بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

کونز – میانگین پذیری دوگان دوم جبرها و جبرهای نیم گروهی وزن دار

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

قاسم ستوده

شهریور ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای قاسم ستوده

تحت عنوان:

کونز میانگین پذیری دوگان دوم جبرها و جبرهای نیم گروهی وزن دار

در تاریخ ... ۸۸/۶/۱۷..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......بسیار خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر رسول نصر اصفهانی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار موفق به طی دوره کارشناسی ارشد شدم، بجاست از افرادی که در این مقطع از وجودشان بهره جستم، یاد کنم. ابتدا از جناب آقای دکتر علی رجالی که با صبر و بردباری در این سالها بنده را از راهنمایی های خود بهره مند ساختند، صمیمانه تشکر می کنم و از خداوند طلب صحت و سلامت برای این استاد دلسوز می نمایم. همین طور باید از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه اصفهان و از داوران داخلی و خارجی خودم آقایان دکتر محمود لشکری زاده و دکتر عبدالرسول نصر اصفهانی سپاسگزاری کنم. از دوستان دوره کارشناسی ارشدم آقایان یاسر کیانی، محمد والایی انور، ساسان امیری، محسن امینی، علی موسوی و مهراب تقوی زاده که وجودشان همواره برای من موجب دلگرمی بوده است، ممنونم. همچنین از کادر اداری گروه ریاضی دانشگاه اصفهان مخصوصا خانم ها فرهمند، گرامی و غازی سپاسگزارم.

سپاس فراوان از پدر بزرگوارم و مادر فداکارم که همواره راهنمایم بوده اند و هر آنچه دارم از برکت وجود آنهاست.

قاسم ستوده

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به :

پدرم

که نصایحش روشنایی بخش راهم بود

و مادرم

که صفا و صمیمیتش درس فداکاری به من آموخت

و خواهرانم

که با گذشت های خود به من درس ایثار آموختند

چکیده

در این رساله، کونز- میانگین پذیری دوگان دوم جبرها و جبرهای نیم گروهی وزن دار را بررسی می کنیم. ابتدا نتایجی در رابطه با σWC- قطر مجازی، بویژه برای دوگان دوم یک جبر باناخ منظم آرنز بدست می آوریم. سپس این نتایج را برای جبرهای نیم گروهی حذفی ضعیف، وزن دار و گسسته به کار می بریم، نشان می دهیم که جبرهای نیم گروهی وزن دار نیز با توجه به کونز- میانگین پذیری دوگان دوم آن ها، همانند C^*- جبرها رفتار می کنند.

واژه های کلیدی

کونز- میانگین پذیری، σWC - قطر مجازی، منظم آرنز، جبرهای نیم گروهی وزن دار، دوگان دوم جبرها

فهرست مطالب

پیش گفتار

فرض کنید A یک جبر باناخ دوگان با پیش دوگان A_* باشد. A را کونز– میانگین‌پذیر می‌نامند اگر برای هر A– دو مدول باناخ نرمال E^*، هر مشتق ضعیف ستاره پیوسته $D : A \to E^*$، درونی باشد.

فرض کنید S یک نیم گروه باشد. تابع $\omega : S \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ را یک وزن روی S می‌نامند اگر برای هر $s, t \in S$ داشته باشیم $\omega(st) \leq \omega(s)\omega(t)$. همچنین فضای باناخ $l^1(S, \omega)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$l^1(S,\omega) = \left\{ f : \quad f : S \longrightarrow \mathbb{C}, \ \|f\|_{1,\omega} = \sum_{s \in S} |f(s)|\omega(s) < \infty \right\}$$

روندی در [۱۸] نشان داد که اگر A یک C^*– جبر باشد، آنگاه A میانگین پذیر است اگر و فقط اگر A^{**} کونز– میانگین‌پذیر باشد. داوز در [۸] نشان می‌دهد که این قضیه برای جبرهای نیم گروهی وزن‌دار نیز برقرار است. در واقع داوز ثابت می‌کند که اگر S یک نیم گروه حذفی گسسته و ω یک وزن روی S باشد به طوری که $l^1(S, \omega)$ منظم آرنز باشد، آنگاه $l^1(S, \omega)$ میانگین پذیر است اگر و فقط اگر $l^1(S, \omega)^{**}$ کونز–میانگین‌پذیر باشد.

