دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش جبر

عنوان:

تشخیص‌پذیری گروه ساده متناهی $L_{۱۶}(۲)$ به وسیله‌گراف اول آن

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا رضایی‌زاده

استاد مشاور:
دکتر بیژن طائری

توسط:
فاطمه کریمی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه، تشخیص‌پذیری گروه ساده‌ی خطی تصویری خاص $L_{16}(2)$ توسط گراف اولش را بررسی می‌کنیم. درواقع ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه متناهی باشد آن‌گاه $\Gamma(G) = \Gamma(L_{16}(2))$ اگر و فقط اگر $G \cong L_{16}(2)$، و پاسخی مثبت بر مساله حل نشده زیر می‌آوریم؛
مسأله حل نشده: آیا یک گروه متناهی تشخیص‌پذیر به وسیله گراف اول همبند وجود دارد؟
بنابراین با اثبات این تشخیص‌پذیری اولین مثال از یک گروه متناهی با گراف اول همبند را که توسط گراف اول همبندش تشخیص‌پذیر است، می‌آوریم.
برای اثبات ابتدا شبهه تشخیص‌پذیری این گروه را نشان می‌دهیم و سپس تشخیص‌پذیری این گروه را ثابت می‌کنیم.

واژگان کلیدی

گراف اول؛ گروه خطی خاص؛ تشخیص‌پذیری؛ شبهه تشخیص‌پذیری.

دانشگاه شهرکرد
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

تشخیص‌پذیری گروه ساده‌ی خطی $L_{16}(2)$ توسط گراف اول آن

استاد راهنما
دکتر غلامرضا رضایی‌زاده
استاد مشاور
دکتر بیژن طائری
پژوهشگر
فاطمه کریمی

بهمن ۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: کریمی نام: فاطمه

عنوان: تشخیص‌پذیری گروه ساده‌ی خطی $L_{16}(2)$ توسط گراف اول آن

استاد راهنما: دکتر غلامرضا رضایی‌زاده
استاد مشاور: دکتر بیژن طائری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهرکرد دانشکده علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۷۴

واژگان کلیدی: گراف اول؛ گروه خطی خاص؛ تشخیص‌پذیری؛ شبهه تشخیص‌پذیری

چکیده

در این پایان‌نامه، تشخیص‌پذیری گروه ساده‌ی خطی تصویری خاص $L_{16}(2)$ توسط گراف اولش را بررسی می‌کنیم. درواقع ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه متناهی باشد آن‌گاه $\Gamma(G) = \Gamma(L_{16}(2))$ اگر و فقط اگر $G \cong L_{16}(2)$، و پاسخی مثبت بر مساله حل نشده زیر می‌آوریم؛
مسأله حل نشده: [۲۹] آیا یک گروه متناهی تشخیص‌پذیر به وسیله گراف اول همبند وجود دارد؟
بنابراین با اثبات این تشخیص‌پذیری اولین مثال از یک گروه متناهی با گراف اول همبند را که توسط گراف اول همبندش تشخیص‌پذیر است، می‌آوریم.
برای اثبات ابتدا شبهه‌تشخیص‌پذیری این گروه را نشان می‌دهیم و سپس توسط [۳۰] تشخیص‌پذیری این گروه را ثابت می‌کنیم.

تقدیم به بهترین های زندگیم

پدر و مادر بزرگوارم،

و همسر عزیزم.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم، **پدر و مادر بزرگوارم** که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند، و از **همسر عزیزم** که دراین راه مرا یاری کردند از صمیم قلب نهایت تشکر را دارم.

بر خود لازم می‌دانم به پاس زحمات استاد راهنمای گرامی‌ام، **جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی‌زاده** و همچنین زحمات استاد مشاور گرامی‌ام، **جناب آقای دکتر بیژن طائری** که با سعه‌ی صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان‌نامه شدند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از **جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان و آقای دکتر علیرضا نقی‌پور،** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می‌کنم.

