بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی گرایش جبر

دانشکده علوم

عنوان پایان نامه:

نمایش مثلثی حلقه های چند جمله ای دیفرانسیلی

استاد راهنما:

دکتر شمس الملوک خوشدل

استاد مشاور:

دکتر احمد خاکساری

نگارش:

لیلا جهانگیری

شهریور ۸۹

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : نمایش مثلثی حلقه های چند جمله ای دیفرانسیلی

که توسط لیلا جهانگیری در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۱۳۸۹/۰۶/۲۹ نمره: ۱۸/۴۰ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱– دکتر شمس الملوک خوشدل	استاد راهنما	استادیار	
۲– دکتر احمد خاکساری	استاد مشاور	استادیار	
۳– دکتر محبوبه حسین یزدی	استاد داور	استادیار	
۴– دکتر بهمن یوسفی	نماینده تحصیلات تکمیلی	استاد	

نگارنده بر خود می داند که از زحمات بی دریغ ، تلاشهای بی وقفه و راهنمایی های ارزشمند استاد گرامی سرکار خانم شمس الملوک خوشدل در راستای انجام این پروژه تشکر و قدردانی نماید.

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

و تقدیم به همسرم که با او پرواز را آموختم و زندگی برایم امید و نشاط و شادابی به ارمغان آورد.

فهرست مطالب

چکیده :

فرض کنید R و S حلقه هایی یکدار و M یک (R,S) - دو مدول یکانی باشد . در این پایان نامه ابتدا تابع مشتق را روی حلقه ماتریس مثلثی تعمیم یافته $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ تعریف کرده ، سپس شرایطی را بیان می کنیم که تحت آن شرایط بتوان بین حلقه چند جمله ای دیفرانسیلی و حلقه ماتریس مثلثی تعمیم یافته یک یکریختی برقرار کرد . به بیان دیگر یک نمایشی مثلثی برای حلقه چند جمله ای دیفرانسیلی ارائه خواهیم داد .

مقدمه :

فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد . تابع جمعی $\delta : R \to R$ یک مشتق نامیده میشود

هرگاه برای هر $a , b \in R$ داشته باشیم :

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

برای هر $x \in R$ ، تابع $I_x : R \to R$ با ضابطه تعریف $I_x\ (a) = ax - xa$
برای هر $a \in R$ مشتق درونی نامیده می شود .

فرض کنید δ تابع مشتق روی حلقه R باشد . حلقه $R\ [\theta\ ;\ \delta]$ را حلقه چند جمله ای

دیفرانسیلی می نامیم به طوری که شامل همه چند جمله ای های به فرم

$$a_{\mathrm{n}}\theta x^{\mathrm{n}} + a_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots a_1\theta x^1 + a_0$$

باشد جاییکه $a_i \in R$ برای $i = 0,1,\cdots,n$. جمع اینگونه حلقه ها به صورت معمولی و

ضرب توسط رابطه $\theta a = a\theta + \delta(a)$ برای هر $a \in R$ تعریف می شود .

این پایان نامه مشتمل بر ۴ فصل است . فصل اول به تعاریف اولیه و مورد نیاز فصول دیگر اختصاص دارد .

در فصل دوم همریختی مدولی تعمیم یافته و خواص آن معرفی می گردد .

تابع مشتق روی حلقه ماتریس مثلثی تعمیم یافته $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ جاییکه R و S حلقه و M یک (R,S) - دو مدول است در فصل سوم تعریف و نشان داده می شود که هر مشتق روی اینگونه حلقه ها جمع یک مشتق درونی و یک مشتق القا شده است .

نتایجی مشابه نتیجه بالا در [۵] آورده شده است . همچنین نتایجی مشابه هنگامی که R یک جبر روی یک میدان با مشخصه غیر۲ و۳ باشد در [۱] آورده شده است .