همچنین گرانبیک در [۱۰] نشان داد که اگر S یک نیم گروه حذفی یکانی و ω یک وزن روی S باشد به طوری که $l^1(S, \omega)$ میانگین پذیر باشد، آنگاه S یک گروه است. در این پایان نامه نشان می‌دهیم که این قضیه در صورتی که $l^1(S, \omega)$ کونز– میانگین‌پذیر باشد نیز برقرار است.

هدف این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل، بررسی کونز– میانگین‌پذیری دوگان دوم جبرها و جبرهای نیم گروهی وزن‌دار است.

در فصل اول، مفاهیم و نتایج مقدماتی را که در طی فصل‌های بعد مورد نیاز است بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، مفاهیم میانگین پذیری و کونز– میانگین‌پذیری جبرهای باناخ بیان و مطالعه می‌شود.

در فصل سوم، کونز– میانگین‌پذیری دوگان دوم جبرهای باناخ را بررسی می‌کنیم و در فصل چهارم کونز– میانگین‌پذیری جبرهای نیم گروهی وزن‌دار بررسی می‌شود.

فصل ۱

پیش نیازها

در فصل اول، مفاهیم و نتایج مقدماتی را که در طی فصول بعدی این تحقیق مورد نیاز است به طور گذرا بیان می‌کنیم و از اثبات آنها صرف نظر می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ . (الف)فرض کنیم A یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد. هر زیرمجموعه از $A \times A$ را یک رابطه روی A گوییم و با $\leq$ نشان می‌دهیم و به‌علاوه به‌جای $(\alpha, \beta) \in \leq$ می‌نویسیم $\alpha \leq \beta$.

(ب) رابطه‌ی $\leq$ روی A را یک رابطه ترتیبی جزیی نامیم هرگاه

(۱) برای $\alpha \in A$، $\alpha \leq \alpha$؛

(۲) برای $\alpha, \beta \in A$ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$، آنگاه $\alpha = \beta$؛

(۳) برای α, β و $\gamma \in A$، اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$، آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

(ج) همچنین مجموعه‌ی غیرتهی A را یک مجموعه‌ی جهت‌دار گوییم هرگاه یک رابطه‌ی ترتیبی جزیی $\leq$ روی A موجود باشد به طوری که برای هر زوج β, α از A، عنصر $\gamma \in A$ موجود باشد به طوری که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

(د) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک تور در X یک نگاشت چون $f : A \longrightarrow X$ از مجموعه‌ی جهت‌دار A به X می‌باشد که $\alpha \in A \longrightarrow f(\alpha)$. معمولاً $f(\alpha)$ را با x_α نشان می‌دهیم. لذا تور f را با $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ یا $(x_\alpha)_\alpha$ نشان می‌دهیم.

(هـ) تور $(y_\beta)_{\beta \in B}$ را یک زیرتور از تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ گوییم هرگاه نگاشت $f : B \longrightarrow A$ موجود باشد که

(۱) $y_\beta = x_{f(\beta)}$؛

(۲) برای $\alpha \in A$، یک $\beta \in B$ موجود باشد به طوری که اگر $\beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq f(\gamma)$.

(و) هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ را همگرا به $x \in X$ گوییم هرگاه برای هر همسایگی U حول x، یک $\alpha \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $\beta \in A$ داشته باشیم

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

در این صورت می‌نویسیم $x_\alpha \longrightarrow x$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x$.

هرگاه تور $(x_\alpha)_\alpha$ در فضای توپولوژیک X همگرا به x باشد، آنگاه هر زیرتور از $(x_\alpha)_\alpha$ نیز همگرا به x است.

قضیه ۲.۱ . هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، $x \in X$ یک نقطه‌ی انباشتگی تور $(x_\alpha)_\alpha$ در X است اگر و تنهااگر زیرتوری همگرا به x داشته باشد.

تعریف ۳.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی انباشتگی برای $A \subseteq X$ گوییم، هرگاه توری در $A - \{x\}$ همگرا به x وجود داشته باشد.

قضیه ۴.۱ . فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و تنها اگر هرتور در X دارای یک زیرتور همگرا باشد.

