دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

حل عددی معادله پخش—جذب به روش گرهی

استاد راهنما

دکترفریبا بهرامی

استاد مشاور

دکتر صداقت شهمراد

پژوهشگر

صالحه سیف

اسفند ۱۳۸۶

نام خانوادگی دانشجو: سیف   نام: صالحه

عنوان: حل عددی معادله پخش–جذب به روش گرهی

استاد راهنما : دکترفریبا بهرامی

استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: معادلات دیفرانسیل   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ‌التحصیلی: اسفند ۱۳۸۶   تعداد صفحه: ۹۲

کلید واژه‌ها: پخش، جذب، روش گرهی، شرط مرزی، شار، جریان

چکیده

در این پایان‌نامه هدف ارائه یک روش عددی برای حل معادلات پخش–جذب دو بعدی در دامنه چندضلعی محدب و متناظر با شرط مرزی ترکیبی است. این روش به روش گرهی انتگرالی موسوم است.

$$\begin{cases} -div(D.\nabla\phi)+\sigma_a\phi=0, & in\ \ \Omega, \\ \alpha\phi+\beta(n.\nabla\phi)=S & on\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

که $D(x,y)=(D_1(x,y),D_2(x,y))$ ضریب برداری قطعه‌ای هموار، σ_a ضریب پخش و نامنفی، α و β توابعی خاص هستند که شرط مرزی را معین می‌کنند، $S=S(x,y)$ تابع منبع هموار و $n=n(x,y)$ بردار واحد نرمال بیرونی در هر نقطه $(x,y)\in\partial\Omega$ روی مرز Ω است. با این روش تقریبی از مقادیر ϕ را در روی اضلاع سلولها بدست می‌آوریم که این عمل با تبدیل PDE به ODE انجام می‌شود. این روش به نوعی یک روش گسسته‌سازی است.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه هدف ارائه یک روش عددی برای حل معادلات پخش−جذب دو بعدی در دامنه چندضلعی محدب و متناظر با شرط مرزی ترکیبی است. این روش به روش گرهی انتگرالی موسوم است.

$$\begin{cases} -div(D.\nabla\phi) + \sigma_a\phi = 0, & in \;\; \Omega; \\ \alpha\phi + \beta(n.\nabla\phi) = S, & on \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

که $D(x,y) = (D_1(x,y), D_2(x,y))$ ضریب برداری قطعه‌ای هموار، σ_a ضریب پخش و نامنفی، α و β توابعی خاص هستند که شرط مرزی را معین می‌کنند، $S = S(x,y)$ تابع منبع هموار و $n = n(x,y)$ بردار واحد نرمال بیرونی در هر نقطه $(x,y) \in \partial\Omega$ روی مرز Ω است. مسأله پخش−جذب در تقریب انتشار معادلات انتقال ذرات در پدیده‌های شکافت هسته اتم ظاهر می‌شود.

در این روش نیز مانند سایر روش‌های عددی اولین قدم شبکه‌بندی است. با قطع دادن خطوط موازی محور xها و yها شبکه‌های مستطیلی یکنواخت(یکشکل) تولید می‌شوند. مجهولات در این روش مقدار متوسط ϕ، شار هستند. مجهولات فرعی یا کمکی مقدار متوسط جریان، J روی اضلاع سلول‌ها هستند. اگر تعداد خطوط موازی محور xها(تعداد نقاط گرهی روی محور xها) را با M و موازی محور yها را با N نمایش دهیم تعداد مجهولات از جنس ϕ، $N(M+1) + M(N+1)$ می‌باشند، پس برای یافتن این تعداد مجهول به همین تعداد معادله بر حسب آنها نیاز داریم. با استفاده از شرط مرزی $2N + 2M$ معادله حاصل می‌شود. روش یافتن $N(M-1) + M(N-1)$ معادله باقیمانده به اختصار به شرح زیر است:

