دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش آنالیز

عنوان :

برخی تقریب ها در جبرهای عملگری

استاد راهنما :

دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور:

دکتر محمد جانفدا

نگارنده :

ناهید قارزی

تابستان ۱۳۹۰

فرم چکیده‌ی پایان‌نامه‌ی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی

دفتر مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: قارزی	**نام:** ناهید	**ش دانشجویی: ۸۸۲۳۱۲۲۰۹۶**
استاد راهنما: دکتر قدیر صادقی	**استاد مشاور:** دکتر محمد جانفدا	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۱۳۹۰/۷/۱۳	**تعداد صفحات:** ۱۲۲

عنوان پایان‌نامه: **برخی تقریب ها در جبرهای عملگری**

کلید واژه: C^*ـ جبرها، **تابع توکشنده، تقریب، طولپای جزئی، پارانرمال**

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به بیان برخی مفاهیم و قضیه های اولیه می پردازیم که تعریف C^*ـ جبرها و فون نیومن جبرها و بیان قضیه ی گلفند – نیمارک از آن جمله اند.

هدف این پایان نامه بررسی مسئله ی حداقل کردن مقدار $\|a-x\|$ برای عنصر ثابت دلخواه a از C^*ـ جبر $\mathcal{A}$ و متغیر x (روی مجموعه ی $\mathcal{N}$) است. مسئله ی حداقل مقدار $\|a-x\|$ را در حالتهای مختلفی که مجموعه ی $\mathcal{N}$ از عناصر مثبت، طولپا، یکانی، طولپای جزئی و جابجاگرها و پارا نرمال ها تشکیل شده است، در نظر می گیریم. مسئله ی تقریب $\|a-x\|$ را روی C^*ـ جبرها و فون نیومن جبرها بررسی می کنیم.

امضای استاد راهنما

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در ریاضی محض

عنوان

برخی تقریب ها در جبرهای عملگری

استاد راهنما

دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور

دکتر محمد جانفدا

نگارنده

ناهید قارزی

تابستان ۱۳۹۰

تقدیم به :

تقدیم به پدر و مادرم:

مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به همسرم:

که سایه ی مهربانی اش، سایه سار زندگی ام است، او که اسوه ی صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود.

و تقدیم به برادر مهربانم.

قدردانی

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که توفیق دوباره تحصیل علم را به من عطا نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی های استاد گرانقدر و ارجمند

جناب آقای دکتر قدیر صادقی

که در راستای تهیه و تنظیم این پژوهش، مرا یاری نموده و با صبر و حوصله فراوان گره از مشکلاتم گشودند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمد جانفدا که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل کردند و از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر عباسپور و جناب آقای دکتر عارفی جمال صمیمانه قدردانی می نمایم.

از ریاست محترم دانشکده ریاضی جناب آقای دکتر مقدسی و مدیر گروه محترم سرکار خانم دکتر شاطری که افتخار شاگردیشان را نیز داشتم، کمال تشکر را دارم.

در پایان بر خود لازم می دانم که از پدرو مادر بهتر از جانم و همسر عزیزم که موفقیت امروز را مدیون زحمات بی دریغ و تشویق هایشان هستم، از صمیم قلب سپاسگذاری نمایم و آرزوی سلامتی ایشان را از خداوند متعال خواهانم.

چکیده

نام خانوادگی : قارزی **نام :** ناهید
عنوان پایان نامه : برخی تقریب ها در جبرهای عملگری
استاد راهنما : دکتر قدیر صادقی **استاد مشاور:** دکتر محمد جانفدا
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز تابعی **محل تحصیل:** دانشگاه تربیت معلم سبزوار **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی:** شهریور ماه ۱۳۹۰ **تعداد صفحه:** ۱۱۲
واژه‌های کلیدی:
چکیده:

پیشگفتار

هالموس[۱] در سال ۱۹۷۲ با اثبات قضیه هایی، تقریبی مثبت از عملگر دلخواه A در $B(\mathcal{H})$ را به‌دست آورد [۱۶]. پس از آن آیکن[۲] و اردوش[۳] در سال ۱۹۸۰ با فرض مثبت بودن عملگر A، برای هر عملگر یکانی U روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ مقدار حداقل $\|U-A\|$ را محاسبه کردند [۱] و ماهر[۴] در سال ۱۹۸۹ قضیه‌ی حداقل کردن مقدار $\|A-U\|$ را (با فرض نرمال بودن عملگر A، برای هر عملگر طولپای جزئی نرمال U) نشان داد [۲۱]. علاوه بر این ها برنتزن[۵] در سال ۱۹۹۶ مسئله تقریب طیفی نرمال در C^*_ جبر یک‌دار $\mathcal{A}$ را بررسی می‌کند [۵]. برنتزن در این مقاله نشان می‌دهد، اگر Δ زیر مجموعه‌ای بسته و محدب از صفحه‌ی مختلط باشد، آن‌گاه فاصله عنصر نرمال $a \in \mathcal{A}$ از مجموعه‌ی $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\Delta)$ (تشکیل شده از عناصر نرمال در $\mathcal{A}$ که طیف آن ها داخل Δ است) با فاصله هاسدورف یک طرف $\sigma(a)$ از Δ یکی است. و ماهر در سال ۲۰۱۰ مسئله‌ی حداقل کردن مقادیر

۱. $\|T-(AX-XA)\|$،

۲. $\|T-(X^*X-XX^*)\|$،

---

[۱] Halmos

[۲] Aiken

[۳] Erdos

[۴] Maher

[۵] Berntzen

۳. $\|T-(AX-XB)\|$

رابررسی می‌کند [۲۷].

متعامد بودن دو مجموعه نیز به مقالاتی در گذشته بر می گردد که از آن جمله: آندرسون[۶] در سال ۱۹۷۳ برای $T, X \in B(X)$؛ $\Delta_T(X) = TX - XT$ را به عنوان مشتق گیری روی $B(\mathcal{H})$ تعریف می‌کند [۲]. آندرسون در این مقاله با فرض طولپا بودن عملگر T (یا نرمال بودن آن) نشان می‌دهد که برد Δ_T با فضای پوچ Δ_T متعامد است. علاوه بر این آندرسون و فویس[۷] در سال ۱۹۷۵ با در نظر گرفتن دو عملگر اسکالر T, S روی فضای باناخ $\mathcal{H}$ و نگاشت

$$\Delta_{T,S}(X) = TX - XS \qquad (X \in B(\mathcal{H}))$$

روی $B(\mathcal{H})$ اثبات می‌کند که برد $\Delta_{T,S}$ و فضای پوچ[۸] $\Delta_{T,S}$ متعامد هستند[۳] . نتیجه‌های ذکر شده در بالا، همگی در فضای عملگری $B(\mathcal{H})$ به دست آمده اند. پس از این ها، ماهر در سال ۲۰۱۰ در مقاله‌ی ”برخی تقریب ها در جبرهای عملگری” نتایج بدست آمده در مقالات قبل را روی تقریب های عملگری، به C^*_ جبرها و فون نیومن جبرها توسیع داد [۲۲].

این پایان نامه شامل سه فصل است.

فصل اول از دو بخش تشکیل شده است. در بخش اول تعاریف و قضایائی از آنالیز حقیقی و تابعی بیان می‌شوند و بخش دوم به تعریف C^*_جبرها و ویژگی های آن ها و فون نیومن جبرها اختصاص داده شده است. فصل دوم برگرفته از مقالات،

۱) *R. Berntzen, Normal spectral approximation in $C*$−algebras and in von Neumann algebras, Rend. Circ. Mat. Palermo,* 45(1996), 918

۲) *P. R. Halmos, Positive approximants of operators, IndianaUniv.Math. J.,* 21 (1972), 951960.

---

[۶] Anderson

[۷] Foia,s

[۸] Null space

۳) *J. G. Aiken, J. A. Erdos, J. A. Goldstein, Unitaryapproximation of positive operators, Illinois J. Math.*, 24 (1980), 6172.

۴) *P. J. Maher, Partially isometric approximation of positive operators, Illinois J. Math.*, 33 (1989), 227243.

شامل چهار بخش است، که با بیان مفهوم تقریب ها آغاز می‌شود. در این فصل پس از تعریف تابع توکشنده به قضیه ی کلیدی این پایان نامه می‌پردازیم که برنتزن آن را اثبات کرده است. سپس مسئله تقریب را روی عناصر مثبت، طولپا، یکانی و طولپای جزئی بررسی می‌کنیم. در پایان، فصل سوم شامل دو بخش است. در بخش اول با استفاده از

۱) *J. Anderson, On normal derivatives, Proc. Amer. Math. Soc.*, 38 (1973), 135−140.

