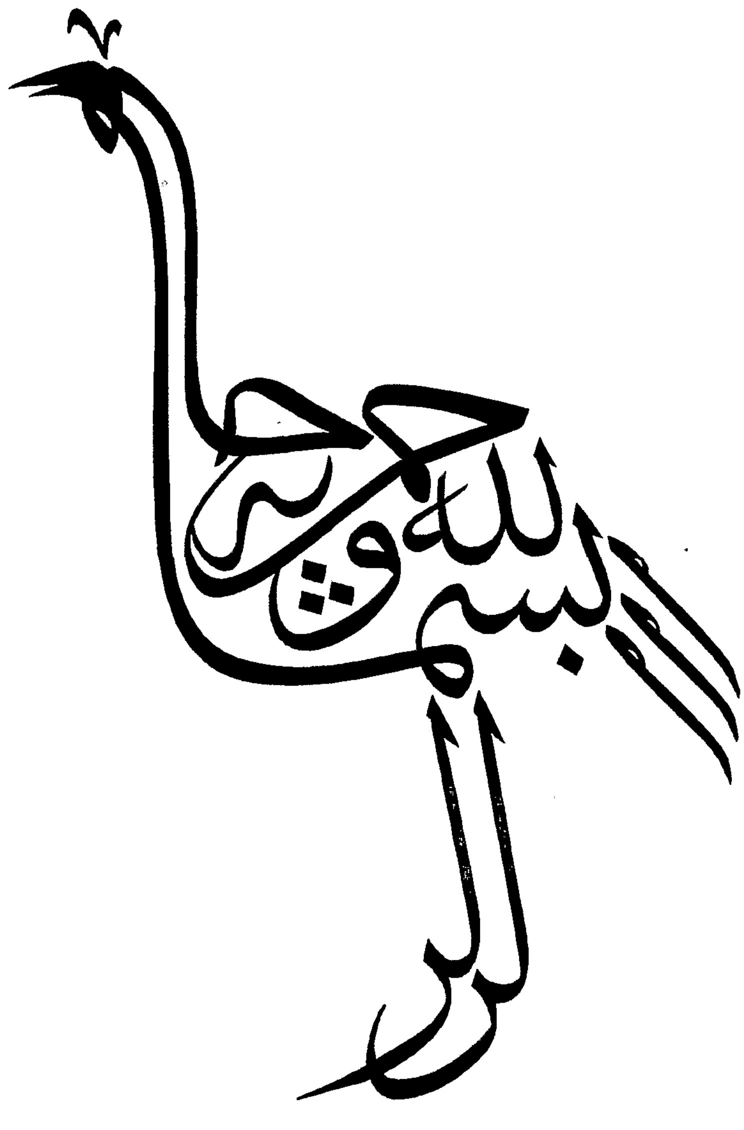

١٥٤٥٩١

دانشگاه پیام نور

مرکز مشهد

گروه ریاضی

عنوان پایان‌نامه:

تعمیمی از مسئله هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی‌ارشد در رشته ریاضی محض

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر کاظم خشیارمنش

نگارش:

سودابه حسن‌زاده

شهریور ۱۳۸۵

صورتجلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : تعمیمی از هم متناهی بودن مدولهای کوهمولوژی موضعی

که توسط سودابه حسن زاده **دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته** ریاضی محض

مرکز مشهد **تهیه و به هیات داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد**

تاریخ دفاع : ۲۵ / ۶ / ۸۵ **نمره :** ۱۹ (نوزده تمام) **درجه ارزشیابی :** عالی

اعضای هیات داوران :

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر [illegible]	استاد راهنما	دانشیار	
۲-	استاد راهنمای همکار یا مشاور		
۳- دکتر [illegible]	استاد ممتحن	استادیار	
۴- دکتر [illegible]	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تغییرات لازم :

تقدیم به پدر ومادر عزیزم

آنهایی که از صمیم قلب دوستشان دارم و موفقیت و سر بلندی امروزم را مدیون سالها زحمات و فداکاریهای این عزیزان هستم .