با اعمال عملگرهای $\frac{1}{\Delta y_j}\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}}(.)dy$ و $\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}(.)dx$ بر معادله پخش−جذب زمانی که $x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}}$ و $y_{j-\frac{1}{2}} < y < y_{j+\frac{1}{2}}$ معادله پخش−جذب تبدیل به یک ODE در سلول (i,j)ام می‌شود که با فرض معلوم بودن $\phi_{i+\frac{1}{2},j}$، $\phi_{i-\frac{1}{2},j}$، $\phi_{i,j+\frac{1}{2}}$، $\phi_{i,j-\frac{1}{2}}$، $J_{i+\frac{1}{2},j}$، $J_{i-\frac{1}{2},j}$، $J_{i,j+\frac{1}{2}}$ و $J_{i,j-\frac{1}{2}}$ مقادیر $\phi_i(y)$ و $\phi_j(x)$ را در سلول (i,j)ام بدست می‌آوریم که بترتیب مقادیر متوسط ϕ در $[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ و $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ می‌باشند. پس از انجام پاره‌ای محاسبات ریاضی بر روی ϕ_i و ϕ_j در سلول (i,j)ام به دو

رابطه هفت نقطه‌ای بر حسب مقادیر ϕ می‌رسیم. رابطه اول بر حسب مقادیر متوسط ϕ روی اضلاع سلول (i,j) و سلول $(i+1,j)$ می‌باشد در رابطه دوم بر حسب مقادیر متوسط ϕ روی اضلاع سلول (i,j) و $(i,j+1)$ می‌باشد. بنابراین دقیقاً $N(M-1)+M(N-1)$ معادله بر حسب مقادیر متوسط ϕ حاصل می‌شود.

در نهایت به یک دستگاه معادلات خطی با $N(M+1)+M(N+1)$ معادله رسیدیم که توسط نرم افزار Matlab قابل حل می‌باشد.

روش‌های گرهی دیر زمانی است که یکی از عمومی‌ترین و محبوب‌ترین روش‌های جداسازی است که در معادلات ظاهر شده در فیزیک هسته‌ای و اتمی در درون راکتورها کاربرد داشته‌است.

تجزیه وتحلیل راکتور شامل محاسبات شارش نوترون و ضرب عوامل موثر در هسته راکتور می‌باشد که معادلات حاصل معادلات پخش—جذب نامیده می‌شوند. در دو دهه گذشته، روشهای جالبی برای حل نسبتاً دقیق این معادلات ارائه شده است. در بین این روشها، روشهای گرهی، روشهای جالبتری شناخته شده‌اند. آنها بسیار سریع‌تر و دقیق‌تر از روشهای عناصر متناهی $(F.E.)$ و تفاضلات متناهی $(F.D.)$ می‌باشند[۵].

بر خلاف $F.E.$ و $F.D.$ که اساساً فرمولبندی دقیق ریاضی هستند، تقریبهای گرهی از یک دید کاملاً فیزیکی نتیجه شده اند.

در این روش شکل جالب انتخاب مجهولات (سلولی و ضلعی) باعث می‌شود این جداسازی از سایر روشهای جداسازی که در مسائل راکتور به کار برده می‌شوند جالبتر و موفقتر باشند. بعلاوه در این روش پارامتر جریان نوترون، J، به صورت خودکار و دقیق محاسبه می‌شود در حالیکه در روشهای $F.E.$ و $F.D.$ فقط مقادیر متوسط شار بدست می‌آیند. یکی دیگر از نکاتی که روش گرهی را جالب می‌سازد، سیستم خطی‌ای است که نتیجه می‌دهد و به راحتی قابل حل است.

همه اعضای خانواده روشهای گرهی، روش بسط گرهی (NEM) [۱]، روش انتگرالی گرهی (NIM) [۲]، روش تابع گرین گرهی $(NGFM)$ [۳] و روش تغییراتی گرهی(NVM) [۴] از یک روش جداسازی

هم ارز برای معادله پخش—جذب استفاده می‌کنند.

در زمینه روشهای گرهی فعالیتهای زیادی انجام شده است که به اختصار برخی از آنها را توضیح می‌دهیم.

در [٦] به مقایسه روشهای گرهی خطی، ناپیوستگی خطی و روش هرمی برای حل معادله انتقال پرداخته شده و ثابت شده که در روش گرهی با $N \times N$ نقطه گرهی دقتی مشابه روش هرمی با $4N \times 4N$ نقطه گرهی دارد.

