پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

عنوان

منحصربفردی جوابهای مسائل اشتورم–لیوویل معکوس با پتانسیل در فضای $L^2(0,a)$ با بکارگیری سه طیف

استاد راهنما

دکتر علی‌اصغر جدیری اکبر فام

استاد مشاور

دکتر محمد چایچی رقیمی

پژوهشگر

فرزاد جوادی

شهریور ۱۳۸۹

بسْمِ اللّهِ الرّحْمنِ الرّحيم

تقدیم به:

همسرم (یگانه افسانه واقعی‌ام)

و تقدیم به:

فرزندان دلبندم (ائلیار و سونیز)

یاد و سپاس

شاید در نگاه اول برای کسی که قبلاً چندین کتاب کمک آموزشی و کنکور تألیف نموده است تهیهٔ پایان‌نامه کار چندان پرزحمتی به نظر نرسد اما باید اعتراف کنم که نوشتن پایان‌نامه عالم دیگری دارد و فضای کار کاملاً متفاوت از فضای نوشتن کتاب آموزشی می‌باشد.

به هرحال این تجربه‌ای شیرین و گرانقیمت بود که به واسطه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد نصیبم گشت. تجربه‌ای که همانند کارهای قبلی‌ام، افراد دیگری نیز در رسیدن به آن نقش بسزایی داشتند. بدینوسیله این پیشگفتار را بهانه قرار داده و از این فرصت استفاده کرده، از یکایک اساتید ارجمندم که طی این سالها افتخار شاگردی آنها را داشته‌ام، تشکر می‌کنم. همچنین از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر جدیری که در تهیهٔ پایان‌نامه از راهنمایی‌های با ارزش ایشان بهره‌مند شده‌ام. از جناب آقای دکتر چایچی استاد مشاور ارجمند تشکر می‌نمایم و نیز از جناب آقای دکتر قنبری که با حضور در جلسهٔ دفاعیه زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند و از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر حسین خیری و آقای محمد شهریاری که با در اختیار گذاشتن برخی از منابع مرا در تنظیم این پایان‌نامه یاری نموده‌اند، کمال تشکر را دارم.

همچنین از دوست و همکار محترم جناب آقای امیر رضازاده نیز که در ترجمهٔ برخی از قسمت‌ها قبول زحمت نمودند نیز سپاسگذاری می‌نمایم.

در خاتمه از آقای مهدی مرشدی که زحمت تایپ این پایان‌نامه در فارسی‌تک را متقبل شدند نیز تشکر می‌کنم.

فرزاد جوادی

شهریور ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: جوادی　　　　نام: فرزاد

عنوان: منحصربفردی جوابهای مسائل اشتورم–لیوویل معکوس با پتانسیل در فضای $L^2(0,a)$ با بکارگیری سه طیف

استاد راهنما

دکتر علی‌اصغر جدیری اکبر فام

استاد مشاور

دکتر محمد چایچی رقیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: آنالیز عددی

دانشکده‌ی علوم پایه　　تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۸۹　　تعداد صفحه: ١٦٨

کلید واژه‌ها: مسائل اشتورم– لیوویل معکوس، طیف، مسائل مقدار مرزی کوشی– گورسات، معادلات PDE

چکیده

یکتایی جوابهای دو مسئله اشتورم–لیوویل معکوس با استفاده از سه طیف بر اساس یکتایی زوج جوابهای مسئله مقدار مرزی گورسات–کوشی نامعین اثبات شده است.

در این پایان‌نامه (فصل ٦) در مورد منحصربفردی تابع پتانسیل برای شرط مرزی دیریکله در یک گره داخلی دلخواه و برای شرط مرزی را بین در یک گره داخلی دلخواه که در گره‌های خارجی شرط مرزی دیریکله در دو وضعیت داریم، بحث می‌کنیم بویژه در اینجا، توابع پتانسیل را متعلق به فضای $L^2(0,a)$ در نظر می‌گیریم.