تقدیر و تشکر :

بسی شایسته است که ابتدا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر خشیار منش ابراز دارم زیرا که با راهنماییهای خویش کار تحقیق و تفحص در مورد مطالب این مقاله را بر من آسان نموده و با صبر و حوصله فراوان به سئوالات و ابهامهای موجود جوابهای روشن و صریح دادند و برای تمامی اساتید محترم و بقیه عزیزانی که ذکر نام آنها در مقال نمی گنجد ولی هر کدام از آنها نقش موثری در اتمام این دوره از تحصیلاتم داشته اند آرزوی توفیق و بهروزی دارم .

چکیده

هرگاه I ایده‌آلی از حلقه نوتری R باشد مدولی مانند M را R—مدول I—هم‌متناهی گوییم هرگاه $\operatorname{Supp}(M) \subseteq V(I)$ و بعلاوه برای هر $i \geq 0$، $\operatorname{Ext}^i_R(\frac{R}{I}, M)$ متناهی باشد، در این مقاله نخست تعمیمی برای این مفهوم ارائه می‌دهیم و سپس بررسی حالاتی می‌پردازیم که این تعمیم برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی صادق باشد، در این راستا نشان می‌دهیم کوهمولوژی موضعی ایده‌آل تولید شده توسط d—رشته‌های بدون شرط قوی در شرط هم متناهی بودن صدق می‌کند.

می‌دانیم که اگر I ایده‌آلی از R و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد که R یک حلقه موضعی منظم تام باشد آنگاه $H^i_I(M)$ در دو حالت زیر R—مدول I—هم‌متناهی است.

الف) I یک ایده‌آل اصلی غیر صفر باشد.

ب) I یک ایده‌آل اول با بعد یک باشد.

فرض کنید ϕ یک مجموعه غیر تهی از ایده‌آل‌های R باشد، ϕ یک دستگاه از ایده‌آل‌های R نامیده می‌شود اگر $I, I' \in \phi$، آنگاه $J \in \phi$ وجود دارد بطوریکه $J \subseteq II'$. برای هر R—مدول M تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_\phi(M) = \{x \in M \ , \ \ Jx = 0 \ \ \exists J \in \phi\}$$

Γ_ϕ یک تابعگون R—خطی جمعی و همورد و دقیق چپ از $\mathcal{C}(R)$ به خودش است.

Γ_ϕ تابعگون ϕ—تاب نامیده می‌شود. ($\mathcal{C}(R)$ کتگوری همه R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها را نشان می‌دهد.)

برای هر $i \geq 0$، i—امین تابعگون مشتق شده راست از Γ_ϕ بوسیله H^i_ϕ نشان داده می‌شود.

پس همانگونه که بیان شد هدف این مقاله ارائه تعمیمی برای مسأله هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی به کمک دستگاه‌های ایده‌آلی است.

فهرست

۰ مقدمات

۱ تابعگون‌های تابی و مدول‌های کوهمولوژی موضعی

۲ مدول‌های تابی و ایده‌آل مبدل

۳ تعمیم تابعگون‌های ایده‌آل مبدل و کوهمولوژی موضعی

۴ دنباله‌ها

فصل صفر

مقدمات

۱.۰ مطالبی از جبر جابجایی

مطالب این بخش به طور عمده از کتاب‌های [18] و [19] آورده شده است.

در سراسر این فصل R نشان‌دهنده یک حلقه جابجایی و یکدار و غیربدیهی و M یک R—مدول است.

تعریف ۱.۱.۰ فرض کنید N و L دو زیر مدول از R—مدول M باشند، دراین‌صورت $\{a \in R | aL \subseteq N\}$ یک ایده‌آل از R است که آن را خارج‌قسمت N بر L می‌نامیم و با $(N \underset{R}{:} L)$ نمایش می‌دهیم.