توصیفی از مشتق در $T_n[R]$ ، ماتریس بالا مثلثی روی حلقه R توسط کوالهو و میلیز در سال ۱۹۹۳ در [۴] ارائه شده است . یک اثبات جدید از نتایج فوق توسط جاندراپ در سال ۱۹۹۵ داده شده است [۷] . آنها نشان دادند که هر مشتق حاصل جمعی از یک مشتق درونی و مشتق القا شده از R است . کلاسی از توسیع های حلقه که یک نمایش ماتریس تعمیم یافته داشته باشند توسط بیرکنمایر در سال ۲۰۰۳ مورد بررسی قرار گرفته است [۳] .

در فصل چهارم نمایش مثلثی برای حلقه های چند جمله ای دیفرانسیلی ارائه می شود . در واقع شرایطی که منجر به برقراری یکریختی

$$T[\theta;\delta] \cong \begin{pmatrix} R[x;\delta_R] & M[x,y;\tau] \\ 0 & S[y;\delta_s] \end{pmatrix}$$

جائیکه $R[x;\delta_R]$ و $S[y;\delta_s]$ به ترتیب حلقه های چند جمله ای دیفرانسیلی روی R و S هستند و $M[x,y;\tau]$ یک $\left(R[x;\delta_R]\text{و}S[y;\delta_s]\right)$- دو مدول است مطرح می شود .

در این تحقیق سعی بر آن شده تا مطالب به طور کامل توضیح داده شود و خواننده به راحتی بتواند مطالب را دنبال کرده و تسلط خود را در موضوع افزایش دهد .

فصل ۱:

تعاریف

تعریف ۱ . ۱ .

حلقه مجمو عه ای است ناتهی مانند R همراه با دو عمل دوتایی (که معمولا به صورت جمع و ضرب نمایش داده می شود) به طوری که :

۱- $(R,+)$ یک گروه آبلی است .

۲- به ازای هر a ، $b,c \in R$ $\quad (ab)c = a(bc)$

۳- به ازای هر a ، $b\ ,c \in R$

$$(a+b)c = ac+bc \qquad \text{و} \qquad a(b+c) = ab+ac.$$

هر گاه R شامل عنصری مانند 1_{R} باشد به طوری که :

۴ – به ازای هر $a \in R$

$$1_{\mathrm{R}}\ a = a\ 1_{\mathrm{R}} = a$$

آنگاه گوییم حلقه R یکدار است که در آن 1_{R} عضو واحد حلقه است .توجه کنید که شرط ۲ شرط ضروری حلقه نیست و در صورت برقراری حلقه را اصطلاحا حلقه شرکت پذیر می نامند .

تعریف ۱ . ۲ .

نگاشت φ از حلقه R به حلقه R' یک همریختی حلقه ای نامیده میشود در صورتیکه به ازای هر $a\ ,b \in R$ داشته باشیم :

$$\varphi\ (a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

و

$$\varphi\ (ab) = \varphi(a)\ \varphi(b).$$

تعریف ۱ . ۳ .

تابع یک به یک و پوشا مانند φ از حلقه R به حلقه R' یکریختی حلقه ای نامیده می شود در صورتی که به ازای هر $a\ ,b \in R$ داشته باشیم :

$$\varphi\ (a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

و

$$\varphi\ (ab) = \varphi(a)\ \varphi(b).$$

در این صورت حلقه های R و R' یکریخت نامیده می شوند و به صورت $R \cong R'$ نمایش داده می شود .

تعریف ۱ . ۴ .

حلقه R را در نظر بگیرید . یک R – مدول چپ ، گروه آبلی $(M, +)$ همراه با تابعی مانند $R \times M \to M$ (نقش $(r\ , m)$ با rm نمایش داده می شود) است به گونه ای که :

۱- به ازای هر $r \in R$ و $m_1\ , m_2 \in M$ داشته باشیم :

$$r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2\ .$$

۲- به ازای هر $r_1, r_2 \in R$ و $m \in M$ داشته باشیم :

$$(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m\ .$$

۳- به ازای هر $r_1, r_2 \in R$ و $m \in M$ داشته باشیم :

$$r_1(r_2 m) = (r_1 r_2)m\ .$$

هر گاه R شامل عنصری مانند 1_{R} باشد و

۴ – به ازای هر $m \in M$ داشته باشیم :

$$1_{\mathrm{R}}\, m = m$$

آنگاه M را یک R – مدول چپ یکانی است .