Harrent و گروه وی فعالیتهای زیادی در زمینه تحلیل روشهای گرهی و همچنین روشهای چندگانه $F.E.$ و $F.D.$ داشته‌اند [٧]، [٨]، [٩]. در [١٠] یک مقایسه وسیع و جالب بین روشهای گرهی و $F.E.$ انجام شده است.

این پایان‌نامه بر اساس کاری است که توسط M. Asad zade و A. Sopasakis تحت عنوان $A\ NODAL\ METHOD\ FOR\ ABSORBTION-DIFFUSION\ PROBLEMS$ انجام شده است و در مجله Applied Comput Math. 5(2006), no. 1, pp. 1-14 به چاپ رسیده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل در مدل‌بندی ریاضی پدیده‌هایی که در زندگی واقعی رخ می‌دهد به ضرورت خون برای حیات مانند است. در واقع ما پدیده‌ها را با استفاده از توابع مکان، زمان یا هر دوی آنها به زبان ریاضی ترجمه می‌کنیم و نتیجه این مدل‌بندی به شکل معادله دیفرانسیل ظاهر می شود.
قلب یک معادله دیفرانسیل تابع مجهول u است که می‌تواند تابعی از یک یا چندین متغیر مستقل $x_1, x_2, x_3, ...x_n, t$ باشد. متغیرهای $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ مختصات نقطه را در فضا نشان می‌دهند. یک معادله دیفرانسیل (DE) معادله‌ای شامل متغیرهای مستقل $x_1, x_2, x_3, ...x_n, t$ و یک تابع u از این متغیرها و تعدادی مشتق u بر حسب این متغیرها است. اگر فقط یک متغیر مستقل در معادله موجود باشد آنگاه معادله دیفرانسیل یک معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود. در غیر این صورت اگر در معادله دو یا بیش از دو متغیر ظاهر شود DE یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی (PDE) نامیده می شود. مرتبه معادله دیفرانسیل بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله می‌باشد. حالت خاص یک PDE دو بعدی مرتبه دوم که در مسائل فیزیکی بسیار اتفاق می‌افتد به صورت زیر است:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \qquad (۱.۱)$$

که در آن a، b، c، d، e، f و g ممکن است توابعی از متغیرهای مستقل x و y و متغیرهای وابسته u، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشند.

(i) اگر در نقطه (x, y)، $b^2 - 4ac > 0$ باشد معادله در نقطه (x, y) هذلولوی (Hyperbolic) نامیده می‌شود.

(ii) اگر در نقطه (x, y)، $b^2 - 4ac = 0$ باشد معادله در نقطه (x, y) سهموی (Parabolic) نامیده می‌شود.

(iii) اگر در نقطه (x, y)، $b^2 - 4ac < 0$ باشد معادله در نقطه (x, y) بیضوی (Elliptic) نامیده می‌شود.

معادله درΩ هذلولوی، سهموی یا بیضوی نامیده می‌شود اگر در هر نقطه Ω هذلولوی، سهموی یا بیضوی باشد.

معادله (۱.۱) را وقتی a، b، c، d، e، f و g ثابت یا فقط تابعی از x و y باشند خطی نامند. اگر ضرایب

مشتقات مرتبه دوم توابعی ازu، $\frac{\partial u}{\partial x}$ و $\frac{\partial u}{\partial y}$ باشند ولی تابعی از مشتقات مرتبه دوم نباشند معادله را شبه خطی گویند، در غیر این صورت معادله را غیر خطی نامیم.

معادله بیضوی

معادله پواسن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f = 0$$

و معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

دو معادله بیضوی معروف هستند.

معادله سهموی

معادله انتقال حرارت یک بعدی ساده‌ترین معادله سهموی است

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

معادله هذلولوی

معادله موج یک بعدی ساده ترین معادله هذلولوی است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

در دو معادله هذلولوی و سهموی معرفی شده، $x \in [0, b]$ و $t \in [0, \infty)$ که b طول ناحیه انتشار موج یا گرماست.