حالتهای خاص

۱) اگر $\underline{b}$ و $\underline{c}$ دو ایده‌آل از R باشند، دراین‌صورت آنها را می‌توانیم به عنوان دو زیرمدول از R—مدول R در نظر بگیریم، لذا $(\underline{b} \underset{R}{:} \underline{c})$ نیز قابل تعریف است.

۲) اگر N را زیرمدول صفر در نظر بگیریم، دراین‌صورت $(0 \underset{R}{:} L)$ را پوچساز L نامیده، و با $\mathrm{Ann}_R(L)$ یا $\mathrm{Ann}(L)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۰ فرض کنید N یک زیرمدول از M و I یک ایده‌آل از R باشند، دراین‌صورت مجموعه $\{m \in M : \mathrm{Im} \subseteq N\}$ یک زیرمدول از M می‌باشد که آن را با $(N \underset{M}{:} I)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۰ زیرمدول‌های تولید شده توسط یک مجموعه

تعریف ۱.۲.۰ اگر X یک زیرمجموعه دلخواه از M باشد، آنگاه اشتراک تمام زیرمدول‌های M که شامل X هستند، یک زیرمدول از M می‌باشد که آنرا زیرمدول تولیدشده توسط X می‌نامیم و با (X) نمایش

می‌دهیم.

اگر $X \neq \emptyset$، دراین‌صورت (X) به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(X) = \{m \in M | \exists n \in \mathbb{N}, a_۱, a_۲, \ldots, a_n \in R\,,\ x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in X \ s.t.\ m = \sum_{i=۱}^{n} a_i x_i\}$$

تعریف ۲.۲.۰

۱) R—مدول M را با تولید متناهی گوییم، هرگاه مجموعه متناهی X موجود باشد که $M = (X)$.

۲) اگر $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک خانواده از زیرمدول‌های M باشد، زیرمدول تولیدشده توسط $\bigcup_{\alpha \in I} N_\alpha$ را مجموع زیرمدول‌های N_α نامیده و با $\sum_{\alpha \in I} N_\alpha$ نمایش می‌دهیم. در حالتیکه I متناهی باشد

$$\sum_{i=۱}^{r} N_i = \{n_۱ + n_۲ + \cdots + n_r | n_i \in N_i, i = ۱, ۲, \ldots, r\}$$

۳) هرگاه $X \subseteq R$، R—زیرمدول تولید شده توسط X، یک ایده‌آل از R است که آن‌را ایده‌آل تولیدشده توسط X می‌نامیم.

۳.۰ حلقه و مدول کسرها

تعریف ۱.۳.۰ $S \subseteq R$ را بسته ضربی گوییم، هرگاه $۱_R \in S$ و برای هر $s_۱, s_۲ \in S$ داشته‌باشیم $s_۱ s_۲ \in S$.

لم ۲.۳.۰ فرض کنید M یک R—مدول و $S \subseteq R$ بسته ضربی باشد، دراین‌صورت رابطه زیر یک رابطه هم‌ارزی در $M \times S$ است

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \exists t \in S \ \ s.t.\ \ t(s'm - sm') = ۰$$

تعریف ۳.۳.۰ با نمادگذاری‌های لم قبل، رده هم‌ارزی (m,s) را به صورت $\frac{m}{s}$ نشان می‌دهیم و مجموعه همه رده‌های هم‌ارزی را، با $S^{-1}M$ نشان می‌دهیم.