اثبات . به [۱۳]، صفحه ۱۳۶، مراجعه کنید. □

تعریف ۵.۱ . فرض کنید X_1 و X_2 دو فضای توپولوژیک با توپولوژی‌های به ترتیب τ_1 و τ_2 باشند و $X = X_1 \times X_2$. در این صورت گردایه $B = \{U \times V : \ U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$ یک پایه توپولوژیک در X است. توپولوژی تولید شده به وسیله این پایه را توپولوژی حاصلضربی در X می‌نامند.

تعریف ۶.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان اعداد مختلط باشد. در این صورت

(الف) منظور از نرم روی X یک تابع حقیقی مقدار $x \mapsto \|x\|$ با خواص زیر است

۱—برای هر $x \neq 0$، $\|x\| > 0$.

۲—برای هر $c \in \mathbb{C}$ و هر $x \in X$، $\|cx\| = |c|.\|x\|$.

۳—برای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(ب) هرگاه نرمی روی X موجود باشد، X را یک فضای نرم‌دار گویند. در این صورت

X با متر $d(x,y) := \|x-y\|$ یک فضای متریک است و توپولوژی حاصل از این متر را توپولوژی نرمی نامند.

(ج) اگر X یک فضای خطی نرمدار باشد که هر دنباله کوشی در آن همگراست، آنگاه X را یک فضای باناخ نامند.

تعریف ۷.۱ . فرض کنید که X, Y دو فضای باناخ بر $\mathbb{C}$ باشند. دراین صورت

(الف) نگاشت $T : X \to Y$ را یک عملگر خطی گویند، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $c \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y).$$

(ب) عملگر خطی T را کراندار گویند هرگاه $\sup\{\|T(x)\| \; ; \; \|x\| \leq ۱\}$ متناهی باشد.

(پ) فضای تمامی عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $\mathcal{B}(X, Y)$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{B}(X, Y)$ با جمع توابع و ضرب اسکالر و نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \; ; \; \|x\| \leq ۱\}.$$

(ت) $\mathcal{B}(X, X)$ را با $\mathcal{B}(X)$ نمایش داده و هر عضو آن را یک عملگر خطی بر X گویند.

(ث) $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ را با X^* نمایش داده و هر عضو آن را یک تابعک خطی کراندار بر X می‌نامند و مقدار $f \in X^*$ در $x \in X$ را با $\langle f, x\rangle$ نشان می‌دهند.

X^* با نرم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq ۱\}$ یک فضای باناخ می‌باشد.

X^* را دوگان X می‌نامند، همچنین دوگان X^*، یعنی $(X^*)^*$ را با X^{**} نشان می‌دهیم و آن را دوگان دوم X می‌نامند. واضح است که X^{**} یک فضای باناخ است. نگاشت

طبیعی از X به دوگان دوم X را برای هر $f \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\kappa_X : X \longrightarrow X^{**}$$
$$\langle \kappa_X(x), f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

(ج) هر عملگر خطی دو سویی $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ را یک یکریختی از X به Y گویند و یکریختی T را حافظ نرم نامند هرگاه برای هر $x \in X$، $\|T(x)\| = \|x\|$.

(د) فرض کنید که $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ در این صورت $T^* : Y^* \to X^*$ را که به ازای هر $x \in X, y^* \in Y^*$، به صورت $\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle$ تعریف می‌شود الحاقی T گوییم و همچنین داریم که $\|T\| = \|T^*\|$.

به صفحه ۴۱ از [۱۲] مراجعه کنید.

(و) برای هر $x \in X$ و هر زیر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\} \subseteq X^*$ و هر $\varepsilon > 0$ تعریف کنید

$$U(x, x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \varepsilon) = \{y \in X; |\langle x_k^*, y\rangle| < \varepsilon, k = 1, 2, ..., n\}$$

در این صورت تمام مجموعه‌های به فرم فوق تشکیل یک پایه برای X می‌دهند، و توپولوژی حاصل از این پایه را توپولوژی ضعیف بر X می‌نامند و با $w = \sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهند.

تور $\{x_\alpha\} \subseteq X$ را در این توپولوژی به $x \in X$ همگرا گوییم، هرگاه برای هر $x^* \in X^*$ داشته باشیم که $\lim_\alpha \langle x^*, x_\alpha\rangle = \langle x^*, x\rangle$

به صفحه ۳۵ از [۱۲] مراجعه کنید.