۲) *J. Anderson, C. Foias, Properties which normal operators share with derivations and related operators, Pac. J. Math.*, 61(1975), 313 − 325

تقریب جابجاگرها را مطالعه می‌کنیم. دربخش دوم تقریب پارانرمال ها ملاک کار قرار گرفته است، که برگرفته از مقاله‌ی

P. J. Maher, Commutator, and self − commutator, approximants 2. *To appear.*

می باشد. در هر بخش از این پایان نامه، پس از مطالعه‌ی تقریب های عملگری، تقریب را به C^*_جبرها توسیع می‌دهیم، که از مقاله‌ی زیر استخراج کرده‌ایم.

P. J. Maher, Some approximants in operator algebras, Rend. Circ. Mat. Palermo 59, 53 − 65(2010).

در پایان یادآوری می‌کنیم که‌این پایان نامه تنها به بررسی تعدادی از انواع تقریب های عملگری پرداخته و هنوز برخی از قضیه های این مبحث هستند که مورد مطالعه قرار نگرفته اند.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول از این فصل، تعاریف و مثالهایی از فضای نرم دار [1] و فضای هیلبرت[2] بیان می‌شود. در بخش دوم با C^*_جبر [3] آشنا می شویم و ویژگی های عناصر آن را ذکر می‌کنیم. همچنین برخی قضیه های مقدماتی از C^*_جبر را نیز بیان می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این بخش به یادآوری فضای نرم دار و فضای هیلبرت که در فصل های بعد مورد نیاز است، می‌پردازیم. همچنین، برخی تعاریف دیگر را نیز یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. یک فضای برداری عبارت است از یک گروه آبلی مانند $(X, +)$ به همراه ضرب اسکالر از

[1] Normed space

[2] Hilbert space

[3] C*-algebra

میدان$\mathbb{K}$($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) به توی X مانند

$$. : \mathbb{K}\times X \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$$

که دارای شرایط زیر می باشد

۱. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$،

۲. $1x=x$،

۳. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X فضایی برداری روی میدان $\mathbb{K}$باشد، تابع[۴] $\|.\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ یک نرم روی X نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱. $x=0$ اگر و فقط اگر $\|x\|=0$،

۲. به ازای هر $\alpha\in\mathbb{K}$ و هر $x\in X$، $\|\alpha x\|=|\alpha|\ \|x\|$،

۳. به ازای هر $x,y\in X$ ، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

فضای برداری X روی میدان $\mathbb{K}$ را یک فضای نرم دار گویند، هرگاه یک نرم $\|.\|$ روی X وجود داشته باشد. همچنین برای فضای نرم دار X، $d(x,y)=\|x-y\|$ یک متر روی X تعریف می کند.

تعریف ۳.۱. فضای باناخ یک فضای نرمدار است که با متر تعریف شده توسط نرم، کامل[۵] باشد. فضای باناخ حقیقی، فضای باناخی است که میدان اسکالر آن، حقیقی باشد.

[۴] Function

[۵] Complete

مثال ۴.۱. ۱) ساده ترین فضای باناخ، خود میدان مختلط با نرم $\|x\| = |x|$ می باشد.

۲)فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعا″ فشرده باشد. تابع پیوسته‌ی f از X به $\mathbb{C}$ در بی نهایت صفر می شود، هرگاه برای هر عدد مثبت ε، مجموعه‌ی $\{w \in X : |f(w)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد. مجموعه‌ی این گونه توابع را با $C_0(X)$ نمایش می‌دهیم. $C_0(X)$ با نرم زیر فضای باناخ است:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

که نرم سوپرمم نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱. نگاشت مختلط T از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را که به ازای هر x, y در X و هر اسکالر α, β در رابطه‌ی

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

صدق کند، نگاشت خطی نامیم.

هرگاه برای نگاشت T عدد حقیقی C وجود داشته باشد، به طوری که

$$\|Tx\| \leq C\|x\|$$

T را نگاشت کران دار گوئیم.

مثال ۶.۱. فرض کنیم X و Y فضاهایی برداری نرم دار باشند، همه‌ی نگاشت های خطی کران دار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم. $B(X,Y)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر نقطه‌ای، یک فضای برداری است و تابع $\|T\| \longmapsto T$ به یکی از صورت های معادل زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \quad \|x\| = 1\}$$

$$= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \quad x \neq 0\}$$

$$= \inf\{C > 0 : \quad \|Tx\| \leq C\|x\|\} \; .$$

این تابع، یک نرم روی $B(X,Y)$ است که نرم عملگری نامیده می‌شود.

