دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

موضوع :

نگاشت های حافظ میانگین هندسی عملگرهای مثبت

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

استاد راهنما :

دکتر علی تقوی

استاد مشاور :

دکترعبدالعلی نعمتی

دانشجو :

سلمه باذوق حسن سرایی

شهریور ۱۳۸۹

قدردانی

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که توان تحقیق به من ارزانی داشته، و در تمام مراحل تحصیل و زندگی مرا یاری فرمود. با تشکر از پدر و مادر عزیزم که بی شک نمی توانم جوابگوی لطف و محبت بی دریغ آنها باشم، و در اینجا از همسرم که همراه و مشوق من بوده و خانواده مهربانش کمال تشکر را دارم.لازم می دانم از زحمات بی دریغ و راهنمایی های ارزشمند استاد گرامی ام، جناب آقای دکترعلی تقوی تشکر و قدردانی نمایم و همچنین از استاد مشاور محترمم آقای دکتر عبدالعلی نعمتی کمال تشکر را دارم.

از آقای دکتر محسن علیمحمدی و آقای دکتر ماشاءالله متین فر که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند سپاسگزارم.

همچنین ازجناب آقای ابوالفضل صنمی،از دانشجویان دکترای آقای دکترتقوی، که با صبر و بردباری پاسخگوی سوالات بنده بودند نهایت تشکر و سپاس را دارم .

در پایان نیز از همه عزیزانی که در این امر مر یاری نمودند تشکر می کنم.

تقدیم به

پدر و مادرم

که صلابت و لطافت رفتارشان همیشه برایم زمینه ساز حرکتی نو بوده اند.

همسرم

که در مدت این دو سال صبورانه مشوق و همراهم بوده است.

خانواده همسرم

که محبت خالصانه و بی دریغشان، همیشه برایم دلگرمی و قوت قلب بوده است.

و تمام کسانی که به نحوی در گذشتن از این مرحله به اینجانب از هیچ کمکی دریغ نکردند.

چکیده:

مسائل مربوط به شناخت و بررسی نگاشت هایی که روی جبر عملگرها تعریف می شوند و حافظ ویژگیهای معین و خاصی هستند، مورد توجه نویسندگان زیادی در این زمینه قرار گرفته است. همانطور که می دانیم در چند سال اخیر مجموعه عملگرهای مثبت و میانگین هندسی روی آنها از اهمیت زیادی در نظریه عملگرها برخوردار شده است. همچنین این مفهوم نقش مهمی را در نظریه ماتریسها ایفا می کند و در بخش های خاصی از نظریه کوانتوم کاربردهای مهمی دارد. در این رساله فرم عمومی همه اتومرفیسم های مجموعه عملگرهای مثبت را نسبت به عمل میانگین هندسی توصیف می کنیم و نشان می دهیم که تحت شرایطی، هر چنین نگاشتی به وسیله یک عملگر کراندار معکوس پذیر خطی یا مزدوج- خطی روی فضای هیلبرت مختلط H مشخص می شود.

ابتدا در فصل اول به معرفی جبرها و C^*- جبرها می پردازیم و مفاهیم اولیه و مورد نیاز را مطرح می کنیم.

در فصل دوم به معرفی میانگین هندسی و مفاهیم مورد نیاز در این رساله می پردازیم.

در فصل سوم قضایای مربوط به نگاشت های حافظ میانگین هندسی عملگرهای مثبت را بیان می کنیم و در فصل چهارم میانگین هندسی تعمیم یافته را معرفی کرده و به بررسی نگاشت های همگن مثبت از مرتبه یک که حافظ این میانگین روی $B(H)^+$ می پردازیم.

فهرست مطالب

فصل اول

مروری بر نظریه عملگرها

۱.۱ مقدمه

ما در این فصل برخی تعاریف از جبر خطی را مرور کرده، سپس به بررسی جبرهای باناخ و C^*- جبرها می پردازیم و برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل های بعد را بیان می کنیم.