چون R یک R—مدول است پس $S^{-1}R$ نیز قابل ساخت است. برای هر $\frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in S^{-1}R$ اعمال جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{as'+a's}{ss'} \qquad (\text{جمع})$$
$$\frac{a}{s}\cdot\frac{a'}{s'}=\frac{aa'}{ss'} \qquad (\text{ضرب})$$

می‌توان دید که اعمال فوق خوش‌تعریف هستند و $S^{-1}R$ با این اعمال یک حلقه جابجایی و یکدار است. $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای R نسبت به S می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۰ با نمادهای تعریف (۳.۳.۰)، در $S^{-1}M$ اعمال زیر را تعریف می‌کنیم

$$\frac{m}{s}+\frac{m'}{s'}=\frac{s'm+sm'}{ss'} \qquad (\text{جمع})$$
$$\frac{a}{s}\cdot\frac{m'}{s'}=\frac{am'}{ss'} \qquad (\text{ضرب})$$

دراین‌صورت $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$ مدول می‌باشد.

نمادگذاری ۵.۳.۰ هرگاه $S=R-p$ که در آن p یک ایده‌آل اول از R است، در این حالت $S^{-1}M$ و $S^{-1}R$ را به‌ترتیب با نمادهای M_p و R_p نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۳.۰ برای هر R—مدول M، مجموعه $\{p \in \operatorname{Spec}(R) | M_p \neq 0\}$ را تکیه‌گاه M نامیم و با نماد $\operatorname{Supp}(M)$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید

$$\operatorname{Supp}(M)=\{p\in\operatorname{Spec}(R)|\exists m\in M \ s.t.(0 \underset{M}{:} m)\subseteq p\}$$

۴.۰ ایده‌آل‌های اول وابسته به یک ایده‌آل

تعریف ۱.۴.۰ فرض کنید I یک ایده‌آل از R باشد، دراین‌صورت $\{p \in \mathrm{Spec}(R) | I \subseteq p\}$ را واریته I می‌نامیم و با $V(I)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه هر عنصر کمین $V(I)$ نسبت به رابطه $\subseteq$ را یک ایده‌آل اول کمین I می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۰ فرض کنید I یک ایده‌آل از R باشد، رادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sqrt{I} = \{x \in R | \exists n \in \mathbb{N} \ \ s.t. \ \ x^n \in I\}$$

قضیه ۳.۴.۰ فرض کنید I و J دو ایده‌آل از حلقه R باشند، دراین‌صورت روابط زیر برقرار است

۱) $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$.

۲) $V(I) = V(\sqrt{I})$.

۳) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

تعریف ۴.۴.۰ ایده‌آل سره q از R را اولیه می‌نامیم هرگاه $xy \in q$ آنگاه $x \in q$ یا $y \in \sqrt{q}$.

تعریف ۵.۴.۰ اگر q ایده‌آل اولیه R باشد آنگاه $\sqrt{q}$ کوچکترین ایده‌آل اول شامل q است، حال فرض کنید $p = \sqrt{q}$ دراین‌صورت q را یک ایده‌آل pـ‌اولیه می‌نامیم.

تعریف ۶.۴.۰ فرض کنید I یک ایده‌آل سره از R باشد، هرگاه I را بتوان به‌صورت مقطع تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اولیه R بیان کنیم، یعنی $I = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ و q_iها همگی اولیه باشند، آنگاه I را تجزیه شدنی می‌نامیم و این تجزیه را یک تجزیه اولیه برای I می‌نامیم.

تجزیه اولیه فوق را کمین گوییم، هرگاه دارای خواص زیر باشد

۱) تمام ایده‌آل‌های اول $\sqrt{q_1}$، $\sqrt{q_2}$، $\cdots$ و $\sqrt{q_n}$ متمایز باشند.

۲) هیچ q_i، در این مقطع قابل حذف نباشد، یعنی $I \neq \bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_j$ و یا $\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} q_j \not\subset q_i$.

تعریف ۷.۴.۰ حلقه R را نوتری گوییم، هرگاه در یکی از سه شرط معادل زیر صدق کند.

۱) هر رشته صعودی از ایده‌آل‌های R سرانجام ایستا باشد.

۲) هر مجموعه غیرتهی از ایده‌آل‌های R نسبت به رابطه «$\subseteq$» دارای یک عضو بیشین باشد.