فهرست مطالب

مقدمه

بی‌شک یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، معادله اشتورم– لیوویل می‌باشد که در علوم مختلف بویژه در فیزیک و مهندسی کاربرد دارد.

معادلات اشتورم– لیوویل به دو نوع مستقیم و معکوس تقسیم می‌شوند. منظور از مسئله اشتورم– لیوویل مستقیم، یافتن مقادیر ویژه و توابع ویژه با معلوم بودن پتانسیل می‌باشد. اما در مسئله عکس اشتورم– لیوویل هدف، پیدا کردن تابع پتانسیل q با معلوم بودن داده‌های طیفی عملگر دیفرانسیل اشتورم لیوویل $L^{(q)}$ می‌باشد. داده‌های طیفی می‌توانند، شکل‌های متفاوتی داشته باشند. که در فصل‌های ۳، ۵ و ٦ به آنها پرداخته خواهد شد.

هر مسئله اشتورم– لیوویل معکوس دارای سه مشخصه یکتایی، وجود و ساختار عددی جواب (که همان پتانسیل q می‌باشد) است.

این پایان‌نامه می‌خواهد در نهایت به این سؤال جواب دهد که اگر سه طیف از یک مسئله اشتورم– لیوویل (با شرایط مرزی متفاوت) معلوم باشد آیا می‌توان یک پتانسیل منحصربفرد روی فضای $L^2(0,a)$ پیدا کرد؟

فصل اول این پایان‌نامه اختصاص به بیان برخی مطالب مقدماتی و تعاریف اولیه دارد.

در فصل دوم توضیح داده می‌شود که چگونه ارتعاش سیمی که در نقاط انتهایی ثابت شده است منجر

به پدید آمدن مسأله اشتورم– لیوویل با شرایط مرزی دیریکله می‌شود، همچنین تعبیر فیزیکی از تابع ضریب در عملگر دیفرانسیل اشتورم– لیوویل و مقادیر ویژه ارائه می‌شود.

فصل سوم به وجود، منحصربفردی و نحوهٔ بدست آمدن تابع پتانسیل q روی بازهٔ $[0, a]$ با یک گرهٔ درونی در نقطهٔ $a_0 = \frac{a}{2}$ با شرایط مرزی دیریکله اختصاص دارد و شرایط و مقدمات اثبات قضیه پیوراچیک (قضیه ۱.۳) را به همراه چند نتیجه کمکی طرح می‌کند.

در فصل چهارم نگاهی به حالتهایی که ممکن است q به طور منحصربفرد پیدا نشود می‌اندازیم و در فصل پنجم حالتهایی دیگر از مسائل اشتورم– لیوویل معکوس را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یعنی حالتی را که در آن گرهٔ داخلی بجای آنکه $\frac{a}{2}$ باشد، هر نقطه‌ای مانند a_0 بین 0 و a می‌تواند باشد و با در نظر گرفتن شرایط دیریکله برای مقادیر ویژه، پتانسیل q در قضیه (۱.۵) را می‌یابیم و در ادامه همان فصل در قضیه (۲.۵) شرایط مرزی دیریکله رابین را در نظر گرفته و باهم پتانسیل منحصربفرد q را می‌یابیم.

و نهایتاً در فصل ٦ به کمک سه طیف تابع پتانسیل q را روی فضای $L^2(0, a)$ با یک گرهٔ درونی a_0 با مقادیر ویژهٔ دیریکله (در قضیه (۲.٦)) و با شرایط مرزی رابین در نقطهٔ a_0 (در قضیه (۳.٦)) پیدا می‌کنیم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و تعاریف اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل

معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.

منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که در معادله صدق می‌کند.

۲.۱ معادله دیفرانسیل معمولی

تعریف ۱.۱ معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود.

نکته ۲.۱ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام بصورت

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

یا

$$y^{(n)} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

می‌باشد.