۲.۱ جبر خطی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F باشد، زیر مجموعه E از X را وابسته خطی گویند، هرگاه $x_1 , \dots , x_n$ ای از E و $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$ ای از F که همگی صفر نباشند موجود باشند، بطوریکه $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. در غیر اینصورت E را مستقل خطی می نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. $Y \subseteq X$ را یک زیر فضای برداری X نامیم، هرگاه خود Y با همان اعمال در X یک فضای برداری باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد، مجموعه $C \subset X$ محدب است اگر برای هر $0 \leq t \leq 1$ داشته باشیم:

$$tC+(1-t)C \subset C .$$

تعریف ۴.۲.۱. بردار β از V یک ترکیب خطی بردارهای α_1 ،...، α_n از V نامیده می شود، هرگاه اسکالرهایی چون c_1 ،...، c_n در میدان F موجود باشند. بطوریکه

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$$

اگر اسکالرهای c_1 ،...، c_n به گونه ای باشند که $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ ، آنگاه بردار β یک ترکیب خطی محدب از V نامیده می شود.

تعریف ۵.۲.۱. گیریم S مجموعه ای از بردارهای فضای برداری V باشد. زیر فضای پدید آمده توسط S، عبارت است از اشتراک W از همه زیر فضاهای V که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه متناهی از بردارها باشد، یعنی $S=\{\alpha_1 ,\dots, \alpha_n\}$ ، W را زیر فضای پدید آمده توسط بردارهای α_1،...،α_n نیز می نامیم.

قضیه ۶.۲.۱. زیر فضای پدید آمده توسط یک زیر مجموعهٔ غیر تهی S از فضای برداری V عبارت است از مجموعهٔ همه ترکیبات خطی بردارهای S. [۱۵]

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه $B\subset X$ را یک پایه برای X نامیم، هرگاه مستقل خطی باشد و X را تولید کند. یعنی هر عضو X به صورت ترکیب خطی متناهی از عناصر B قابل بیان باشد.

تعریف ۸.۲.۱. بعد فضای برداری X ، تعداد عناصر یک پایه X است، و با $\dim X$ نشان داده می شود.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر روی میدان F باشند، تابع T از V در W را یک تبدیل خطی گویند اگر به ازای همه α ها و β ها از V و همه اسکالرهای c از F داشته باشیم:

$$T(c\alpha+\beta)=cT(\alpha)+T(\beta)$$

هرگاه F میدان اعداد مختلط باشد و

$$T(c\alpha+\beta)=\bar{c}\,T(\alpha)+T(\beta)$$

T را مزدوج- خطی می گویند.

مجموعه همه تبدیلات خطی از V در W را با $L(V,W)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر V فضای برداری بر روی میدان F باشد،یک عملگر خطی روی Vعبارت است از تبدیل خطی از V در V .

مثال ۱۱.۲.۱. اگر V یک فضای برداری دلخواه باشد، تبدیل همانی I که با $I\alpha=\alpha$ تعریف می شود یک عملگر خطی روی V است.

مثال ۱۲.۲.۱. فرض کنیم ماتریس $m\times m$ ثابت P با درایه های متعلق به میدان F و ماتریس $n\times n$ ثابت Q بر روی F داده شده باشند. تابع T از فضای $F^{m\times n}$ در خودش را با $T(A) = PAQ$ تعریف می کنیم. در این صورت، T تبدیل خطی از $F^{m\times n}$ در $F^{m\times n}$ است، زیرا

$$
\begin{aligned}
T(cA+B) &= P(cA+B)Q \\
&= (cPA+PB)Q \\
&= cPAQ+PBQ \\
&= cT(A)+T(B).
\end{aligned}
$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس $n\times n$ باشد، اسکالر λ را یک مقدار ویژهٔ A نامند، هرگاه بردار غیرصفر x از $R^{n\times 1}$ (مجموعه ماتریس های $n\times 1$ با درایه های حقیقی) موجود باشد، بطوریکه

$$Ax = \lambda x$$

بردار x که در شرط بالا صدق نماید را بردار ویژهٔ متناظر با مقدار ویژهٔ λ می نامند. همچنین به مجموعه $E_\lambda=\{x : Ax = \lambda x\}$ فضای ویژهٔ متناظر با λ گویند.