(ه) برای هر $x^* \in X^*$ و هر زیر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ و هر $\varepsilon > 0$ تعریف کنید

$$U(x^*, x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) = \{y^* \in X^*; |\langle y^*, x_k\rangle| < \varepsilon, k = 1, 2, ..., n\}$$

در این صورت تمام مجموعه‌های به فرم فوق تشکیل یک پایه برای X^* می‌دهند، و توپولوژی حاصل از این پایه را توپولوژی ضعیف ستاره بر X^* می‌نامند و با $w^* = \sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهند.

تور $\{x^*_\alpha\} \subseteq X^*$ را در این توپولوژی به $x^* \in X^*$ همگرا گوییم، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم که

$$\lim_\alpha \langle x^*_\alpha, x\rangle = \langle x^*, x\rangle$$

به صفحه‌ی ۳۷ از [۱۲] مراجعه کنید.

تعریف ۸.۱ . فرض کنید که X یک فضای خطی توپولوژیکی باشد. $A \subseteq X$ را فشرده دنباله‌ای ضعیف نامیم، هرگاه هر دنباله $\{x_n\}$ در A دارای زیر دنباله‌ای باشد که به x ای در X همگرای ضعیف باشد؛ برای جزییات بیشتر، به صفحه‌ی ٦٧ از [۹] مراجعه کنید.

قضیه ۹.۱ . (آلااقلو) فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. دراین صورت گوی یکه‌ی بسته‌ی $S^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$، فشرده ضعیف ستاره در X^* است.

اثبات . به [۹]، صفحه ۴۲۴، مراجعه کنید. □

قضیه ۱۰.۱ .(گلدشتاین) فرض کنید X یک فضای باناخ و $\kappa_X : X \longrightarrow X^{**}$ نگاشت طبیعی باشد و B و B^{**} به ترتیب گوی‌های یکه بسته در X و X^{**} باشند. در این صورت تصویر B تحت این نگاشت در B^{**} ، ضعیف ستاره چگال است.

اثبات . به [۲۰]، صفحه ۲۱۰، مراجعه کنید. □

قضیه ۱۱.۱ . اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه نگاشت طبیعی $\kappa_X : X \longrightarrow X^{**}$ یک یکریختی طولپا از X به روی یک زیر فضای بسته از X^{**} است.

اثبات . به [۲۰]، صفحه ۲۱۰، مراجعه کنید. □

در اغلب موارد تحت این یکریختی X را زیر فضای بسته از X^{**} در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید که X و Y دو فضای خطی نرم‌دار و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، چنان که به ازای هر گوی یکه بسته S در X، نرم بستار $T(S)$ فشرده باشد، آنگاه T را یک عملگر فشرده نامیم.

قضیه ۱۳.۱ . فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، آنگاه عبارات زیر معادلند

(الف) T یک عملگر فشرده است.

(ب) به ازای هر دنباله کراندار $(x_n) \subseteq X$، دنباله $(T(x_n))$ دارای زیر دنباله همگرا در Y است.

(ج) به ازای هر مجموعه کراندار $S \subseteq X$، بستار $T(S)$ در Y فشرده است.

اثبات . به صفحه ۲۰ از [۱۵] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۴.۱ . اگر فضای عملگرهای فشرده از X به X را با $K(X)$ نمایش دهیم. آنگاه $K(X)$ یک ایده آل بسته از $B(X)$ نسبت به عمل ترکیب توابع می‌باشد.

اثبات . به صفحه ۲۰ از [۱۵] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۵.۱ . فرض کنید که X و Y دو فضای خطی نرمدار و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد، چنان که به ازای هر گوی یکه بسته S در X، بستار $T(S)$ در

توپولوژی ضعیف روی Y فشرده باشد، آنگاه T را یک عملگر فشرده ضعیف نامیم.

مجموعه‌ی همه عملگرهای فشرده ضعیف از X به Y را با $\mathcal{W}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۱ . فرض کنید X و Y دو فضای باناخ روی $\mathbb{C}$ باشند و κ_Y نگاشت طبیعی از Y به Y^{**} باشد، در این صورت

(الف) عملگر خطی $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ فشرده ضعیف است اگر و فقط اگر $T^{**}(X^{**}) \subseteq \kappa_Y(Y)$.

(ب) عملگر خطی $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ فشرده است اگر و فقط اگر T^* فشرده باشد.

(ج) عملگر خطی $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ فشرده ضعیف است اگر و فقط اگر T^* فشرده ضعیف باشد.