تعریف ۱.۳ مرتبه بالاترین مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله دیفرانسیل می‌نامند.

تعریف ۱.۴ معادله دیفرانسیل به شکل

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = Q(x)$$

را معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه n گویند.

نکته ۱.۵ صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول به فرم

$$y' + p(x)y = q(x)$$

می باشد، که جواب آن به کمک رابطهٔ

$$y = e^{-\int p(x)d(x)}\left[\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

بدست می آید.

۱.۳ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

اگر در معادله دیفرانسیل بیش از یک متغیر مستقل وجود داشته باشد آن را معادلهٔ دیفرانسیل جزئی می‌نامند.

به عنوان مثال یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با دو متغیر مستقل x و t به صورت

$$L(u) = F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0$$

نوشته می‌شود. که شامل متغیرهای مستقل x و t، تابع مجهول u وابسته به این متغیرها و مشتقات جزئی u_x و u_t و u_{xx} و u_{xt} و u_{tt} از تابع u می‌باشد. هدف ما، تعیین تابعی مانند $u = u(x,t)$ است که در معادله و دامنه D صدق کند. چنین توابعی در صورت وجود، جوابهای معادله نامیده می‌شوند.

تعریف ۶.۱ یک عملگر دیفرانسیل جزئی، خطی نامیده می‌شود اگر در حالت کلی داشته باشیم:

$$\forall u_1, u_2 : L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L(u_1) + c_2L(u_2)$$

که c_1 و c_2 ثابت هستند.

این حالت را می‌توانیم برای تعداد متناهی عملگر نیز تعمیم دهیم:

اگر $u_1, u_2, ..., u_k$ توابع و $c_1, c_2, ..., c_k$ ثابتها باشند، آنگاه:

$$L\left(\sum_{j=1}^{k} c_ju_j\right) = \sum_{j=1}^{k} c_jL[u_j]$$

تعریف ۷.۱ منظور از $C^m[a,b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a,b]$ هستند که تا مرتبه m ام مشتق‌پذیر بوده و پیوسته باشند.

تعریف ۸.۱ تابع f را در نقطهٔ t_0 تحلیلی گویند هرگاه تمام مراتب مشتق آن حول نقطه t_0 موجود باشد. به عبارت دیگر دارای بسط تیلور در نقطهٔ t_0 باشد.

نکته ۹.۱ تابع f را در بازهٔ $[a,b]$ تحلیلی گویند هرگاه در هر نقطه واقع در درون این بازه تحلیلی باشد.

تعریف ۱۰.۱ اگر علاوه بر معادله دیفرانسیل داده شده، مقدار y و مشتقات متوالی آن در نقطهٔ $x = x_0$ معین باشند، آن را مسئله مقدار اولیه می‌گویند.

قضیه ۱۱.۱ قضیه تیلور: اگر تابع f در همسایگی نقطهٔ x_0 مشتق مرتبه $(n+1)$ ام متناهی داشته باشد، در این صورت مقدار f در هر نقطه x متعلق به این همسایگی به صورت

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + ... + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n(x)$$

بدست می آید که در آن

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

و

$$f^{(k)}(x_0) = \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x=x_0}$$

و ξ نقطه‌ای بین x_0 و x است.

نکته ۱۲.۱ سری تیلور در نقطهٔ $x_0 = 0$، سری مکلورن نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱ فضای کامل یا تام، فضایی است که هر دنباله کشی در آن، همگرا باشد.

تعریف ۱۴.۱ هرگاه یک فضا مانند H یک فضای متری تام باشد. آنگاه H یک فضای هیلبرت است.

۴.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم

معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه دوم روی بازه حقیقی I به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (۱-۱)$$

که a_0 و a_1 و a_2 و f توابع مختلط روی I هستند.

هرگاه روی I، $f=0$ باشد معادله را همگن گویند در غیر این صورت ناهمگن نامیده می‌شود.