قضیه ۱۴.۲.۱. فرض کنید $T:H\to H$ یک عملگر خود الحاق کراندار روی فضای هیلبرت مختلط H باشد، آنگاه بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز، متعامدند. [۱۸]

تعریف ۱۵.۲.۱. عملگر خطی Φ را همگن مثبت از درجه یک می نامیم، هرگاه برای هر عدد حقیقی مثبت λ داشته باشیم:

$$\Phi(\lambda A) = \lambda\Phi(A).$$

۳.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۳.۱. گوییم فضای برداری X یک فضای نرمدار است، اگر به هر $x\in X$ عددی حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$، به نام نرم x ،چنان مربوط باشد که

(الف) به ازای هر x و y در X ، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$؛

(ب) اگر $x\in X$ و c اسکالر باشد، $\|cx\|=|c|\|x\|$؛

(پ) اگر $x\neq 0$ ، $\|x\|>0$.

تعریف ۲.۳.۱. هر فضای نرم دار را می توان یک فضای متری گرفت که در آن فاصله $d(x,y)$ بین x و y مساوی $\|x-y\|$ است. خواص مهم d عبارت است از:

(الف) به ازای هر x و y ،$0\leq d(x,y)<\infty$ ؛

(ب) $d(x,y)=0$ اگر و فقط اگر $x=y$ ؛

(پ) به ازای هر x و y ، $d(x,y)=d(y,x)$ ؛

(ت) به ازای هر x و y و z ، داریم: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

تعریف ۳.۳.۱. یک فضای نرم دار که نسبت به متر تعریف شده به وسیله نرمش تام باشد را فضای باناخ می نامیم؛ این یعنی هر دنباله کوشی در آن باید همگرا باشد.

تعریف ۴.۳.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشند. تبدیل خطی $T:X\rightarrow Y$ را کران دار گویند ، هرگاه عدد حقیقی $k\geq 0$ وجود داشته باشد بطوریکه به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$\|Tx\| \leq k\|x\|.$$

مجموعه همه تبدیلات خطی کران دار از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y یک زیر فضای برداری از $L(X,Y)$ است که آن را با $B(X,Y)$ نشان می دهیم.

نتیجه ۱.۳.۵. اگر X و Y دو فضای نرم دار باشند و $T: X\rightarrow Y$ عملگر خطی باشد، آنگاه T کران دار است، اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.[۲۸]

قضیه۱.۳.۶. فرض کنید X و Y فضاهای نرم دار باشند. به هر $T\in B(X,Y)$ عدد زیر را مربوط می سازیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x\in X, \|x\|\leq ۱\}.$$

این نرم $B(X,Y)$ را تبدیل به یک فضای نرم دار می کند. اگر Y یک فضای باناخ باشد آنگاه $B(X,Y)$ نیز باناخ است. (قضیه ۱.۴. از [۲۴])

تعریف ۱.۳.۷. اگر X و Y دو مجموعه و f تابعی با دامنه $D\subset X$ و برد در Y باشد، آنگاه نمودار f را که با $G(f)$ نشان می دهیم، زیر مجموعه ای از $X\times Y$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$G(f) = \{ (x , f(x)) , x\in D \}$$

تعریف ۱.۳.۸ فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و روی $X\times Y$ توپولوژی حاصلضربی را در نظر بگیرید. اگر f تابعی از $D\subset X$ به Y باشد، آنگاه f را بسته نامیم، اگر گراف f نسبت به توپولوژی حاصلضربی مجموعه ای بسته باشد.

قضیه ۱.۳.۹. اگر X و Y دو فضای متریک و f تابعی از $D\subset X$ به Y باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه f بسته باشد آن است که وضعیت

$$x_n\in D , x_n\rightarrow x , f(x_n) \rightarrow y$$

ایجاب کند که $x\in D$ و $f(x) = y$.

قضیه ۱۰.۳.۱. (گراف بسته). اگر X و Y دو فضای باناخ و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی با نمودار بسته باشد، آنگاه T پیوسته است.