یک R – مدول راست (یکانی) به همین نحو با تابعی چون $M \times R \to M$ با ضا بطه $(m\ , r) \to mr$ تعریف می شود .

تعریف ۱ . ۵ .

حلقه R را در نظر بگیرید . یک R – مدول راست ، گروه آبلی $(M,+)$ همراه با تابعی مانند $M \times R \to M$ است به گونه ای که :

۱- به ازای هر $r \in R$ و $m_1 , m_2 \in M$ داشته باشیم :

$$(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r .$$

۲- به ازای هر $r_1, r_2 \in R$ و $m \in M$ داشته باشیم :

$$m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2 .$$

۳- به ازای هر $r_1 , r_2 \in R$ و $m \in M$ داشته باشیم :

$$(mr_1)r_2 = m (r_1 r_2) .$$

تعریف ۱ . ۶ .

هر گاه M یک R – مدول چپ و همچنین یک S – مدول راست باشد آنگاه M یک (R , S) – دو مدول است .

تعریف ۱ . ۷ .

فرض کنید M و M' مدولهایی روی حلقه R باشند . تابع $\varphi : M \to M'$ یک همریختی R – مدولی است هرگاه به ازای هر $m_1 , m_2 \in M$ و $r \in R$ داشته باشیم :

$$\varphi (m_1 + m_2) = \varphi (m_1) + \varphi(m_2) ,$$

$$\varphi (rm_1) = r\varphi (m_1) .$$

تعریف ۱ . ۸ .

فرض کنید M و M' مدولهایی روی حلقه R باشند . تابع یک به یک و پوشا مانند $\varphi : M \to M'$ یک یکریختی R – مدولی نامیده می شود هرگاه به ازای هر $m_1 , m_2 \in M$ و $r \in R$ داشته باشیم :

$$\varphi (m_1 + m_2) = \varphi (m_1) + \varphi(m_2) \text{ و}$$

$$\varphi\,(m_1m_2) = \varphi\,(m_1)\,\varphi(m_2) \text{ و}$$

$$\varphi\,(rm_1) = r\varphi\,(m_1)\,.$$

تعریف ۱ . ۹.

حلقه R را در نظر بگیرید . تابع جمعی $\delta : R \to R$ را تابع مشتق[۱] گوییم هر گاه برای هر $a\,, b \in R$ داشته باشیم:

$$\delta\,(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b\,.$$

تعریف ۱ . ۱۰.

فرض کنید R و S حلقه باشند . توابع مشتق $\delta_R : R \to R$ و $\delta_S : S \to S$ را در نظر بگیرید .تابع جمعی $\tau : M \to M$ مشتق تعمیم یافته[۲] وابسته به $(\delta_R$ و $\delta_S)$ نامیده می شود هر گاه به ازای هر $r \in R,\ s \in S,\ m \in M$ داشته باشیم:

$$\tau(rm) = \delta_R(r)m + r\tau(m) \text{ و}$$

$$\tau(ms) = \tau(m)s + m\delta_S(s)\,.$$

تعریف ۱ . ۱۱.

حلقه R را در نظر بگیرید . برای هر عضو $x \in R$ ، تابع $I_x : R \to R$ مشتق درونی[۳] از R نامیده می شود هر گاه به ازای هر $a \in R$ داشته باشیم :

$$I_x(a) = ax - xa\,.$$

تعریف ۱ . ۱۲.

فرض کنید δ تابع مشتق روی حلقه R باشد . حلقه $R\,[\theta\,;\,\delta]$ را حلقه چند جمله ای دیفرانسیلی[۴] می نامیم هرگاه شامل همه چند جمله ای های به فرم $a_{\mathrm{n}}\theta^{\mathrm{n}} + a_{n-1}\theta x^{n-1} + \cdots a_1x\theta^1 + a_0$ باشد جاییکه $a_i \in R$ برای

---

۱ $- derivation$

۲ - $generalized\ derivation$

۳ $-$ $Inner\ derivation$

۴ -$Differential\ polynomial\ ring$

$i = 0,1,\cdots,n$. جمع اینگونه حلقه ها به صورت معمولی و ضرب توسط رابطه $\theta a = a\theta + \delta(a)$ برای هر $a \epsilon R$ تعریف می شود .