همان طور که گفتیم در مطالعه اکثر پدیده‌های فیزیکی معادلات با مشتقات جزئی ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال اگر تابع u توزیع دمای حالت پایا را در یک محیط همگن همسانگرد نمایش دهد، آنگاه در هر نقطه درونی محیط، u باید در معادله لاپلاس صدق کند.

قطعاً این حقیقت به تنهایی برای تعیین u، کافی نیست زیرا معادله لاپلاس بینهایت جواب دارد. اگر

اطلاعات اضافی مثل توزیع دما، سرعت شارش گرما در مرز محیط را داشته باشیم u باید در یک شرط روی مرز نیز صدق کند که شرط مرزی نام دارد. مساله یافتن تابع u که درون محیط در معادله دیفرانسیل صدق کند و در مرز محیط در شرط مرزی صدق کند یک مساله مقدار مرزی نامیده میشود.
در این قسمت سه نوع مساله مرزی متناظر با معادله لاپلاس را بیان می کنیم که در واقع حالت خاصی از مسائل مقدار مرزی بیضوی مرتبه دوم هستند. از نظر تئوری بحث وجود و منحصر بفردی جواب و وابستگی و پیوستگی جواب با داده‌های مسأله از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که همان خوش وضع بودن یک مسأله را بیان می‌کند. برای معادله بیضوی مرتبه دوم این بحث را می‌توان در [۱۷] و [۱۲] مورد مطالعه قرار داد.

۱.۱.۱ مساله مقدار مرزی اول یا دیریلکه (Dirichlet problems)

فرض کنیم Ω یک ناحیه کراندار در R^n با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد و فرض کنیم f یک تابع تعریف شده و پیوسته روی $\partial\Omega$ باشد. مساله دیریکله مساله یافتن تابع u است که در $\bar{\Omega}$ تعریف شده و پیوسته است و تابعی هارمونیک در Ω است و روی مرز، $\partial\Omega$، مساوی f است. یا به عبارتی $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^0(\bar{\Omega})$ و در رابطه(۲.۱) و (۳.۱) صدق کند.

$$\Delta u = 0, in \ \ \Omega \tag{۲.۱}$$

$$u(x) = f(x), x \in \partial\Omega \tag{۳.۱}$$

معادله (۳.۱) شرط مرزی مساله و تابع f مقدار مرزی نامیده می‌شود.
در این تعریف که برای مساله دیریکله ارائه کردیم شرایطی که روی مرز اعمال کردیم، $\partial\Omega$ و f، بسیار ساده و ابتدایی هستند. در مسائل دیریکله همیشه دامنه کراندار نیست و ممکن است دارای شکستگی و گوشه باشد. هم‌چنین ممکن است تابع مقدار مرزی f، روی مرز Ω دارای ناپیوستگی باشد. اگر Ω سطح بیرونی یک ناحیه کراندار باشد، مساله، مساله دیریکله خارجی نامیده می‌شود.
برای درک و به یادسپاری بهتر مسأله دیریکله، بهتر است یک مثال فیزیکی منطبق بر مسأله را در یاد داشته

باشیم. فرض کنیم تابع u، توزیع دمای حالت پایا در یک محیط همگن همسانگرد که درون دامنه Ω است را توصیف می‌کند و تابع f توزیع دما در سطح محیط را توصیف می‌کند. به منظور یافتن توزیع دما، u، در درون محیط باید مسأله دیریکله (۲.۱) و (۳.۱) را حل کنیم.

مثال: مسأله دیریکله زیر را حل کنید

$$\Delta u = 0, in \ \ \Omega$$
$$u(x) = C, x \in \partial\Omega$$

Ω یک ناحیه کراندار در R^n، C یک مقدار ثابت است.

بدیهی است که تابع ثابت $u(x) = C$ جواب مسأله است.(زیرا u در $\bar{\Omega}$ پیوسته است)

اگر این مسأله، مسأله توزیع دما باشد، این بدان معنی است که اگر دمای سطح بیرونی محیط کراندار مقدار ثابت C نگه داشته شود، دمای حالت پایا در هر نقطهٔ درونی محیط نیز مقدار ثابت C خواهد بود.

۲.۱.۱ مسأله مقدار مرزی دوم یا مسأله نیومن(Neumann Problem)

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد و فرض کنید $n = n(x)$ بردار واحد عمود بر سطح $\partial\Omega$ در هر نقطه x باشد و f تابع پیوسته و تعریف شده در $\partial\Omega$ باشد.