قضیه ۱۱.۳.۱. (نگاشت وارون). فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T \in B(X,Y)$ باشد. اگر T یک به یک و پوشا باشد، آنگاه T^{-1} نیز کران دار و در نتیجه T همانسانی است.

۴.۱ ضرب داخلی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم F میدان اعداد حقیقی یا اعداد مختلط باشد و V فضای برداری بر روی F باشد. یک ضرب داخلی روی V تابعی که به هر جفت مرتب از بردارهای α ، β در V اسکالری چون $<\alpha,\beta>$ در F را طوری اختصاص می دهد که به ازای همه α ها، β ها و γ های در V و همه اسکالرهای c داشته باشیم:

(الف) $<\alpha+\beta,\gamma> = <\alpha,\gamma> + <\beta,\gamma>$ ؛

(ب) $<c\alpha,\beta> = c<\alpha,\beta>$ ؛

(پ) $<\beta,\alpha> = \overline{<\alpha,\beta>}$ ؛ (منظور از $\overline{<\alpha,\beta>}$ مزدوج عدد مختلط $<\alpha,\beta>$ است)

(ت) هر گاه $\alpha \neq 0$ ، $<\alpha,\alpha> > 0$.

تذکر: تابع ضرب داخلی نسبت به متغیر α خطی و نسبت به متغیر β مزدوج-خطی است. مزدوج-خطی نسبت به β یعنی به ازای هر α,β,γ از V و هر c از F داریم:

$$<\alpha,\beta+\gamma> = <\alpha,\beta> + <\alpha,\gamma>$$

و

$$<\alpha,c\beta> = \bar{c}<\alpha,\beta>.$$

تعریف ۲.۴.۱. یک فضای ضرب داخلی عبارت است از یک فضای برداری حقیقی یا مختلط همراه با ضرب داخلی مشخصی روی آن فضا.

تعریف ۳.۴.۱. اگر برای $\beta \in V$ و α داشته باشیم $< \alpha, \beta > = 0$، آنگاه گوییم α عمود بر β است و می نویسیم $\alpha \perp \beta$.

قضیه ۴.۴.۱. برای هر $\alpha \in V$ قرار می دهیم $\|\alpha\| = \sqrt{< \alpha, \alpha >}$، آنگاه

۱) (نامساوی کوشی شوارتز): به ازای هر β و α از V داریم:

$$|< \alpha, \beta >| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\|$$

۲) (نامساوی مثلثی): به ازای هر β و α از V داریم:

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

لذا $\|\alpha\| = \sqrt{< \alpha, \alpha >}$ یک نرم روی V تعریف می کند که آن را نرم تولید شده به وسیله ضرب داخلی می نامیم. [۲۸]

تعریف ۵.۴.۱. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت نامیم، هرگاه H نسبت به نرم تولید شده به وسیله ضرب داخلی یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت مختلط با ضرب داخلی $<.,.>$ باشد. عملگر A را مثبت می نامیم هرگاه $<Ax,x> > 0$، برای هر $x \in H$ و در اینصورت می نویسیم $A > 0$.

تعریف ۷.۴.۱. عملگر A را روی فضای هیلبرت مختلط H با ضرب داخلی $<.,.>$ نیمه معین مثبت نامیم، هرگاه برای هر $x\in H$ ، $<Ax,x> \geq 0$.

تذکر ۸.۴.۱ در برخی کتب تعریف بالا را برای عملگر مثبت و تعریف ۶.۴.۱ را برای عملگر اکیداً مثبت به کار می برند.ما در این رساله عملگر نیمه معین مثبت را بطور خلاصه عملگر مثبت می نامیم و مجموعه همه عملگرهای مثبت روی H را با $B(H)^+$ نمایش می دهیم.

۵.۱ جبر باناخ و *C- جبرها

تعریف ۱.۵.۱. یک جبر مختلط،یک فضای برداری A روی میدان اعداد مختلط C که یک ضرب با ویژگیهای زیر روی آن تعریف می شود:

۱) $x(yz) = (xy)z$ ،

۲) $(x+y)z = xz+yz$, $x(y+z) = xy+xz$ ،

۳) $\alpha (xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

که $x,y,z \in A$ و $\alpha \in C$.

