانند $\mathfrak{p}$ که، $M_{\mathfrak{p}} \neq o$.
اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه می‌توان نشان داد $\mathrm{Supp}_R(M) = V(\mathrm{Ann}(M))$.
همچنین برای ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R

$$Supp_R(R/\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}).$$

۲.۱.۱ گزاره. **فرض کنید M یک R−مدول است. در این صورت $M = o$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Supp}_R(M) = \emptyset$.**

۳.۱.۱ لم. **فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و M یک R−مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت**

$$Supp_R(M/\mathfrak{a}M) = Supp_R(M) \cap V(\mathfrak{a}).$$

برهان. فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M/\mathfrak{a}M)$. در این صورت

$$(M/\mathfrak{a}M)_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}/(\mathfrak{a}M)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}R_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \neq o.$$

بنابراین $M_\mathfrak{p} \neq o$ و $\mathfrak{a}R_\mathfrak{p} \subsetneqq R_\mathfrak{p}$. پس $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$ و $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. در نتیجه $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$ و

$$Supp_R(M/\mathfrak{a}M) \subseteq Supp_R(M) \cap V(\mathfrak{a}).$$

حال فرض کنید $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$. در این صورت $M_\mathfrak{p} \neq o$ و $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. بنابراین طبق لم ناکایاما[۱] $M_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}R_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$. پس

$$(M/\mathfrak{a}M)_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}R_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \neq o$$

بنابراین $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M/\mathfrak{a}M)$ و

$$Supp_R(M) \cap V(\mathfrak{a}) \subseteq Supp_R(M/\mathfrak{a}M)$$

در نتیجه حکم ثابت می‌شود. □

۴.۱.۱ قضیه. **فرض کنید $o \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow o$ رشته‌ای دقیق از R−مدول‌ها و R−همریختی‌ها باشد. در این صورت**

---
[۱] Nakayama

$$Supp_R(M) = Supp_R(M') \cup Supp_R(M'').$$

برهان. به تمرین ۱۹.۹ از منبع [۲۱] مراجعه کنید. □

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنید M یک R–مدول باشد. مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با نماد $\mathrm{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهیم و

$$Ass_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \exists o \neq x \in M \quad \mathfrak{p} = Ann(x)\}.$$

۶.۱.۱ گزاره. اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$، آنگاه زیرمدول N از M موجود است که $N \cong R/\mathfrak{p}$.

۷.۱.۱ قضیه. فرض کنید M یک R–مدول ناصفر و با تولید متناهی باشد. در این صورت زنجیر

$$o = M_o \subset M_۱ \subset M_۲ \subset \cdots \subset M_n = M$$

از زیرمدول‌های M موجود است که، برای هر $i = ۱, \cdots, n$، $M_i/M_{i-۱} \cong R/\mathfrak{p}_i$، که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$.

برهان. چون M ناصفر است، پس $\mathrm{Ass}_R(M) \neq \emptyset$. فرض کنید $\mathfrak{p}_۱ \in \mathrm{Ass}_R(M)$. در این صورت زیرمدول $M_۱$ از M موجود است به طوری که $M_۱ \cong R/\mathfrak{p}_۱$. لذا زنجیر $o = M_o \subset M_۱$ از زیرمدول‌های M موجود است. اگر $M_۱ = M$، که حکم برقرار است. در غیر این صورت $M/M_۱$ یک R–مدول ناصفر است. فرض کنید $\mathfrak{p}_۲ \in \mathrm{Ass}_R(M/M_۱)$. در این صورت زیرمدول $M_۲/M_۱$ از $M/M_۱$ موجود است که $M_۲/M_۱ \cong R/\mathfrak{p}_۲$. اگر $M_۲ = M$، آنگاه زنجیر $o = M_o \subset M_۱ \subset M_۲ = M$ همان زنجیر مورد نظر است. در غیر این صورت $M/M_۲$ یک R–مدول ناصفر است و $\mathfrak{p}_۳ \in \mathrm{Ass}_R(M/M_۳)$. بنابراین زیرمدول $M_۳/M_۲$ از $M/M_۲$ موجود است که، $M_۳/M_۲ \cong R/\mathfrak{p}_۳$. لذا زنجیر $o = M_o \subset M_۱ \subset M_۲ \subset M_۳$ از زیرمدول‌های M را خواهیم داشت. اگر $M_۳ = M$، حکم برقرار است. در غیر این صورت مانند قبل عمل می‌کنیم. چون M یک R–مدول نوتری است، این عمل در جایی پایان می‌یابد. پس زیرمدولی از M مانند M_n هست که، $M/M_n = o$. بنابراین زنجیر