تعریف ۱ . ۱۳ .

فرض کنید $T = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ که در آن R و S حلقه و M یک (R,S) - دو مدول باشد . اگر $d : T \rightarrow T$ تابع مشتق باشد آنگاه تابع $\bar{d}$ مشتق القا شده[5] از d است که برای هر $m \epsilon M$ ، $s \epsilon S$ و $r \epsilon R$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{d}\begin{pmatrix} r & \mathrm{m} \\ 0 & \mathrm{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_R & \tau(m) \\ 0 & \delta_S \end{pmatrix}$$

جاییکه δ_R و δ_S توابع مشتق و τ همریختی مدولی وابسته به (δ_Rو δ_S) است .

تعریف ۱ . ۱۴ .

حلقه R را در نظر بگیرید . عنصر $e \epsilon R$ خود توان نامیده می شود هرگاه :

$$e^2 = e.$$

تعریف ۱ . ۱۵ .

فرض کنید R یک حلقه و M یک R - مدول چپ باشد . پوچساز M را با نماد $Ann_R\, M$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$Ann_R\, M = \left\{ r \epsilon R \middle| \; rm = 0 \text{ ، } \forall\, m \epsilon M \right\}.$$

---

۱ – *Derivation induced*

فصل ۲:

هomomorfism

برای معرفی همریختی از حلقه های ماتریس تعمیم یافته ابتدا همریختی مدولی تعمیم یافته[۶] را تعریف می کنیم .

تعریف ۲ . ۱ .

حلقه های R ، R' ، S و S' را در نظر بگیرید . فرض کنید M یک (R,S) – دو مدول ، N یک $(R',\ S')$ – دومدول ، $\varphi_1\colon R \to R'$ و $\varphi_2\colon S \to S'$ همریختی های حلقه ای باشند . تابع جمعی $T\colon M \to N$ یک همریختی مدولی تعمیم یافته وابسته به $(\varphi_1\ ,\ \varphi_2)$ نامیده میشود اگر برای هر $r \in R\ , s \in S\ , m \in M$ داشته باشیم :

$$T(rm) = \varphi_1(r)T(m),$$
$$T(ms) = T(m)\varphi_2(s)\ .$$

لم ۲ . ۲ .

فرض کنید M یک (R,S) – دو مدول ، N یک $(R',\ S')$ – دو مدول و $T\colon M \to N$ یک همریختی مدولی تعمیم یافته وابسته به $(\varphi_1,\ \varphi_2)$ باشد .
آنگاه :

$$\Psi : \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R' & N \\ 0 & S' \end{pmatrix}$$

با ضابطه تعریف :

$$\Psi \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & T(m) \\ 0 & \varphi_2(s) \end{pmatrix}$$

یک همریختی حلقه ای است .

اثبات :

Ψ جمعی است زیرا با توجه به همریختی حلقه ای بودن $\varphi_1\ , \varphi_2$ وهمچنین جمعی بودن T داریم :

---

٦ – *Generalized module homomorphism*

$$\Psi\left[\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r' & \acute{m} \\ 0 & s' \end{pmatrix}\right] = \Psi\left[\begin{pmatrix} r+r' & m+m' \\ 0 & s+s' \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(r+r') & T(m+m') \\ 0 & \varphi_2(s+s') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(r)+\varphi_1(r') & T(m)+T(m') \\ 0 & \varphi_2(s)+\varphi_2(s') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & T(m) \\ 0 & \varphi_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1(r') & T(m') \\ 0 & \varphi_2(s') \end{pmatrix}$$

$$= \Psi\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} + \Psi\begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix}.$$

همچنین به آسانی مشاهده می کنیم که :

$$\Psi\left[\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix}\right] = \Psi\left[\begin{pmatrix} rr' & rm'+ms' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(rr') & T(rm'+ms') \\ 0 & \varphi_2(ss') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(r)\varphi_1(r') & \varphi_1(r)T(m')+T(m)\varphi_2(s') \\ 0 & \varphi_2(s)\varphi_2(s') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & T(m) \\ 0 & \varphi_2(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1(r') & T(m') \\ 0 & \varphi_2(s') \end{pmatrix}$$

$$= \Psi\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\Psi\begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix}.$$

پسΨ یک همریختی حلقه ای است .