توجه کنید که تمام جبرها را روی میدان اعداد مختلط در نظر می گیریم. همچنین یک جبر را یکدار می نامیم اگر دارای یکه (ضربی) باشد. یکه در صورت وجود منحصر به فرد است. ۱ برای نمایش یکه در یک جبر یکدار به کار می رود.علاوه بر این، جبر A را جابجای گوئیم هرگاه، به ازای هر $x,y \in A$ داشته باشیم $xy=yx$.

تعریف ۲.۵.۱. یک جبر باناخ، جبر یکدار A به همراه یک نرم کامل$\|\ \|$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) $\|1\| = 1$،

۲) به ازای هر $x, y \in A$ ، $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

مثال ۳.۵.۱. فرض کنیم $C(K)$ فضای باناخ تمام توابع پیوستهٔ مختلط بر فضای هاسدورف فشرده ناتهی K با نرم سوپریمم باشد. ضرب را به طریق معمولی تعریف می کنیم:

$$(fg)(p) = f(p)g(p)$$

و این $C(K)$ را به جبر باناخ جابجایی بدل می کند و تابع ثابت با مقدار ۱ عنصر یکه است.

هرگاه K مجموعه ای متناهی مرکب از n نقطه باشد، آنگاه $C(K)$ چیزی جز C^n با ضرب نقطه به نقطه نیست.به خصوص،وقتی $n=1$ ، ساده ترین جبر باناخ، یعنی C، با نرم قدر مطلق به دست می آید.

مثال ۴.۵.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $B(X)$، یعنی جبر تمام عملگرهای خطی کراندار بر X، یک جبر باناخ نسبت به عملگر نرم معمولی است. عملگر همانی I عنصر همانی آن است.پس به وضوح اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $B(H)$ یک جبر باناخ است.

توجه کنید که وقتی $H=C^n$ فضای با بعد متناهی باشد، $B(C^n)$ را می توان با جبر $M_n(C)$ متشکل از تمام ماتریسهای $n\times n$ با درایه های حقیقی مشخص کرد.

تعریف ۵.۵.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ مختلط باشد.$x\in A$ را وارون پذیر گوییم، اگر $y\in A$ وجود داشته باشد، بطوریکه $xy = yx = e$ و y را با x^{-1} نشان می دهیم و آن را وارون x می نامیم. $G(A)$ را مجموعه تمام عناصر وارون پذیر در A در نظر می گیریم. اگر $x,y\in G$ آنگاه $y^{-1}x$ وارون $x^{-1}y$ است. بنابراین $G(A)$ یک گروه ضربی است.

تعریف ۶.۵.۱. یک C^*– جبر، جبر باناخ A به همراه نگاشت $x \to x^*$ بر A است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) برای هر x در A ، $(x^*)^* = x$ ؛

۲) برای هر x , y در A و a,b در C، $(ax + by)^* = \bar{a}\, x^* + \bar{b}\ y^*$

۳) برای هر x , y در A، $(xy)^* = y^*x^*$ ؛

۴) برای هر x در A ، $\|x^*x\|=\|x\|^2$.

هر نگاشت $x\to x^*$ بر یک جبر که در شرایط ۱، ۲ و۳ صدق نماید یک برگشت بر جبر نامیده می شود. عضو x^* را معمولاً الحاق x نامند.

فرض کنید e یکه ضربی در C^*- جبر A باشد، برای هر $x\in A$ داریم:

$$xe^* = (ex^*)^* = x \;; \qquad e^*x = (x^*e)^* = x$$

با توجه به منحصر به فرد بودن یکه در یک جبر ، $e = e^*$.

مثال ۷.۵.۱. $A = C$ با $z^* = \bar{z}$ ساده ترین C^*- جبر است.

مثال ۸.۵.۱ $A = C(K)$ با $f^* = \bar{f}$ یک C^*- جبر جابجایی است.

تعریف ۹.۵.۱. فرض کنید A یک C^*- جبر و x در A باشد،

۱) x را خود الحاق می نامیم اگر $x = x^*$.