$$o = M_o \subset M_۱ \subset M_۲ \subset \cdots \subset M_n = M$$

از زیرمدول‌های M با شرایط مورد نظر بدست می‌آید. $\square$

۸.۱.۱ قضیه. فرض کنید $o \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow o$ رشته‌ای دقیق از R—مدول‌ها و R—همریختی‌هاست. در این صورت

$$Ass_R(M) \subseteq Ass_R(M') \cup Ass_R(M'').$$

برهان. به‌منبع [۱۶] قضیه‌ی ۶.۳ مراجعه کنید. $\square$

۹.۱.۱ قضیه. فرض کنید M یک R—مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت $\mathrm{Ass}_R(M)$ متناهی است.

برهان. طبق قضیه‌ی ۷.۱.۱، رشته‌هایی دقیق

$$\begin{aligned}
o &\longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{n-1} \longrightarrow o\\
o &\longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M_{n-1}/M_{n-2} \longrightarrow o\\
&\vdots\\
o &\longrightarrow M_o \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1/M_o \longrightarrow o
\end{aligned}$$

از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها موجود است. بنا به قضیه‌ی ۸.۱.۱

$$\begin{aligned}
Ass_R(M) &\subseteq Ass_R(M_{n-1}) \cup Ass_R(M/M_{n-1})\\
&\subseteq Ass_R(M_{n-2}) \cup Ass_R(M_{n-1}/M_{n-2}) \cup Ass_R(M/M_{n-1})\\
&\subseteq Ass_R(M_1) \cup Ass_R(M_2/M_1) \cup Ass_R(M_3/M_2)\\
&\vdots\\
&\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Ass_R(M/M_{i-1}).
\end{aligned}$$

□

۱۰.۱.۱ گزاره. **فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد و $o \notin S$ و فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت**

$$Ass_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \in Ass_R(M), \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

۱۱.۱.۱ نتیجه. **فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R است و فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت**

$$Ass_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{q} \in Ass_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

۱۲.۱.۱ قضیه. **فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R است و M یک $R-$مدول باشد. اگر M یک $R_{\mathfrak{p}}-$مدول باشد، آنگاه $\mathrm{Ass}_R(M) = \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M)$.**

برهان. به منبع [۱٦] قضیه‌ی ٦.۲ مراجعه کنید. □

۱۳.۱.۱ نتیجه. **فرض کنید $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R است و فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$.**

۱۴.۱.۱ قضیه. **فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M)$ و عناصر مینیمال $\mathrm{Supp}_R(M)$ در $\mathrm{Ass}_R(M)$ قرار دارند.**

برهان. اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$، آنگاه رشته‌ی $o \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow M$ دقیق است. بنابراین رشته‌های $o \longrightarrow (R/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \longrightarrow M_\mathfrak{p}$ و $o \longrightarrow R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \longrightarrow M_\mathfrak{p}$ دقیق‌اند. چون $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ایده‌آل ماکزیمال است، پس $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \neq o$ و در نتیجه $M_\mathfrak{p} \neq o$. لذا $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(M)$.

حال فرض کنید $\mathfrak{p}$ در $\mathrm{Supp}_R(M)$ و عضو مینیمال باشد. در این صورت $M_\mathfrak{p} \neq o$ و

$$Supp_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} | \mathfrak{q} \in Supp_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

پس $\mathrm{Supp}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}\}$. بنابراین $\mathrm{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}\}$ و در نتیجه $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ و حکم ثابت شد. □

۱۵.۱.۱ تعریف. $a \in R$ را روی M مقسوم علیه صفر[۲] نامیم، هرگاه $m \neq o$ در M موجود باشد که $am = o$. مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر M را با نماد $Z_R(M)$ نشان می‌دهیم.