در حالتی که $X = Y$، به جای $B(X,Y)$ از $B(X)$ استفاده می‌کنیم.

باتوجه به این‌که شرط لازم و کافی برای باناخ بودن $B(X,Y)$ آن است که Y فضایی باناخ باشد(صفحه‌ی ۷۱ از مرجع [۱۰] را ببینید.)، لذا اگر X فضایی باناخ باشد، آن‌گاه $B(X)$ نیز یک فضای باناخ است.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد. یک ضرب داخلی [۶] روی $\mathcal{H}$ عبارت است از تابع $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ به قسمی که به ازای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ و اسکالر های $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱. $\langle x, x \rangle \geq 0$،

۲. $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$،

۳. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$،

۴. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

هرگاه برای $x \in \mathcal{H}$ قرار دهیم

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

این تابع، یک نرم روی $\mathcal{H}$ تشکیل می‌دهد و چنانچه $\mathcal{H}$ با این نرم یک فضای باناخ باشد، $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای هیلبرت می‌گوئیم.

[۶] Inner product

قضیه ۸.۱. (نامساوی کشی - شوارتز). [۷] فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت

برای هر $x, y \in X$ داریم

$$| \langle x, y\rangle | \leq \|x\|\|y\| .$$

برهان. برای اثبات صفحه ۷۷ مرجع [۲۹] را ببینید. □

مثال ۹.۱. فرض کنید (X, Ω, μ) یک فضای اندازه باشد. گردایه‌ی تمام توابع اندازه پذیر مختلط f بر X که $\|f\|_2 = \{\int_X |f|^2 d\mu\}^{1/2} < \infty$، را با $L^2(\mu)$ نشان می‌دهیم($\|f\|_2$ را نرم L^2ی f می‌نامیم). هرگاه μ یک اندازه مثبت باشد، $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g} d\mu$$

است. انتگرالده سمت راست طبق قضیه ۸.۳ مرجع [۲۹] در $L^1(\mu)$ است، درنتیجه $\langle f, g\rangle$ خوش تعریف است.توجه کنید که

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \{\int_X |f|^2 d\mu\}^{1/2} = \|f\|_2$$

کامل بودن $L^2(\mu)$ (قضیه ۱۱.۳ مرجع [۲۹]) نشان می‌دهد که $L^2(\mu)$ در واقع یک فضای هیلبرت است.

تعریفی که از فضای هیلبرت داریم، نتیجه می‌دهد؛ هر فضای هیلبرت، یک فضای باناخ است.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, ...$ فضاهای هیلبرت باشند و فضای $\mathcal{H}$ تعریف شده به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{H} = \{(h_n)_{n=1}^{\infty} : h_n \in \mathcal{H}_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty\}$$

برای $h = (h_n)$ و $g = (g_n)$ در $\mathcal{H}$ داریم

$$\langle h, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, g_n\rangle$$

---

[۷] Cauchy-Shwartz inequality

در این صورت $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ است و نرم مرتبط با ضرب داخلی نیز به صورت زیر است:

$$\|h\| = [\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2]^{1/2} .$$

با این ضرب داخلی $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت است.(گزاره‌ی ۲.۶ مرجع [۱۰] را ببینید.)

فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، همان جمع مستقیم $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, ...$، بانماد زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus ... .$$

در ادامه دو نوع توپولوژِی عملگری، ضعیف و قوی را بیان می‌کنیم، که برای تعریف آن ها به مفهوم شبه نرم نیاز داریم.

تعریف ۱.۱۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. تابع $X \longrightarrow [0, \infty)$ که به صورت $x \longmapsto \|x\|$ تعریف می‌شود را شبه نرم نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $x, y \in X$؛ $\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲. برای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{K}$ ؛ $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

اگر $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت باشد و $x \in \mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه

$$P_x : B(\mathcal{H}) \longrightarrow R^+$$

$$u \longmapsto \|u(x)\|$$

یک شبه نرم روی $B(\mathcal{H})$ است.

توپولوژی موضعا" محدب روی $B(\mathcal{H})$ که با خانواده‌ی مجزای $\{P_x\}_{x \in \mathcal{H}}$ تولید شده است، توپولوژی عملگری قوی روی $B(\mathcal{H})$ نامیده می‌شود.

تور $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ به عملگر u روی $\mathcal{H}$ همگرای قوی است، اگر و فقط اگر

$$u(x) = \lim_\lambda u_\lambda(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) .$$

(به گزاره‌ی ۳.۱ مرجع [۱۰] مراجعه کنید.)