۳) هر ایده‌آل از R با تولید متناهی باشد.

قضیه ۸.۴.۰ اگر R یک حلقه نوتری باشد، آنگاه

۱) هر ایده‌آل سره R، یک تجزیه اولیه و لذا یک تجزیه اولیه کمین دارد.

۲) هر ایده‌آل R شامل توانی از رادیکال خودش می‌باشد.

۵.۰ ایده‌آل‌های اول وابسته به یک مدول

تعریف ۱.۵.۰ فرض کنید M یک R—مدول باشد، $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر روی M می‌نامیم، هرگاه $\circ \neq m \in M$ موجود باشد که $am = \circ$.

مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های صفر M را با $Z(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۵.۰ فرض کنید M یک R—مدول باشد، $p \in \mathrm{Spec}(R)$ را یک ایده‌آل اول وابسته به M نامیم هرگاه $x \in M$ موجود باشد که $\mathrm{Ann}(x) = p$.

مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به M را با $\operatorname{Ass}(M)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Supp}(M)$.

قضیه ۳.۵.۰ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک R—مدول باشد، دراین‌صورت

$$Z(M) = \bigcup_{P \in \operatorname{Ass}(M)} P$$

قضیه ۴.۵.۰ فرض کنید R نوتری و M یک R—مدول با تولید متناهی باشد، دراین‌صورت $\operatorname{Ass}(M)$ یک مجموعه متناهی است.

قضیه ۵.۵.۰ فرض کنید R یک حلقه نوتری و $S \subseteq R$ مجموعه بسته ضربی باشد، دراین‌صورت

$$\operatorname{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}P | P \in \operatorname{Ass}(M), P \cap S = \emptyset\}$$

در نتیجه برای هر $p \in \operatorname{Spec}(R)$،

$$\operatorname{Ass}_{R_p}(M_p) = \{q_p | q \in \operatorname{Ass}(M), q \subseteq p\}$$

قضیه ۶.۵.۰ فرض کنید $n \geq 2$، p_1، p_2، $\cdots$ و p_n ایده‌آل‌هایی در R باشند که همگی به جز احتمالاً دو تا از آنها اولند و I ایده‌آلی از R باشد که $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ دراین‌صورت یک $1 \leq j \leq n$ وجود دارد که $I \subseteq p_j$.

قضیه ۷.۵.۰ اگر N یک R—مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه

۱) $\operatorname{Ann}(N) = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ann}(n_i)$ که در آن $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ یک مجموعه مولد N هستند.

۲) $\operatorname{Supp}(N) = V(\operatorname{Ann}(N))$.

قضیه ۸.۵.۰ فرض کنید L یک R—مدول با تولید متناهی باشد و N یک R—مدول دلخواه باشد آنگاه داریم

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}(L,N)) \simeq \mathrm{Supp}(L) \cap \mathrm{Ass}(N)$$

۶.۰ مطالبی از جبر همولوژیک

مطالب این بخش عمدتاً از [20] آورده شده است.

تعریف ۱.۶.۰ فرض کنید $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ یک رشته از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها باشد، این رشته را یک صفر رشته گوییم هرگاه $g \circ f = 0$. به‌عبارت دیگر $\mathrm{Im}\, f \subseteq \ker g$ و آن‌را یک رشته دقیق گوییم هرگاه $\mathrm{Im}\, f = \ker g$.

تعریف ۲.۶.۰ یک همبافت عبارتست از یک رشته از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها به‌صورت زیر

$$X^{\bullet} : \cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^{n} \xrightarrow{d^{n}} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

که برای هر $n \in \mathbb{Z}$، رشته $X^{n-1} \to X^{n} \to X^{n+1}$ یک صفر رشته است.

در همبافت $X^{\bullet}$، برای هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم $H^{n}(X^{\bullet}) = \frac{\ker d^{n}}{\mathrm{Im}\, d^{n-1}}$ و آن‌را n—امین همولوژی همبافت $X^{\bullet}$ می‌نامیم.