۱۶.۱.۱ گزاره.

$$Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}.$$

۱۷.۱.۱ تعریف. فرض کنید M یک R−مدول ناصفر و با تولید متناهی باشد و $x_۱$،...،x_n عناصری از R باشند. در این صورت $x_۱, \cdots, x_n$ را یک M−رشته‌ی منظم نامیم، هرگاه

(a) $x_۱$ روی M مقسوم علیه صفر نباشد و برای هر $i = ۲, \cdots, n$ عنصر x_i روی $M/\sum_{j=۱}^{i-۱} x_j M$ مقسوم علیه صفر نباشد.

(b) $M \neq \sum_{j=۱}^{n} x_j M$.

در صورتی که تنها شرط (a) برقرار باشد، M−رشته را M−رشته‌ی ضعیف نامیم.

می‌توان نشان داد که طول M−رشته‌های ماکزیمال در ایده‌آل واقعی $\mathfrak{a}$ از R مقدار ثابتی است. این عدد را درجه‌ی $\mathfrak{a}$ در M نامیم و با $\mathrm{grade}_M \mathfrak{a}$ نشان می‌دهیم.

اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی باشد، آنگاه هر M−رشته در $\mathfrak{m}$ قرار می‌گیرد. در این حالت $\mathrm{grade}_M \mathfrak{m}$ را با $\mathrm{depth}(M)$ نشان می‌دهیم، که طول بلندترین M−رشته موجود است.

---
[۲] zerodivisor

۲.۱ پوش انژکتیو

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنید M و E دو $R-$مدول باشند. E را توسیع اساسی M نامیم، هرگاه

(a) M زیرمدولی از E باشد.

(b) برای هر زیرمدول مخالف صفرN از E داشته باشیم $M \cap N \neq o$.

اگر M زیرمدول واقعی از E باشد، آنگاه E را توسیع اساسی سره از M می‌نامیم.

۲.۲.۱ قضیه. $R-$مدول M انژکتیو است اگر و تنها اگر توسیع اساسی سره نداشته باشد.

برهان. به منبع [۲۲] قضیه‌ی ۱۷.۲ مراجعه کنید. □

۳.۲.۱ قضیه. فرض کنید M و E دو $R-$مدول باشند. شرایط زیر هم‌ارزند:

(i) E توسیع اساسی و ماکزیمال M است؛

(ii) E توسیع اساسی و انژکتیو M است؛

(iii) E انژکتیو است و $R-$مدول انژکتیو دیگری مانند E' با شرط $M \subset E' \subseteq E$ موجود نیست.

برهان. به منبع [۲۲] قضیه‌ی ۲۱.۲ مراجعه کنید. □

۴.۲.۱ تعریف. فرض کنید M و E دو $R-$مدول باشند و E توسیع اساسی و انژکتیو M است. در این صورت E را با نماد $\mathrm{E}(M)$ یا $\mathrm{E}_R(M)$ نشان می‌دهیم و آن را پوش انژکتیو M می‌نامیم.
پوش انژکتیو M، در بین توسیع‌های اساسی از همه بزرگتر و کوچکترین انژکتیو شامل M است.

۵.۲.۱ قضیه. فرض کنید M و E دو Rــمدول باشند و E پوش انژکتیو M است. در این صورت

(i) اگر Rــمدول D انژکتیو و شامل M باشد، آنگاه همریختی یک به یک ϕ از E به D موجود است؛

(ii) هر دو پوش انژکتیو M یکریختند.

۶.۲.۱ تعریف. فرض کنید M یک Rــمدول باشد. تحلیل انژکتیو

$$o \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E^{\circ} \xrightarrow{d^{\circ}} E^{۱} \xrightarrow{d^{۱}} \cdots \longrightarrow E^{r} \xrightarrow{d^{r}} E^{r+۱} \longrightarrow \cdots$$

تحلیل انژکتیو مینیمال نامیده می‌شود، هرگاه Rــهمریختی‌های α، d°، ... ، d^{r} ، ... اساسی باشند. یعنی برای هر $i \geqslant ۱$، E^{i} توسیع اساسی $Imd^{i-۱}$ باشد و همچنین E° توسیع اساسی $Im\alpha$ باشد.

هر Rــمدول، یک تحلیل انژکتیو مینیمال دارد، که در آن $E^{\circ} = E(M)$ و $E^{۱} = E(coker\ \alpha)$ و d° ترکیب دو همریختی $E(M) \longrightarrow coker\ \alpha$ و $coker\ \alpha \longrightarrow E(coker\ \alpha)$ است. بقیه‌ی جملات نیز به همین روش ساخته می‌شوند.