هر تابع (مختلط) $\phi \in C^2(I)$ یک جواب معادله (۱—۱) می‌باشد هرگاه با جایگذاری ϕ بجای y برای $\forall x \in I$ داشته باشیم:

$$a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x)$$

اگر عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم $a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$ را با L نشان دهیم، معادله (۱—۱) بفرم $Ly = f$ نوشته می‌شود. عملگر L خطی است، یعنی برای هر دو تابع $\psi \in C^2(I)$ و φ و هر دو مقدار ثابت $c_1, c_2 \in C$ داریم:

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 L\phi + c_2 L\psi$$

بنابراین (۱—۱) یک معادله دیفرانسیلی خطی نامیده می‌شود.

ویژگی اساسی معادلات همگن خطی این است که ترکیب خطی هر جوابی از معادله، خود یک جواب می‌باشد. زیرا اگر φ و ψ در شرایط $L\varphi = 0$ و $L\psi = 0$ صدق کنند به وضوح برای هر ثابت c_1 و c_2 داریم:

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1 L\varphi + c_2 L\psi = 0$$

۵.۱ توابع متعامد

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید توابع f و g بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع r بر بازه (a,b) پیوسته مثبت باشد، حاصلضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن r توسط انتگرال $\int_a^b r(x)f(x)\bar{g}(x)dx$ تعریف کرده و با نماد $\langle f,g \rangle$ مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۶ دو تابع f و g را نسبت به تابع وزن $r>0$ متعامد گویند هرگاه $\langle f,g\rangle=0$

تعریف ۱.۱۷ حاصلضرب داخلی تابع f با خودش، یعنی $\langle f,f\rangle=\int_a^b r(x)|f(x)|^2dx$ نامنفی است، زیرا $|f(x)|\geq 0$، $r(x)>0$ است. نرم f را با $\|f\|$ نمایش می دهیم که با رابطهٔ $\|f\|=\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$ مشخص می‌شود، اگر f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد نرم آن صفر است اگر و تنها اگر f تابع صفر باشد.

تعریف ۱.۱۸ دنباله توابع $\left\{\psi_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ را یک دنباله متعامد گوییم اگر این توابع دوبه‌دو نسبت به‌هم متعامد باشند یعنی اگر $n\neq m$، آنگاه $\langle\psi_n,\psi_m\rangle=0$

۱.۶ فضای هیلبرت

هرگاه $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$، و فاصله بین x و y را با $\|x-y\|$ تعریف کنیم، در این صورت $\|x-y\|$ در اصول فضای متری صدق می‌کند بنابراین H با این متر، یک فضای متریک است.

تعریف ۱.۱۹ فضای ضرب داخلی تام (کامل)، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

مثال ۱.۲۰ فضای L_2 متشکل از دنباله‌های $x=(\xi_i)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)$ از اعداد مختلط به طوری که $\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j.\bar{\xi_j}$ متناهی باشد و ضرب داخلی بین دو عضو $x=(\xi_i)$ و $y=(\eta_i)$ بصورت $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j.\bar{\eta_j}$ تعریف می‌شود یک فضای هیلبرت است.

مثال ۱.۲۱ فضای $L_2[a,b]$ متشکل از توابع مختلط اندازه‌پذیر لبگ بر $[a,b]$ که ضرب داخلی بین دو تابع مختلط f و g به صورت $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$ تعریف می‌شود، یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱.۲۲ تابعی را که در تمام صفحهٔ مختلط تحلیلی باشد، تابع تام گویند.