مسأله نیومن مسأله یافتن تابع u است که u تعریف شده و پیوسته در $\bar{\Omega}$ و هارمونیک در Ω است و مشتق جهتی $\frac{\partial u}{\partial n}$ روی $\partial\Omega$ مساوی f است. یا به عبارتی مسأله نیومن مسأله یافتن تابع u است که در رابطه (۴.۱) و (۵.۱) صدق کند.

$$\Delta u = 0, in \ \ \Omega \tag{۴.۱}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x), x \in \partial\Omega \tag{۵.۱}$$

مثال فیزیکی متناظر با مسأله نیومن

فرض کنیم تابع u، توزیع دمای حالت پایا در یک محیط همگن همسانگرد که درون دامنه Ω است را توصیف می‌کند و تابع f توزیع دما در سطح محیط را توصیف می‌کند. برای مثال اگر سطح محیط عایق

باشد، تابع f مسأله نیومن تابع ثابت صفر خواهد بود.

مثال:مسأله نیومن زیر را حل کنید

$$\Delta u = 0, in \;\; \Omega$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, x \in \partial\Omega$$

که Ω یک ناحیه کراندار در R^n است. بدیهی است تابع ثابت $u(x) = c$ می‌تواند جواب این مساله باشد که c مقدار ثابت دلخواه است. پس این مساله بینهایت جواب دارد.

اگر این مساله، مساله توزیع دما باشد، این بدان معنی است که توزیع دمای حالت پایا درون محیطی با سطح عایق مقداری ثابت است. این مقدار ثابت به مقدار (بزرگی) گرمای محصور شده درون محیط بستگی دارد. برای تعیین این دمای ثابت کافی است دمای یک نقطه درون محیط را بدانیم.

۳.۱.۱ مسأله مقدار مرزی سوم یا مسأله ترکیبی (Mixed Problem)

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد و فرض کنید $n = n(x)$ بردار واحد عمود بر سطح Ω در هر نقطه x باشد وفرض کنیم α، β و f توابع تعریف شده و پیوسته روی $\partial\Omega$ باشند. مساله ترکیبی، مساله یافتن تابع u است که در $\bar{\Omega}$ تعریف شده و پیوسته باشد و در (۶.۱) و (۷.۱) صدق کند.

$$\Delta u = 0, in\Omega \qquad (۶.۱)$$

$$\alpha(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \beta(x)u(x) = f(x), x \in \partial\Omega \qquad (۷.۱)$$

شرط مرزی این مسأله که ترکیب شرایط مرزی مسائل دیریکله و نیومن است، شرط مرزی رابین نامیده می‌شود. در این بخش ما سه شرط مرزی را با معادله لاپلاس همراه کردیم و مسائل دیریکله، نیومن و ترکیبی را معرفی کردیم. برای حل یک PDE با شرط مرزی ابتدا باید خوش طرح بودن (Well posed) مساله بررسی شود. پس از این که مطمئن شدیم مساله خوش طرح است سعی می‌کنیم جواب تحلیلی [1]

[1] جواب تحلیلی یک PDE تابعی است که در هر نقطه درون S (ناحیه محدود به وسیله منحنی C که همان مرز Ω است) در PDE صدق کند و در هر نقطه روی مرز C در شرط مرزی صدق کند.