برای هر $i \geq o$، iــامین جمله در یک تحلیل انژکتیو مینیمال M را با نماد $E^{i}(M)$ یا $E^{i}{}_{R}(M)$ نشان می‌دهیم. اگر R حلقه‌ی نوتری باشد، آنگاه برای هر $i \geq o$، $E^{i}(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mu^{i}(\mathfrak{p}, M) E(R/\mathfrak{p})$. این تجزیه یکتاست و برای هر $i \geq o$ $\mu^{i}(\mathfrak{p}, M)$ را iــامین عدد باس مربوط به مدول M نسبت به $\mathfrak{p}$ می‌نامیم. اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه برای هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$، $\mu^{i}(\mathfrak{p}, M) < \infty$. برای جزییات بیشتر به منبع [۲۱] رجوع شود.

۷.۲.۱ قضیه. فرض کنید M یک Rــمدول و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول از R است. اگر $k(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$، آنگاه

$$\mu^{i}(\mathfrak{p}, M) = dim_{k(\mathfrak{p})} Ext^{i}_{R_{\mathfrak{p}}}(k(\mathfrak{p}), M_{\mathfrak{p}}).$$

برهان. به قضیه‌ی ۲۱.۱۱ از منبع [۲۱] مراجعه کنید. □

۳.۱ R—مدول‌های تابدار و بدون تاب

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R است. برای هر R—مدول M زیرمجموعه‌ی $\cup_{n\in\mathbb{N}}(o :_M \mathfrak{a}^n)$ از M را با $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ زیرمدولی از M است. برای هر همریختی $f : M \longrightarrow M'$ از R—مدول‌ها $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M')$. بنابراین R—همریختی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) : \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M')$ که تحدید f روی $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ است، وجود دارد. می‌توان ثابت کرد $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ تابعگونی همورد و R—خطی است.

۲.۳.۱ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R است. تابعگون $\mathfrak{a}$—تابدار $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ دقیق چپ است.

برهان. فرض کنید

$$o \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow o$$

رشته‌ای دقیق از R—مدول‌ها و R—همریختی‌هاست. نشان می‌دهیم رشته‌ی

$$o \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(L) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}(g)} \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$$

دقیق است. به وضوح $\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)$ همریختی یک به یک است. بنا به تعریف ۱.۳.۱ $\Gamma_{\mathfrak{a}}(g)o\Gamma_{\mathfrak{a}}(f) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(gf) = o$. پس

$$Im(\Gamma_{\mathfrak{a}}(f)) \subseteq Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(g)).$$

حال فرض کنید $m \in Ker(\Gamma_{\mathfrak{a}}(g))$. در این صورت $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ و $n \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که $\mathfrak{a}^n m = o$ و $g(m) = o$. چون $Imf = Kerg$، پس $l \in L$ موجود است که $f(l) = m$. برای هر $r \in \mathfrak{a}^n$،

$$f(rl) = rf(l) = rm = o.$$

چون f همریختی یک به یک است، پس $rl = o$. در نتیجه $\mathfrak{a}^n l = o$. بنابراین $l \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(L)$. در اینجا اثبات به پایان می‌رسد. □

۳.۳.۱ تعریف. **فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و M یک R—مدول باشد. M را $\mathfrak{a}$—تابدار نامیم، هرگاه $M = \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ و M را $\mathfrak{a}$—بدون تاب نامیم، هرگاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = o$.**

۴.۳.۱ گزاره.

(i) **فرض کنید M یک R—مدول و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و شامل یک غیر مقسوم علیه صفر روی M باشد. در این صورت M یک $\mathfrak{a}$—بدون تاب است.**

(ii) **فرض کنید M یک R—مدول با تولید متناهی باشد. M یک R—مدول $\mathfrak{a}$—بدون تاب است، اگر و تنها اگر $\mathfrak{a}$ شامل یک غیر مقسوم علیه صفر روی M باشد.**

برهان.

(i) فرض کنید $r \in \mathfrak{a}$ یک غیر مقسوم علیه صفر روی M است و $m \in \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. پس $n \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که $\mathfrak{a}^n m = o$. بنابراین $r^n m = o$. در نتیجه $m = o$ و $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = o$.