تعریف ۱۲.۱. هرگاه $\mathcal{H}$ را فضای هیلبرت در نظر بگیریم، توپولوژی هاسدورف موضعا" محدب روی $B(\mathcal{H})$ تولید شده توسط خانواده‌ی شبه نرم های مجزای

$$B(\mathcal{H}) \longrightarrow R^+$$

$$u \longmapsto |\langle u(x), y\rangle| \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

توپولوژی (عملگری) ضعیف روی $B(\mathcal{H})$ نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ یک تور روی $B(\mathcal{H})$ باشد، در این صورت $\{u_\lambda\}$ همگرای ضعیف است، اگر و فقط اگر

$$\lim_\lambda \langle u_\lambda(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{H}) .$$

(به گزاره‌ی ۳.۱ مرجع [۱۰] مراجعه کنید.)

۲.۱ C^*_ جبرها و فون نیومن جبرها

این بخش به C^*_جبر و ویژگی های عناصر آن اختصاص دارد. مبحث C^*_ جبر، به تعدادی واژه های اصلی (جبر باناخ و نگاشت برگشت و $*$_جبر و ...) نیاز دارد، که بخش را با تعریف این واژه ها شروع می‌کنیم. پس از بررسی ویژگی های عناصر C^*_جبر، با فون نیومن جبر آشنا می شویم. در پایان بخش، به اختصار اندازه‌ی طیفی [۸] را شرح می‌دهیم و به بیان چند قضیه از این مبحث می‌پردازیم.

[۸] Spectral measure

تعریف ۱۳.۱. فضای برداری $\mathcal{A}$ همراه با نگاشت دوخطی [۹]

$$: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(a,b) \longmapsto ab$$

به قسمی که

$$a(bc) = (ab)c \qquad (a,b,c \in \mathcal{A})$$

جبر [۱۰]نامیده مي شود.

یک زیرفضای برداری $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$، به قسمی که نسبت به عمل ضرب بسته است، به همراه ضرب تعریف شده روی $\mathcal{A}$، خود یک جبر است. که آن را یک زیرجبر جبر$\mathcal{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱. نرم $||.||$ روی جبر $\mathcal{A}$، زیر ضربی [۱۱] گوئیم، درصورتی که

$$||ab|| \leq ||a|| ||b|| \qquad (a,b \in \mathcal{A})$$

در این حالت جفت $(\mathcal{A}, ||.||)$، جبر نرم دار [۱۲] نامیده می‌شود.

جبر نرم دار کامل را جبر باناخ می‌نامیم.

یک جبر نرم دار کامل یک‌دار را نیز جبر باناخ یک‌دار می‌نامیم.

مثال ۱۵.۱. هرگاه X فضای باناخ [۱۳] باشد، $B(X)$ با ضرب تعریف شده به صورت $(u,v) \longmapsto uv$ و نرم

[۹] Bilinear map

[۱۰] Algebra

[۱۱] Sub multiplicative

[۱۲] Normed algebra

[۱۳] Banach space

تعریف شده در قبل، جبر باناخ است.

مثال ۱۶.۱. فرض کنیم Sیک مجموعه باشد، مجموعه همه‌ی توابع مختلط کران دار روی S که با $l^{\infty}(S)$ نشان می‌دهیم، جبر باناخ است، که عمل [۱۴]تعریف شده روی آن به صورت نقطه‌ای [۱۵] است

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

و نرم آن، نرم سوپریمم [۱۶] است

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

مثال ۱۷.۱. هرگاه Ω فضای توپولوزیکی باشد، مجموعه همه توابع مختلط کران‌دار پیوسته روی Ω که با $C_b(\Omega)$ نمایش می‌دهیم، زیر جبر بسته‌ی $l^{\infty}(\Omega)$ است. پس $C_b(\Omega)$ جبر باناخ است. برای فضای هاسدورف موضعا" فشرده Ω؛ $C_0(\Omega)$ زیرجبر بسته $C_b(\Omega)$ است. و بنابراین $C_0(\Omega)$ جبر باناخ است.

تعریف ۱۸.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ یک دار باشد، عنصر $x \in \mathcal{A}$ را معکوس پذیر نامیم، هرگاه x در $\mathcal{A}$ دارای معکوس باشد، یعنی عنصری مانند $x^{-1} \in \mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1\ .$$

[۱۴] Operation

[۱۵] Pointwise

[۱۶] Sup-Norm