مساله را بیابیم. در برخی مسائل که نسبتاً ساده هستند با روشهای مختلف (فوریه، تابع گرین و...) می‌توان جواب تحلیلی معادله را به دست آورد، اما در برخی مسائل یافتن جواب تحلیلی با روشهای موجود امکان‌پذیر نیست یا بسیار مشکل است در این موارد از روشهای عددی مثل تفاضلات متناهی، عناصر متناهی، گرهی و... استفاده می‌کنیم ویک تقریب عددی جواب مساله را می‌یابیم در حال حاضر تعداد کمی از معادلات با شرط مرزی خاص خود حل شده‌اند. نه تنها حل‌های تحلیلی ارائه شده را نمی‌توان برای مسائل با شرط مرزی مشابه تعمیم داد بلکه در برخی مسائل شرط مرزی به حدی پیچیده است که بررسی صدق کردن جواب در شرط مرزی نیز ممکن نیست. در این حالت‌ها روش‌های تقریبی چه تقریب تحلیلی و چه تقریب عددی تنها وسیله‌هایی برای یافتن جواب می‌باشند. یک تقریب تحلیلی اطلاعات مفیدی را درباره مقادیر مرزی به دست می‌دهد ولیکن به کار بردن و استفاده از تقریب‌های تحلیلی در برخی موارد بسیار مشکل و پیچیده می‌باشند. تقریبهای عددی اساساً دو نوع هستند، روشهایی که تقریب گسسته ارائه می‌دهند مثل روش تفاضلات متناهی و روشهایی که تقریب پیوسته ارائه می‌دهند مانند روش عناصر متناهی. در بخشهای بعدی این دو روش را به اختصار توضیح می‌دهیم.

۲.۱ تفاضلات متناهی

۱.۲.۱ تفاضلات متناهی

یکی از روشهای عددی، روش تفاضلات متناهی است که یک تقریب گسسته برای مسأله ارائه می‌دهد. در این روش ناحیه تعریف معادله یا ناحیه S محدود به منحنی C، با یک سیستم شبکه بندی مستطیلی، تقسیم‌بندی می‌شود. شبکه‌بندی توسط مجموعه خطوط موازی محورxها و موازی محورyها انجام می‌شود و جواب تقریبی در نقاط اشتراک این خطوط متقاطع $P_{11}, P_{12}, ...P_{1n}, P_{21}, ..., P_{2n}, ..., P_{n1}, P_{n2}, ..., P_{nn}$ محاسبه می‌شود. این تقسیم بندی با طول گام $\delta x = h$ در محور xها و طول گام $\delta y = k$ در محور yها انجام می‌شود. این نقاط، نقاط گرهی نامیده می‌شوند. در این روش در هر نقطه درونی P_{ij} و

نقطه مرزی به جای مشتقات جزئی ظاهر شده در PDE و شرط مرزی، تقریب آنها را که از بسط تیلور در P_{ij} به دست آمده‌اند جایگزین می‌کنیم. در واقع $\frac{\partial u}{\partial x}$ با $\frac{\delta u}{\delta x}$ جایگزین می‌شود که δx یک بازه بسیار کوچک است. بنابراین برای هر n نقطه درونی P_{ij}، یک معادله جبری، معادله دیفرانسیلی را تقریب می‌زند. این روند n معادله جبری برای n مجهول $u_{11}, u_{12}, ...u_{1n}, u_{21}, ...u_{2n}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nn}$ ایجاد می‌کنند که نهایتاً به یک دستگاه خطی منجر می‌شود. از حل این دستگاه مقادیر $u_{11}, u_{12}, ...u_{1n}, u_{21}, ...u_{2n}, ..., u_{n1}, u_{n2}, ..., u_{nn}$ بدست می‌آیند که تقریبی از مقادیر u در نقاط $P_{11}, P_{12}, ...P_{1n}, P_{21}, ...P_{2n}, ..., P_{n1}, P_{n2}, ..., P_{nn}$ می‌باشند. بنابراین با اعمال این روش بر یک مسأله تقریبات گسسته از u حاصل می‌شود. این روش در مسائل بیضوی، هذلولوی و سهموی و مسائل مقدار اولیه، نیومن و ترکیبی قابل استفاده است حتی اگر دامنه منحنی باشد، البته در این صورت کار کمی پیچیده‌تر خواهد شد. برای مثال مساله $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را به روش تفاضلات متناهی صریح حل می‌کنیم.