(ii) فرض کنید $\mathfrak{a}$ شامل غیر مقسوم علیه صفر روی M نیست. در این صورت بنا به نتیجه‌ی ۳۶.۹ از [۱۶]، $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)} \mathfrak{p}$. چون M با تولید متناهی است، پس با توجه به قضیه‌ی ۱۰.۱.۱، $\mathrm{Ass}_R(M)$ متناهی است. بنا به قضیه‌ی ۶۱.۳ از [۱۶]، $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ موجود است که $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ و M زیرمدولی دارد که توسط $\mathfrak{p}$ پوچ می‌شود. در نتیجه $o :_M \mathfrak{a} \neq o$. بنابراین $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \neq o$. که خلاف فرض است. در اینجا اثبات به پایان می‌رسد.

□

۵.۳.۱ گزاره. **فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R است. در این صورت برای هر R—مدول M، مدول $M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ یک مدول $\mathfrak{a}$—بدون تاب است.**

برهان. فرض کنید $m \in M$ و $m + \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \in M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ و فرض کنید $m + \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ توسط توانی از $\mathfrak{a}$ پوچ شود. در این صورت $n \in \mathbb{N}$ موجود است که $\mathfrak{a}^n m \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$. چون $\mathfrak{a}^n m$ زیرمدول با تولید متناهی از $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ است و هر عضو از $\mathfrak{a}^n m$ توسط توانی از $\mathfrak{a}$ پوچ می‌شود، پس $t \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که $\mathfrak{a}^t \mathfrak{a}^n m = o$. در نتیجه $\mathfrak{a}^{n+t} \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ $m \in o :_M$ و لذا $m + \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = o$. □

۶.۳.۱ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و E یک R−مدول انژکتیو است. در این صورت $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E)$ یک R−مدول انژکتیو است.

برهان. به قضیه‌ی ۴.۱.۲ از [۵] مراجعه کنید. □

۷.۳.۱ نتیجه. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و M یک R−مدول $\mathfrak{a}$−تابدار است. در این صورت یک تحلیل انژکتیو برای M موجود است به طوری که، هر جمله‌ی آن یک R−مدول $\mathfrak{a}$−تابدار است.

برهان. به نتیجه‌ی ۶.۱.۲ از [۵] مراجعه کنید. □

۸.۳.۱ تعریف. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R است. برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، i−امین تابعگون مشتق شده‌ی راست تابعگون $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ را با نماد $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان می‌دهیم و آن را i−امین تابعگون کوهمولوژی موضعی نسبت به $\mathfrak{a}$ می‌نامیم. برای هر R−مدول M، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ را i−امین مدول کوهمولوژی موضعی نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ می‌نامیم.

$H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ با روش‌های متفاوتی محاسبه می‌شود. متداول‌ترین روش این است که ابتدا یک تحلیل انژکتیو E° را در نظر می‌گیریم و $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E^\circ)$ را محاسبه می‌نماییم و سپس i−امین همولوژی مدول این همبافت i−امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ است.

روش دیگر محاسبه $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ استفاده از قضیه‌ی زیر است.

۹.۳.۱ قضیه. یکریختی منحصر به فردی از دنباله‌های راست مرتبط از تابعگون‌های همورد به صورت $\Phi_{\mathfrak{a}} = (\phi^i_{\mathfrak{a}})_{i\in\mathbb{N}_\circ} : (\lim_{\longrightarrow_{n\in\mathbb{N}_\circ}} Ext^i_R(R/\mathfrak{a}^n, -))_{i\in\mathbb{N}_\circ} \longrightarrow (H^i_{\mathfrak{a}})_{i\in\mathbb{N}_\circ}$ وجود دارد که توسیعی از هم‌ارزی طبیعی $\phi^\circ_{\mathfrak{a}} : \lim_{\longrightarrow_{n\in\mathbb{N}_\circ}} Hom_R(R/\mathfrak{a}^n, .) \longrightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}$ است. همچنین برای هر R−مدول M و هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، $H^i_{\mathfrak{a}}(M) \cong \lim_{\longrightarrow_{n\in\mathbb{N}_\circ}} Ext^i_R(R/\mathfrak{a}^n, M)$.