در نهایت، از اساتید ارجمندم، **جناب آقای دکتر خدابخش حسامی، سرکار خانم دکتر تاتیانا حسامی و خانم دکتر ندا آهنجیده** که در دوران تحصیل از رهنمودهای ارزشمند ایشان بهرمند شده‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فاطمه کریمی
بهمن ۱۳۹۰

فهرست مطالب

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه تهی	ϕ
مجموعه اعداد صحیح به پیمانه‌ی p	$\mathbb{Z}_p$
میدان اعداد	$\mathbb{F}$
میدان متناهی اعداد از مرتبه‌ی $q = p^f$	$\mathrm{GF}(q)$
وجود دارد	$\exists$
به ازای هر	$\forall$
متعلق به	$\in$
به طوری‌که	$\ni$
زیرمجموعه	$\subseteq$
زیرمجموعه واقعی	$\subset$
زیرگروه	$\leq$
زیرگروه نرمال	$\rhd$
زیرگروه مشخصه	ch
یکریختی	$\cong$
هم‌نهشت	$\equiv$
پیمانه	mod
جزء صحیح عدد حقیقی x	$[x]$
m عاد می‌کند nرا	$m \mid n$
کوچک‌ترین مضرب مشترک m وn	$[m, n]$
بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک m و n	(m, n)
مرتبه‌ی گروه G	$\|G\|$

مرتبه‌ی عنصر x	$o(x)$
زیرگروه تولید شده توسط X	$\langle X\rangle$
زیرگروه مشتق G	G'
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
نرمال‌ساز H در G	$N_G(H)$
مرکز G	$Z(G)$
ماتریس همانی	I
گروه خودریختی‌های G	$\mathrm{Aut}(G)$
گروه خودریختی‌های داخلی G	$\mathrm{Inn}(G)$
گروه خودریختی‌های خارجی G	$\mathrm{Out}(G)$
زیرگروه فراتینی	$\Phi(G)$
هسته‌ی همریختی f	f
تصویر همریختی f	$\mathrm{Im}\, f$
اندیس H در G	$[G:H]$
مجموعه‌ی همه‌ی p-زیرگروه‌های سیلوی G	$\mathrm{Syl}_p(G)$
p-رادیکال G	$O_p(G)$
p-باقی‌مانده G	$O^p(G)$
مزدوج x با g	x^g
مدار شامل x در G	$\mathrm{Orb}_G(x)$
پایدارساز x در G	G_x
مجموعه‌ی مرتبه‌ی عناصر G	$\pi_e(G)$
مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های اول $\lvert G\rvert$	$\pi(G)$
گراف اول G	$\Gamma(G)$
بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مستقل از گراف اول G	$t'(G)$
تعداد مؤلفه‌های گراف اول G	$t(G)$
کوچک‌ترین n طوری‌که $p^n \equiv ۱ \mod (q)$	$\mathrm{Ord}_q p$
حاصل‌ضرب مستقیم M_iها	ΠM_i
حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم گروه‌های M و N	$M \ltimes N$

مقدمه

در این پایان‌نامه به تشخیص‌پذیری گروه خطی خاص تصویری $L_{16}(2)$ توسط گراف اول آن پرداخته‌ایم، که گراف اول هر گروه گرافی است که راس‌های آن مقسوم‌علیه‌های اول مرتبه‌ی گروه هستند و یال‌هایش از اتصال دو راس p و q در صورت وجود عضوی از گروه با مرتبه pq به دست می‌آیند.

تشخیص‌پذیری گروه‌ها، به این صورت است که یکی از ویژگی‌های گروه را مورد بررسی قرار می‌دهند و گروه‌هایی که این ویژگی را دارند را تا حد یکریختی رده‌بندی می‌کنند.

بنابراین در مورد چگونگی تشخیص‌پذیری گروه $L_{16}(2)$ توسط گراف اولش، می‌توان گفت که گروه $L_{16}(2)$ تشخیص‌پذیر توسط گراف اولش است، هرگاه از تساوی گراف اول گروهی مثل G با گراف اول گروه $L_{16}(2)$ به یکریختی این دو گروه برسیم و پس از اثبات این تشخیص‌پذیری، پاسخی بر مسأله حل نشده آمده در [۲۹] توسط زاوارنیتسین [۲]، که یکی از سؤال‌هایی است که در رده‌بندی گروه‌های متناهی مطرح است، می‌آوریم.