ابتدا تقریبات $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را از بسط تیلور آنها حول x_i, t_j به دست می‌آوریم

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{P_{ij}} = (\frac{\delta^2 u}{\delta x^2})_{ij} \simeq \frac{u\{(i+1)h, jk\} - 2u\{ih, jk\} + u\{(i-1)h, jk\}}{\delta x^2} \simeq \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2} \tag{۸.۱}$$

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{P_{ij}} = (\frac{\delta u}{\delta t})_{ij} \simeq \frac{u\{ih, (j+1)k\} - u\{ih, jk\}}{\delta t} \simeq \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{k} \tag{۹.۱}$$

با جایگذاری (۸.۱) و (۹.۱) در معادله مذکور خواهیم داشت

$$u_{ij+1} = u_{ij} + r(u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j})$$

که $r = \frac{\delta t}{\delta x^2} = \frac{k}{h^2}$، قاعده بدست آمده مقدار دما در نقطه گرهی (i, j)ام، u_{ij}، را بر حسب مقادیر دمای معلوم در سطر پایین، سطر$(j-1)$ام، را نتیجه می‌دهد.

بنابراین برای به دست آوردن مجهولات در سطر اول از مقادیر معلوم در زمان صفر(مقادیر اولیه و مرزی) استفاده می‌کنیم همچنین برای به دست آوردن دما در نقاط گرهی در سطر دوم از مقادیر به دست آمده

برای سطر اول استفاده می‌کنیم و روند به همین شکل ادامه می‌یابد و در تمام نقاط گرهی محاسبه می‌گردد. چنین ضابطه‌ای که در آن مقادیر مجهول بر حسب مقادیر معلوم بیان می‌شوند را فرمول صریح می‌نامیم. یک طرح ضمنی برای PDE، یک معادله تفاضلی است که در آن محاسبه یک مقدار محوری مجهول مستلزم حل یک دستگاه خطی یا غیر خطی است. طرحهای ضمنی اگر چه از نظر محاسباتی پرزحمت‌ترند ولی یک برتری نسبت به طرحهای صریح دارند و آن، این است که در طرح صریح گام زمان باید خیلی کوچک باشد زیرا طرح زمانی معتبر است که $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$، و یک دقت معقول برای h کوچک ارائه می‌دهد در حالیکه طرح کرانک نیکلسون که یک طرح ضمنی است برای تمام مقادیر r معتبر است. در جهت بالا بردن دقت روش تلاشهای فراوانی شده است و روشهای بهتر خلق شده اند مثل کرانک نیکلسون و تقریب میانگین وزن‌دار. برای مطالعه بیشتر به [۱۱] مراجعه شود.

۲.۲.۱ خطای برشی

فرض کنیم $L(u) = 0$، L عملگری است که PDE را مشخص می‌کند و $F(\phi) = 0$ معادله تفاضلی در نقطه گرهی (i, j) را نشان می‌دهد یعنی F، $L(u)$ را تقریب می‌کند.
فرض کنیم ϕ جواب واقعی معادله تفاضلی $F(\phi) = 0$ باشد و Φ جواب حقیقی PDE باشد. حال اگر در معادله $F(\phi) = 0$ به جای ϕ، Φ در نقاط گرهی را جایگزین کنیم و اگر $F(\Phi) = O(h^p)$، آنگاه روش از مرتبه p خواهد بود.
خطای برشی $T_{ij}(\psi)$، در نقطه گرهی (ih, jk) را با رابطه $T_{ij}(\psi) = F(\psi_{ij}) - L(\psi_{ij})$ تعریف می‌کنیم. با قرار دادن Φ به جای ψ و با استفاده از $L(\Phi) = 0$، خواهیم داشت: $T_{ij}(\Phi) = F(\Phi_{ij})$.
مقدار $F(\Phi_{ij})$ همان خطای برشی در نقطه گرهی (ih, jk) است.

۳.۲.۱ سازگاری

یک معادله تفاضلی را ناسازگار یا ناسازگار با PDE گوئیم اگر وقتی ابعاد هر سلول یعنی h, k به سمت صفر میل کنند جوابی داشته باشد که به جواب یک PDE دیگر همگرا شود.

در اینجا یک تعریف عمومی از سازگاری ارائه می‌کنیم.
فرض کنیم $L(u) = 0$، L عملگری است که PDE را مشخص می‌کند و $F(\phi) = 0$ معادله تفاضلی در نقطه گرهی (i, j) را نشان می‌دهد یعنی F، $L(u)$ را تقریب می‌کند. اگر $T_{ij}(v) \to 0$ زمانی که $k, h \to 0$، گوئیم معادله تفاضلی سازگار با PDE است.
بنابراین معادله تفاضلی سازگار است اگر مقدار خطای برشی موضعی زمانیکه $h, k \to 0$ همگرا به صفر شود. در واقع سازگاری یک روش محکی است برای آنکه مناسب بودن تقریب ارائه شده توسط معادله تفاضلی را برای عملگر L بسنجیم. برای مطالعه بیشتر در این مورد به [۱۲] و [۱۳] مراجعه شود.