قضیه ۲ . ۳ .

حلقه های یکدار R ، R' ، S و S' را در نظر بگیرید. فرض کنیم M یک (R,S) – دو مدول یکانی و N یک $(R',\ S')$ - دو مدول یکانی باشند. اگر تابع Ψ به صورت زیر باشد

$$\Psi\colon \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R' & N \\ 0 & S' \end{pmatrix}$$

آنگاه نتایج زیر معادلند :

(الف)

$$\Psi \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & T(m) \\ 0 & \varphi_2(s) \end{pmatrix}$$

جایی که $\varphi_1 : R \to R'$ ، $\varphi_2 : S \to S'$ همریختی حلقه ای و

$T: M \to N$ همریختی مدولی تعمیم یافته وابسته به (φ_1, φ_2) است .

(ب) Ψ همریختی حلقه ای است به طوری که

$$\Psi(RE_{11}) \subseteq R'E_{11}$$

و

$$\Psi(SE_{22}) \subseteq S'E_{22}.$$

که در آن ماتریس E_{ij} ماتریس مقدماتی است که درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام آن مساوی یک و بقیه درایه ها همگی مساوی صفر هستند .

اثبات :

(الف $\Leftarrow$ ب) با توجه به لم ۲ .۲ ، Ψ همریختی حلقه ای است بنابراین :

$$\Psi\left[\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix}\right] = \Psi\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}\Psi\begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix}.$$

با توجه به تعریف Ψ مشاهده می کنیم که :

$$\Psi\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(r) & \mathrm{T}(0) \\ 0 & \varphi_2(0) \end{pmatrix} = \varphi_1(r)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \varphi_1(r)E_{11}$$

$$\Psi(rE_{11}) = \Psi(r)E_{11} = \varphi_1(r)E_{11}.$$

از آنجا که $\varphi_1(r) \in R'$ ، پس برای هر $r \in R$ داریم :

$$\Psi(r)E_{11} \in R'E_{11}.$$

لذا

$$\Psi(RE_{11}) \subseteq R'E_{11}$$

و

$$\Psi\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1(0) & \mathrm{T}(0)\\ 0 & \varphi_2(s)\end{pmatrix} = \varphi_2(s)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \varphi_2(s)E_{22}$$

$$\Psi(sE_{22}) = \Psi(s)E_{22} = \varphi_2(s)E_{22}.$$

از آنجا که $\varphi_2(s) \in S'$ ، پس برای هر $s \in S$ داریم :

$$\Psi(s)E_{22} \in S'E_{22}\ .$$

لذا

$$\Psi(SE_{22}) \subseteq S'E_{22}.$$

(ب $\Leftarrow$ الف) توابع $\varphi_1 : R \to R'$ و $\varphi_2 : S \to S'$ را در نظر بگیرید .
اکنون تعریف میکنیم :

$$\Psi(rE_{11}) = \varphi_1(r)E_{11},$$

$$\Psi(s\,E_{22}) = \varphi_2(s)E_{22}.$$

با در نظر گرفتن اثر Ψ روی $\begin{pmatrix}r+r' & 0\\ 0 & s+s'\end{pmatrix}$ داریم :

$$\Psi\begin{pmatrix}r+r' & 0\\ 0 & s+s'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1(r+r') & 0\\ 0 & \varphi_2(s+s')\end{pmatrix}.$$

از طرفی با توجه به همریختی بودن Ψ و ضابطه Ψ داریم :

$$\Psi\begin{pmatrix}r+r' & 0\\ 0 & s+s'\end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & s\end{pmatrix} + \Psi\begin{pmatrix}r' & 0\\ 0 & s'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\varphi_1(r) & 0\\ 0 & \varphi_2(s)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varphi_1(r') & 0\\ 0 & \varphi_2(s')\end{pmatrix}$$