مسأله حل نشده: آیا یک گروه متناهی تشخیص‌پذیر به وسیله گراف اول همبند وجود دارد؟

برای این منظور گروه $L_{16}(2)$، که گروهی با گراف اول همبند است، ارائه می‌کنیم. روش اثبات این تشخیص‌پذیری به‌این طریق است که در ابتدا نشان می‌دهیم که گروه G گروهی حل‌ناپذیر است و در گام بعدی ثابت می‌کنیم که G/N به ازای زیرگروه نرمال ماکسیمال حل‌پذیر N وگروه ساده‌ی P، گروهی تقریبا ساده است، و پس از آن‌که نشان می‌دهیم که گروه $P \cong L_{16}(2)$، و ثابت می‌کنیم که گروه N بدیهی است، و با استفاده از ۹.۱.۳ ثابت می‌کنیم که گروه خطی $L_{16}(2)$ يك گروه تشخیص‌پذیر توسط گراف اول همبندش می‌باشد.

شایان ذکر است که اثبات بدیهی بودن گروه N در مقاله [۱۰] صحیح نیست، بنابراین پس از این‌که نشان می‌دهیم N درصورت غیر بدیهی بودن، یک ۲-گروه می‌باشد، با استفاده از [۳۰] به یکریختی مورد نظر می‌رسیم.

[۲] Zavarnitsin

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها

این فصل را به مرور برخی مفاهیم پایه که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند، اختصاص می‌دهیم. در بخش اول بعضی از مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها را یادآوری می‌کنیم، در بخش بعدی عمل گروه و سپس به معرفی گروه فروبنیوس می‌پردازیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

۱.۱.۱ مفاهیمی درباره‌ی گروه

تعریف ۱.۱.۱ (مرکزساز)**.** فرض کنیم G گروه و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن است. در این صورت مرکزساز S در G را که با $C_G(S)$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم؛

$$C_G(S) = \{g \in G \mid g\,x = x\,g \;\;,\;\; \forall\, x \in S\}.$$

لم ۲.۱.۱. *$C_G(S)$ زیرگروه G است.*

برهان. به مرجع [۳۲] لم ۱۰.۲.۱ مراجعه شود. □

تعریف ۳.۱.۱ (مرکز گروه)**.** مرکز گروه G عبارت‌است از:

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x).$$

تعریف ۴.۱.۱ (نرمال‌ساز)**.** فرض کنیم G یک گروه متناهی و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از G است. در این صورت نرمال‌ساز S در G را با $N_G(S)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$N_G(S) = \{g \in G \mid g^{-1}Sg = S\}.$$

گزاره ۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی و S زیرمجموعه‌ای ناتهی از آن است. در این صورت $N_G(S)$ زیرگروه G است و همچنین $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$.*

برهان. به مرجع [۳۲] گزاره ۵.۲.۴ مراجعه شود. □

گزاره ۶.۱.۱ ($N-C$)**.** *فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن است. در این صورت گروه $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $\mathrm{Aut}(H)$ یکریخت است.*

برهان. به مرجع [۳۲] گزاره ۶.۲.۸ مراجعه شود. □

تعریف ۷.۱.۱. (گروه خودریختی‌های خارجی)

گروه خارج‌قسمتی $\frac{\mathrm{Aut}(G)}{\mathrm{Inn}(G)}$ را گروه خودریختی‌های خارجی G می‌نامیم و آن را با $\mathrm{Out}(G)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۸.۱.۱. *برای هر گروه G داریم $\frac{G}{Z(G)} \cong \mathrm{Inn}(G)$.*

برهان. به مرجع [۳۲] گزاره ۳.۲.۸ مراجعه شود. □

گزاره ۹.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه است و x و y عضوهای از آن هستند به طوری‌که $xy = yx$. در این صورت در G عضوی از مرتبه‌ی $[o(x), o(y)]$ وجود دارد.*

برهان. به مرجع [۳۲] مسئله ۳.۳.۲ مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۱.۱ (کشی)**.** *فرض کنیم G یک گروه متناهی و p عدد اولی است که $|G|$ را عاد می‌کند. در این صورت G دارای عنصری از مرتبه‌ی p است.*

برهان. به مرجع [۳۲] لم ۲.۳.۹ مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۱.۱ (زیرگروه فراتینی)**.** فرض کنیم G یک گروه است. در این صورت اشتراک زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G نامیم و آن را با $\Phi(G)$ نشان می‌دهیم (اگر G زیرگروه ماکسیمال نداشته باشد، $\Phi(G)$ را برابر با G تعریف می‌کنیم).