۳.۱ عناصر متناهی

روش عناصر متناهی یکی از روشهای حل عددی برای معادلات با شرایط مرزی می‌باشد که کامل شده روش گالرکین است. جواب تقریبی که این روش برای معادله تولید می‌کند تقریبی پیوسته است، یعنی جواب ارائه شده یک تابع است که در معادله تقریبی که این روش ارائه می‌دهد صدق می‌کند. از آنجائیکه تعیین پایه مناسب برای روش گالرکین در عمل مشکل می‌باشد، به خصوص اگر دامنه شکل معینی نداشته باشد، روش عناصر متناهی ابداع گردید که با یک قاعده مناسب برای تولید توابع پایه در دامنه‌های دلخواه بر این مشکل فائق آمد. آنچه که این روش را جالب می‌سازد این حقیقت است که توابع پایه، چند جمله‌ایهای قطعه‌ای هستند که روی قسمت کوچکی از Ω ناصفرند. بنابراین محاسبات در شکل منظم‌تری انجام می‌شود. در این بخش به اختصار این روش را توضیح می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر به [۱۲] و [۱۳] مراجعه شود.
در این روش ابتدا معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی [2] که از مرتبه $2m$ است و در دامنه Ω تعریف شده است

[2] شرایط مرزی معادله از مرتبه $2m$ به دو زیر مجموعه تقسیم می‌شوند:
۱. شرایط مرزی اساسی (Essential boundry conditions) که مرتبه آنها کمتر از m است.
۲. شرایط مرزی طبیعی (Natural boundry conditions) که مرتبه آنها بیشتر از m است.

را به فرم تغییراتی (VBVP) تبدیل می‌کنیم که در حالت کلی به شکل

$$u \in V;\ a(u,v) =< l, v >,\ \ \forall v \in V \tag{۱۰.۱}$$

است. a یک فرم دو خطی و l یک تابعک خطی است و V زیر فضایی از یک فضای هیلبرت است که با توجه به معادله، مرتبه معادله و شرایط مرزی تعیین می‌شود. برای معادله از مرتبه $2m$ فضای هیلبرت مسأله، $H^m(\Omega)$ است. این فضا یک فضای سوبولف از مرتبه m است که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) :\ D^\alpha u \in L^2(\Omega)\ \forall\ \alpha;\ |\alpha| \leq m\}.$$

به عنوان مثال اگر بخواهیم معادله $-\nabla^2 u = l$ را به شکل تغییراتی بنویسیم خواهیم داشت

$$u \in V;\ a(u,v) =< l, v >\ \ \forall v \in V$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \tag{۱۱.۱}$$

$$< l, v >= \int_\Omega l v dx dy \tag{۱۲.۱}$$

در روش عناصر متناهی به جای اینکه جواب VBVP را در فضای V که فضایی با بعد نا متناهی است جستجو کنیم، توسط توابع مستقل خطی $N_1, N_2, ..., N_G$ از V، فضای متناهی البعد V^h که زیر فضایی از V است را می‌سازیم.

اندیس h عددی است بین صفر و یک و با بعد V^h در ارتباط مستقیم است یعنی اگر G تعداد اعضای پایه V^h باشد، $h = \frac{1}{G}$. بنابراین با افزایش تعداد اعضای پایه، فضای V^h به V نزدیک شده و تقریب مناسبتری را برای جواب مسأله نتیجه می‌دهد.

پس از اینکه فضای V^h ساخته شد VBVP را روی فضای V^h مطرح می‌کنیم و تابع $u_h \in V^h$ را جستجو می‌کنیم که در رابطه زیر صدق کند

$$a(u_h, v_h) =< l, v_h >,\ \ \forall v_h \in V^h \tag{۱۳.۱}$$