۷.۱ معرفی نمادهای $\mathcal{O}, o$

تعریف ۲۳.۱ اگر دو تابع f و g با متغیرهای مختلط با دامنه مشترک D باشند در این صورت گوییم $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ هرگاه عدد k ی مثبت و $\delta > 0$ موجود باشد به طوریکه:

$$\forall z : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f| < k|g|$$

و یا

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = k$$

گوییم $f(z) = o(g(z))$ هرگاه:

$$\forall z \forall \varepsilon \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f| < \varepsilon|g|$$

و یا

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 0$$

و همچنین f هم‌ارز g است هرگاه:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 0$$

تعریف ۲۴.۱ دنباله متناهی یا نامتناهی از توابع $\{\varphi_n(z)\}$ را در نظر می‌گیریم، این دنباله را دنباله مجانبی گوییم هرگاه:

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)) \quad ، \quad z \to z_0$$

به عبارت دیگر:

$$\lim \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = 0 \quad , \quad z \to z_0$$

تذکر ۲۵.۱ تعریف وقتی برقرار است که هیچ صفری از $\varphi_n(z)$ در همسایگی از z_0 قرار نداشته باشد.

تعریف ۲۶.۱ اگر دنباله $\{\varphi_n(z)\}$ یک دنباله مجانبی از توابع باشد گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(z)$ (a_n ها ثابت هستند)، یک بسط مجانبی یا تقریب مجانبی از $f(z)$ است هرگاه برای هر N داشته باشیم:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(z) + o(\varphi_N(z)) \quad , \quad z \to z_0$$

همچنین می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n\varphi_n(z) + o(\varphi_N(z)) \quad , \quad z \to z_0$$

۸.۱ معادلات اشتورم — لیوویل

تعریف ۲۷.۱ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u = g(x) \qquad (۱-۲)$$

را بر بازهٔ $[a,b]$ در نظر می‌گیریم فرض کنیم توابع A و A' و B و C و g به ازای هر $x \in [a,b]$ پیوسته باشند و $A(x) > 0$. در این صورت معادلهٔ (۱−۲) را فرم کلی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم منظم گویند، اگر $A' = B$ آنگاه معادلهٔ (۱−۲) را می‌توان به صورت

$$\frac{d}{dx}\left[A(x)\frac{du}{dx}\right] + C(x)u = g(x) \qquad (۱-۳)$$

نوشت. معادلهٔ (۱—۳) صورت الحاقی معادلهٔ (۱—۲) نامیده می‌شود. با فرض‌های مشابه تعریف بالا در مورد C و B و A معادلهٔ (۱—۲) را همیشه با تغییر متغیرهای زیر می‌توان به صورت (۱—۳) تبدیل کرد که با ضرب دو طرف معادلهٔ (۱—۲) به $\frac{1}{A}e^{\int \frac{B}{A}dx}$ آن به معادلهٔ

$$Lu = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = f(x) \tag{۱—۴}$$

تبدیل می‌شود که در آن

$$p(x) = e^{\int \frac{B}{A}dx} \qquad q(x) = \frac{c}{A}p(x) \qquad f(x) = \frac{g}{A}p(x)$$

واضح است، با فرض‌هایی که برای A و A' و B و C در نظر گرفتیم توابع p و p' و q و f در $[a,b]$ پیوسته‌اند و $p(x) > 0$ است. معادلهٔ (۱—۴) به مسئله اشتورم — لیوویل منظم معروف است. اگر در معادلهٔ (۱—۴) به جای $f(x)$ تابع $\lambda\sigma(x)u$ قرار دهیم مسأله اشتورم — لیوویل در حالتهای خاص که در زیر بحث می‌شود مقادیر ویژه و توابع ویژه خواهد داشت.

۹.۱ مقادیر ویژهٔ مسأله اشتورم — لیوویل

تعریف ۲۸.۱ مقادیر ویژهٔ مسأله اشتورم — لیوویل برای $\varphi(x)$ روی دامنه $x \in [a,b]$ بوسیلهٔ معادله زیر

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] + q(x)\varphi + \lambda\sigma(x) = 0 \tag{۱—۵}$$

با شرایط مرزی

$$\sin(\alpha)\varphi(a) + \varphi(\alpha)\varphi'(a) = 0$$

$$\sin(\beta)\varphi(b) + \varphi(\beta)\varphi'(b) = 0 \tag{۱—۶}$$