تعریف ۱۲.۱.۱ (p-گروه)**.** فرض کنیم p یک عدد اول است. در این صورت گروه متناهی G را یک p-گروه می‌نامیم هرگاه مرتبه‌ی G توانی از عدد اول p باشد.

گزاره ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم G یک p-گروه و M زیرگروه ماکسیمالی از آن است. در این صورت M در G نرمال است و $[G:M] = p$.*

برهان. به مرجع [۳۲] گزاره ۸.۲.۹ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۴ (p-گروه آبلی‌مقدماتی)**.** فرض کنیم p یک عدد اول است. گروه متناهی G را یک p-گروه آبلی‌مقدماتی می‌نامیم هرگاه به صورت $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ باشد.

لم ۱.۱.۱۵. *فرض کنیم G یک p-گروه متناهی است. در این صورت $\frac{G}{\Phi(G)}$ یک p-گروه آبلی‌مقدماتی است.*

برهان. به مرجع [۳۲] نتیجه ۱۰.۱.۱۳ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم p عددی اول است. گروه G را یک p'-گروه گوییم، اگر مرتبه‌ی آن عددی باشد که نسبت به p اول است.

تعریف ۱.۱.۱۷ (گروه ساده)**.** گروه غیربدیهی G را ساده گوییم، هرگاه زیرگروه سره‌ی نرمال نابدیهی نداشته باشد.

قضیه ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی pqr است، که در آن p, q, r اعدادی اول هستند. در این صورت G ساده نیست.*

برهان. به مرجع [۳۲] گزاره ۱۰.۱.۱۰ مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۹ (گروه تقریبا ساده)**.** گروه غیربدیهی G را تقریبا ساده گوییم، هرگاه گروه ساده‌ی ناآبلی مثل S وجود داشته باشد، به طوری‌که $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$.

لم ۱.۱.۲۰. *فرض کنیم G یک گروه است. در این صورت داریم:*

(۱) *اشتراک زیرگروه‌های نرمال G، زیرگروه نرمال G است؛*

(۲) *اگر $N \trianglelefteq G$ و $H \leq G$، آن‌گاه NH زیرگروه G بوده و $N \cap H \trianglelefteq H$ و $\langle N, H\rangle = NH$؛*

(۳) *اگر $N \trianglelefteq G$ و $H \trianglelefteq G$، آن‌گاه $NH \trianglelefteq G$.*

برهان. به مرجع [۳۲] لم ۶.۲.۴ مراجعه شود. □

ملاحظه ۱.۱.۲۱. *یادآوری می‌کنیم که در گروه متناهی نابدیهی G، زیرگروه نابدیهی N زیرگروه نرمال مینیمال G است، اگر به ازای هر خودریختی داخلی φ_g از G داشته باشیم $\varphi_g(N) \subseteq N$ و اگر $H \trianglelefteq G$ و $H \leq N$، آن‌گاه N یا $H = 1$.*

همچنین زیرگروه H از G را زیرگروه مشخصه‌ی G می‌نامیم، هرگاه به ازای هر خودریختی φ از G داشته باشیم $\varphi(H) \subseteq H$.

به وضوح هر زیرگروه مشخصه از G زیرگروهی نرمال در G است.

گروه G را مشخصا ساده نامیم، هرگاه تنها زیرگروه‌های مشخصه‌اش زیرگروه بدیهی و خود G باشند.

همچنین هر گروه مشخصا ساده‌ی متناهی برابر با حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های ساده‌ی یکریخت است.

و چون هر زیرگروه مشخصه از زیرگروه نرمال N در G نرمال می‌شود واضح است که زیرگروه‌های نرمال مینیمال در G مشخصا ساده هستند (به مرجع [۳۲] قضیه ۱۱.۲.۸ مراجعه شود).

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم G گروهی متناهی است. در این صورت حاصل‌ضرب همه‌ی زیرگروه‌های نرمال مینیمال G را با $\mathrm{Socle}(G)$ نشان می‌دهیم و به آن بنیان G می‌گوییم (در گروه بدیهی G داریم $\mathrm{Socle}(G) = ۱$).