۲) x را یکانی گوییم اگر $x^*x = xx^* =1$ یا بطور معادل $x^* = x^{-1}$.

۳) x را نرمال گوییم اگر $x^*x = xx^*$.

۴) x را مثبت نامیم اگر عنصری مانند y در A باشد که $x = y^*y$.

۵) x را تصویر گوییم اگر $x^* = x = x^2$.

نکته۱۰.۵.۱. تصاویر مثبت هستند: زیرا اگر فرض کنیم که $x\in A$ یک تصویر باشد، آنگاه $x^* = x = x^2$. در نتیجه داریم: $x = x^2 = x\, x = x\, x^*$ ، پس اگردر شماره ۴ از تعریف بالا y را همان x بگیریم، آنگاه x مثبت خواهد بود.

نکته۱۱.۵.۱. مثبت ها خود الحاقند: زیرا اگر فرض کنیم $x\in A$ مثبت باشد، آنگاه عنصری مانند y در A وجود دارد بطوریکه $x = y^*y$ ، اکنون داریم: $x^*= (y\, y^*)^* = (y^*)^*\, y^*= y\, y^*= x$ ، در نتیجه بنا به شماره ۱ از تعریف بالاx خود الحاق است.

نکته۱۲.۵.۱. خود الحاق ها نرمالند: زیرا اگر $x\in A$ خود الحاق باشد، پس $x^*= x$، در نتیجه $xx^* = x^*x$ و این یعنی x نرمال است.

قضیه ۱۳.۵.۱. اگر A جبر باناخ با برگشت باشد و $x\in A$، آنگاه

الف) $x + x^*$ ، $i(x - x^*)$ ، xx^* و x^*x خود الحاقند.

ب) هر x دارای نمایش منحصر به فرد $x = h + ik$ است که h و k خودالحاقند، بطوریکه

$$k = \frac{(x-x^*)}{۲i} \quad , \quad h = \frac{(x+x^*)}{۲}$$

ج) فرض کنید $x = h + ik$ که h و k خودالحاقند. آنگاه x نرمال است اگر و تنها اگر $hk = kh$.[۳]

تعریف۱۴.۵.۱. برای عملگرهای خود الحاق $A,B \in B(H)^+$ می نویسیم $A \leq B$ هرگاه،

$$B\text{-}A > 0.$$

تعریف ۱۵.۵.۱. فرض کنید $x,y\in A$ ، x را هم ارز یکانی y گوییم، هرگاه به ازای عنصری یکانی مانند u در A داشته باشیم: $x = uyu^*$.عناصر هم ارز یکانی تمام خواص C^*– جبر یکدیگر را حفظ می کنند.

۶.۱ مشبکه و تصاویر

تعریف ۱.۶.۱. مجموعه جزئا مرتب $(L , \leq)$ را با اعمال دوتایی $\wedge$ (meet) و $\vee$ (join) یک مشبکه می نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in L$ ، شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $a \wedge b = b \wedge a$ و $a \vee b = b \vee a$ ؛

۲) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ و $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ؛

۳) $a \wedge a = a$ و $b \vee b = b$ ؛

۴) $a \wedge (a \vee b) = a$ ؛

۵) $a \vee (a \wedge b) = a$.

در این صورت L را یک مشبکه می نامیم و به صورت $(L , \leq , \wedge , \vee)$ نشان می دهیم.

مثال ۲.۶.۱. اگر X ناتهی باشد، آنگاه $(P(X) , \subseteq , \cup , \cap)$ یک مشبکه است

تعریف ۳.۶.۱. مشبکه L را کامل می نامیم، هرگاه به ازای هر زیر مجموعه دلخواه A از L ، داشته باشیم:

$$(\vee_{a\in A} a) \in L \quad , \quad (\wedge_{a\in A} a) \in L$$

مثال ۴.۶.۱. مجموعه تصاویر روی $B(H)$ با اعمال $P_x\wedge P_y = P_{x\cap y}$, $P_x\vee P_y = P_{\overline{x+y}}$, $P_x^{\perp} = P_{x^{\perp}} = I - P_x$

یک مشبکه کامل است.[۱۷,۷]