همبافت $X^{\bullet}$ را دقیق گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $X^{n-1} \to X^{n} \to X^{n+1}$ دقیق باشد. به‌عبارت‌دیگر برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $H^{n}(X^{\bullet}) = 0$.

قضیه ۳.۶.۰ فرض کنید

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ N' & \to & N & \to & N'' & & \end{array}$$

یک نمودار جابجایی از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها باشد، به‌طوریکه سطر بالا دقیق و سطر پایین یک صفر رشته است، دراین‌صورت همریختی منحصربفرد $M'' \to N''$ موجود است که جابجایی بودن نمودار را حفظ می‌کند.

حکم فوق برای نمودار زیر نیز در صورت داشتن شرایط برقرار است

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & N'' & \to & N & \to & N' \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & M'' & \to & M & \to & M' \end{array}$$

تعریف ۴.۶.۰ رشته دقیق $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها را شکافنده گوییم، هرگاه یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد.

۱) R—همریختی $h : M'' \to M$ موجود باشد که $gh = id_{M''}$.

۲) R—همریختی $w : M \to M'$ موجود باشد که $wf = id_{M'}$.

۳) $M \cong M' \oplus M''$.

۷.۰ کتگوری‌ها و تابعگون‌ها

تعریف ۱.۷.۰ کتگوری $\mathcal{C}$ را جمعی (R—خطی) می‌نامیم، هرگاه برای هر دو شی E و F از $\mathcal{C}$ مجموعه $\mathrm{Hom}(E, F)$ دارای ساختار گروه جمعی (R—مدولی) باشد.

تعریف ۲.۷.۰ فرض کنید $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ یک تابعگون باشد که در آن $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ کتگوری‌های جمعی‌اند، F را جمعی گوییم هرگاه برای هر $f, g \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$ داشته باشیم

$$F(f+g) = F(f) + F(g)$$

هرگاه $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ کتگوری‌های R—خطی و F یک تابعگون جمعی باشد و برای هر اسکالر $\alpha \in R$ ، $F(\alpha f) = \alpha F(f)$، دراین‌صورت F را یک تابعگون R—خطی می‌نامیم.

قضیه ۳.۷.۰ فرض کنید $T : \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(R')$ یک تابعگون جمعی و $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک رشته شکافنده از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها باشد، دراین‌صورت

۱) $0 \to T(M') \to T(M) \to T(M'') \to 0$ یک رشته شکافنده است، هرگاه T هموورد باشد.

۲) $0 \to T(M'') \to T(M) \to T(M') \to 0$ یک رشته شکافنده است، هرگاه T پادوورد باشد.

تعریف ۴.۷.۰ فرض کنید $\mathcal{C}(R)$ و $\mathcal{C}(R')$ کتگوری‌های مدول‌ها و همریختی‌ها روی حلقه‌های R و R' باشند، تابعگون $T : \mathcal{C}(R') \to \mathcal{C}(R)$ را یک تابعگون دقیق می‌نامیم، هرگاه اگر $M' \to M \to M''$ یک رشته دقیق از R—مدول‌ها و R—همریختی‌ها باشد، آنگاه

$$T(N, M') \to T(N, M) \to T(N, M'')$$

دقیق باشد، دراین‌صورت T هموورد دقیق است. یا

$$T(M'', N) \to T(M, N) \to T(M', N)$$

دقیق باشد که دراین‌صورت T پادوورد دقیق است.

تعریف ۵.۷.۰ با مفروضات بالا، هرگاه $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک رشته دقیق باشد، اگر رشته‌های

$$T(M'', N) \to T(M, N) \to T(M', N) \to 0$$

و

$$T(N, M') \to T(N, M) \to T(N, M'') \to 0$$

دقیق باشند، دراین‌صورت T را یک تابعگون دقیق راست می‌نامیم.

تابعگون‌های دقیق چپ به طور مشابه تعریف می‌شوند.