ملاحظه ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی غیر بدیهی است. در این صورت $\mathrm{Socle}(G)$ حاصل‌ضرب مستقیم بعضی از زیرگروه‌های نرمال مینیمال G است.*

گزاره ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه متناهی است. در این صورت هر زیرگروه نرمال مینیمال G، یا به ازای عدد اول pای، مساوی حاصل‌ضرب‌مستقیم گروه‌های یکریخت با $\mathbb{Z}_p$ است و یا این‌که با حاصل‌ضرب‌مستقیم گروه‌های ساده‌ی ناآبلی برابر است.*

برهان. به مرجع [۳۲] نتیجه ۱۳.۲.۸ مراجعه شود. □

تعریف ۲۵.۱.۱ (سری نرمال و سری زیرنرمال)**.** فرض کنیم G یک گروه است. در این صورت یک سری زیرنرمال برای G عبارت‌است از زنجیری از زیرگروه‌های G به صورت $\cdots \leq G_{i-۱} \leq G_i \leq G_{i+۱} \cdots$ که در آن $G_{i-۱} \trianglelefteq G_i$ به ازای هر i برقرار باشد.

در تعریف بالا گروه‌های خارج‌قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ را عامل‌های سری می‌نامیم.

چنان‌چه به ازای هر i داشته باشیم $G_i \trianglelefteq G$، سری فوق را سری نرمال می‌نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱ (گروه حل‌پذیر)**.** هرگاه گروه G گروهی باشد که سری زیرنرمالی به صورت

$$۱ = G_۰ \trianglelefteq G_{i-۱} \trianglelefteq G_i \trianglelefteq \cdots G_n = G$$

با عوامل آبلی داشته باشد، آن‌گاه گروه G را گروهی حل‌پذیر می‌نامیم.

قضیه ۲۷.۱.۱. *هر p-گروه متناهی، گروهی حل‌پذیر است.*

برهان. با استفاده از گزاره ۱۳.۱.۱، زیرگروه ماکسیمال M از G وجود دارد که در G نرمال است و $\frac{G}{M} \cong \mathbb{Z}_p$، بنابراین $\frac{G}{M}$ گروهی دوری و آبلی می‌باشد. ازطرفی M نیز به دلیل p-گروه بودن زیرگروه نرمال ماکسیمالی از اندیس p دارد، و این روند تا جایی ادامه دارد که به زیرگروه بدیهی برسیم. بنابراین یک سری زیرنرمال از زیرگروه‌های G با عوامل آبلی خواهیم داشت و حل‌پذیری G ثابت می‌شود. □

لم ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم H و K زیرگروه‌های نرمال و حل‌پذیری از G هستند. در این صورت HK نیز زیرگروهی نرمال و حل‌پذیر از G است.*

برهان. به مرجع [۳۲] گزاره ۶.۲.۱۲ مراجعه شود. □

لم ۲۹.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی نرمال از آن است. در این صورت $(\frac{G}{H})^{(n)}$ (مشتق nام گروه خارج‌قسمتی G/H) برای هر عدد صحیح نامنفی برابر با $\frac{G^{(n)}H}{H}$ است.*

برهان. به مرجع [۳۲] لم ۴.۲.۱۲ مراجعه شود. □

لم ۳۰.۱.۱. *هر گروه از مرتبه‌ی pqr حل‌پذیر می‌باشد.*

برهان. با استفاده از لم ۲۹.۱.۱ و ۱۸.۱.۱ ثابت می‌شود. □

قضیه ۳۱.۱.۱ (فایت-تامپسون)**.** *هر گروه متناهی از مرتبه فرد، حل‌پذیر است.*

برهان. به مرجع [۲۱] مراجعه شود. □

گزاره ۳۲.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی است. در این صورت به ازای هر عامل اول $|G|$ مانند p، گروه G زیرگروه ماکسیمالی مانند M دارد که $[G:M]$ توانی از p است.*

برهان. به مرجع [۳۲] لم ۸.۳.۱۲ مراجعه شود. □

تعریف ۳۳.۱.۱. گروه G را p-حل‌پذیر گوییم، هرگاه دارای سری نرمالی باشد که عوامل آن p-گروه یا p'-گروه باشند.