اثبات . برای اثبات (الف) به صفحه ۴۸۲ از [۹] و برای اثبات (ب) و (ج) به صفحات ۱۷۸ و ۱۸۹ از [۳] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۷.۱ . فرض کنید که X یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت

(الف) تابع f در بینهایت صفر می شود، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه فشرده K چنان موجود باشد که برای هر $x \in X - K$ داشته باشیم $|f(x)| < \varepsilon$.

(ب) مجموعه توابع مختلط– مقدار پیوسته بر X را که در بینهایت صفر می‌شوند با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۸.۱ . فرض کنید که X یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت $C_0(X)$ با جمع توابع و ضرب اسکالر و نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

اثبات .به صفحه‌ی ۷۰ از [۱۶] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۹.۱ . فرض کنیم X و Y و Z فضاهای توپولوژیکی باشند و $f : X \times Y \longrightarrow Z$. در این صورت f را به طور مجزا پیوسته گوییم، هرگاه برای تور $(x_\alpha)_\alpha$ در X همگرا به x و $(y_\alpha)_\alpha$ در Y همگرا به y و عناصر $x_\circ \in X$ و $y_\circ \in Y$ داشته باشیم

$$f(x_\alpha, y_\circ) \longrightarrow f(x, y_\circ), \qquad f(x_\circ, y_\alpha) \longrightarrow f(x_\circ, y)$$

تعریف ۲۰.۱ . فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار روی $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت

(الف) زیر مجموعه A از X را محدب گویند هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر $\circ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم $tx + (۱ - t)y \in A$.

(ب) فرض کنید $B \subseteq X$، در این صورت اشتراک همه زیر مجموعه‌های محدب شامل B در X را غلاف محدب B نامیده و با $co(B)$ نمایش می‌دهند. بنابراین داریم

$$co(B) = \left\{ \sum_{i=۱}^{n} t_i b_i : \circ \leq t_i, \sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱, b_i \in B \right\}$$

(ج) فرض کنید $B \subseteq X$، در این صورت اشتراک همه زیر مجموعه‌های محدب بسته شامل B در X را غلاف محدب بسته B گویند و با $\overline{co}(B)$ نمایش می‌دهند.

(د) زیر مجموعه $A \subseteq X$ را مطلقاً محدب نامند، هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر $s, t \in \mathbb{C}$ که $|s| + |t| \leq ۱$ داشته باشیم $sx + ty \in A$.

(هـ) غلاف مطلقاً محدب $B \subseteq X$ را با $aco(B)$ نمایش داده و اشتراک تمام زیر

مجموعه‌های مطلقاً محدب شامل B در X، تعریف می‌کنند. بنابراین داریم

$$aco(B) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} t_i b_i : \quad n \geq 1,\ t_i \in \mathbb{C},\ b_i \in B, \sum_{i=1}^{n} |t_i| \leq 1 \Big\}$$

قضیه ۲۱.۱ . فرض کنید X یک فضای باناخ باشد.

(الف) (مازور) اگر E یک زیر مجموعه محدب از X باشد. بستار E با توپولوژی نرم و بستار E با توپولوژی ضعیف با هم برابرند.

(ب) (کرین — اشمولین) اگر K یک زیر مجموعه فشرده ضعیف از X باشد، آنگاه $\overline{co}(K)$ فشرده ضعیف است.

اثبات . برای اثبات (الف) به [۵]، صفحه ۸۱۸ و برای اثبات (ب) به [۳]، صفحه ۱۶۴، مراجعه کنید. □

قضیه ۲۲.۱ . (ابرلین — اشمولین) فرض کنید E یک زیر مجموعه از فضای نرم‌دار X باشد. آنگاه عبارات زیر معادلند

(الف) E ضعیف فشرده نسبی است.

(ب) E ضعیف فشرده نسبی دنباله‌ای است.

اثبات . به [۱۴]، صفحه ۲۴۸، مراجعه کنید. □

تعریف ۲۳.۱ . یک فضای خطی روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$، با جمع برداری $(x, y) \mapsto x + y$ از $A \times A$ به A وضرب اسکالر $(c, x) \mapsto cx$ از $\mathbb{C} \times A$ به A را یک جبر گویند هرگاه نگاشت $(x, y) \mapsto x.y$ از $A \times A$ به A به نام ضرب برداری موجود باشد که