قضیه ۶.۷.۰

۱) $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ یک تابعگون دو متغیره، جمعی، R—خطی، دقیق چپ، هموردِ روی مؤلفه دوم و پادورد روی مؤلفه اول است.

۲) $S^{-1}(-)$ یک تابعگون هموورد، جمعی و دقیق است، که در آن $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه بسته ضربی است.

قضیه ۷.۷.۰ تابعگون $\mathrm{Hom}_R(R,-)$ و تابعگون همانی روی کتگوری R—مدول‌ها یکریخت‌اند (یعنی برای هر R—مدول M، $\mathrm{Hom}_R(R,M) \cong M$).

تعریف ۸.۷.۰ فرض کنید برای R—مدول M همبافت‌های زیر دقیق باشند.

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to E^{n+1} \to \cdots$$

و

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

بطوریکه برای هر $n \geq 0$، E^n یک R—مدول انژکتیو و P_n یک R—مدول تصویری باشند، دراین‌صورت همبافت $\cdots \to E^{n+1} \to E^n \to \cdots \to E^1 \to E^0 \to 0$ را یک تحلیل انژکتیو روی M و $0 \to P_0 \to P_1 \to \cdots \to P_n \to P_{n+1} \to \cdots$ را یک تحلیل تصویری روی M می‌نامیم.

قضیه ۹.۷.۰ هر R—مدول M، حداقل یک تحلیل تصویری و یک تحلیل انژکتیو دارد.

۸.۰ تابعگون‌های مشتق‌شده

تعریف ۱.۸.۰ فرض کنید $T : \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(R')$ یک تابعگون جمعی و پادورد باشد، برای هر $k \geq 0$، تابعگون $\mathcal{R}^kT : \mathcal{C}(R) \to \mathcal{C}(R')$ را که به صورت زیر ساخته می‌شود را k—امین تابعگون مشتق شده راست T می‌نامیم. برای R—مدول M، یک تحلیل تصویری مانند

$$P_M^\bullet : \cdots \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

وجود دارد. با اثر T روی همبافت بالا، یک همبافت راست به دست می آید که k—امین همولوژی آن را برابر با اثر $\mathcal{R}^kT$ روی M در نظر می گیریم، یعنی $(\mathcal{R}^kT)(M) = H^k(T(P_M^\bullet))$.

اگر $f : M \to N$ یک R—همریختی باشد، برای هر $n \geq 0$، R—همریختی $f_n : P_n \to P'_n$ وجود دارد که نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & \to & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \to & \cdots & \to & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\alpha} & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\
\cdots & \to & P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & P'_n & \to & \cdots & \to & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\alpha'} & N & \to & 0
\end{array}$$

تعریف می کنیم

$$\begin{array}{rcl}
(\mathcal{R}^kT)(f) & : & (\mathcal{R}^kT)(N) \to (\mathcal{R}^kT)(M) \\
 & & x + \operatorname{Im} Td'_{k+1} \to f_k(x) + \operatorname{Im} Td_{k+1}
\end{array}$$

در جبر همولوژیک ثابت می‌شود $\mathcal{R}^kT$ یک تابعگون خوش‌تعریف، جمعی، R—خطی و پادورد می‌باشد.

نکته. هرگاه T همورد باشد، به‌جای استفاده از تحلیل تصویری از تحلیل انژکتیو استفاده می‌کنیم. با روندی مشابه فوق، می‌توان تابعگون‌های مشتق‌شده چپ را در هر وضعیت تابعگون جمعی T (هموردیا پادورد) تعریف نمود.

تعریف ۲.۸.۰ فرض کنید M و N دو R—مدول باشند، تابعگون‌های T و U را به‌صورت $T = \operatorname{Hom}_R(-, N)$ و $U = \operatorname{Hom}_R(M, -)$ در نظر می‌گیریم. برای هر $n \geq 0$، ثابت می‌شود