تعریف ۳۴.۱.۱ (سری مرکزی)**.** فرض کنیم G یک گروه است. یک سری مرکزی برای G عبارت‌است از زنجیری از زیرگروه‌های G به صورت $\cdots \leq G_{i-1} \leq G_i \leq G_{i+1} \leq \cdots$ به طوری‌که برای هر i داشته باشیم $G_i \trianglelefteq G$ و همچنین:

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}}).$$

تعریف ۳۵.۱.۱ (گروه پوچ‌توان)**.** هرگاه گروه G گروهی باشد که برای آن سری مرکزی به صورت

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_{i-1} \trianglelefteq G_i \trianglelefteq \cdots G_n = G$$

وجود داشته باشد، گروه G را گروهی پوچ‌توان نامیم.

لم ۳۶.۱.۱. *شرایط زیر برای گروه متناهی و نابدیهی G معادل هستند:*

(۱) G *پوچ‌توان است؛*

(۲) *هر زیرگروه سیلوی G در G نرمال است؛*

(۳) G *با حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود یکریخت است.*

برهان. به مرجع [۳۲] قضیه ۱۰.۱.۱۲ مراجعه شود. □

لم ۳۷.۱.۱. *هر گروه پوچ‌توان، گروهی حل‌پذیر است.*

برهان. با استفاده از لم ۳۶.۱.۱، لم ۲۷.۱.۱ و لم ۲۸.۱.۱ ثابت می‌شود. □

تعریف ۳۸.۱.۱ (π-عدد)**.** فرض کنیم π مجموعه‌ای از اعداد اول است. در این صورت عدد n را π-عدد گوییم هرگاه هر مقسوم‌علیه اول عدد n عضو مجموعه‌ی πباشد. در غیر این صورت n را یک π'-عدد گوییم.

تعریف ۳۹.۱.۱ (π-گروه)**.** فرض کنیم G گروهی با عضوهایی از مرتبه‌ی متناهی است. در این صورت G را یک π-گروه نامیم اگر مرتبه‌ی هر عضو آن یک π-عدد باشد.

تعریف ۴۰.۱.۱ (π-زیرگروه هال)**.** فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروهی از آن است. در این صورت زیرگروه H را یک π-زیرگروه هال از G نامیم هرگاه H یک π-گروه بوده و $[G:H]$ یک π'-گروه باشد.

تعریف ۴۱.۱.۱ (π-رادیکال)**.** فرض کنیم G گروهی متناهی و Λ یک کلاس از π-گروه‌ها و شامل گروه بدیهی است. در این صورت بزرگ‌ترین π-زیرگروه نرمال G مانند H، که عضو کلاس Λ است، یک زیرگروه مشخصه‌ی G است که آن را یک π-رادیکال G نامیم و با $O_\pi(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۲.۱.۱ (π-باقی‌مانده)**.** فرض کنیم G گروهی متناهی و Λ یک کلاس از π-گروه‌ها و شامل گروه بدیهی است. در این صورت کوچک‌ترین زیرگروه نرمال G مانند K، به طوری که G/K یک π-گروه متعلق به کلاس Λ باشد، یک زیرگروه مشخصه‌ی G است که آن را با $O^\pi(G)$ نشان می‌دهیم و $G/O^\pi(G)$ را یک π-باقی‌مانده می‌نامیم.

لم ۴۳.۱.۱. *فرض کنیم Λ یک کلاس از π-گروه‌ها است. در این صورت برای هر گروه متناهی G، π-باقی‌مانده و π-رادیکال وجود دارد.*

برهان. به مرجع [۱۵] لم ۶.۳.۲ مراجعه شود. □

ملاحظه ۴۴.۱.۱. *در تعاریف ذکر شده مجموعه‌ی π، می‌تواند فقط شامل عدد اول p باشد، و به ترتیب به طریق مشابه p'-عدد، p-گروه، p'-گروه، p-زیرگروه هال، p-رادیکال و p-باقی‌مانده تعریف می‌شوند.*

قضیه ۴۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی از مرتبه mn است که در آن $(m,n) = ۱$. در این صورت:*

(۱) *G دارای یک زیرگروه هال از مرتبه‌ی m است؛*

(۲) *هر دو زیرگروه هال G از مرتبه‌ی m مزدوجند.*

برهان. به مرجع [۳۲] قضیه ۵.۴.۱۵ مراجعه شود. □

تعریف ۴۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و H زیرگروهی از آن است. در این صورت زیرگروه K از G را که در شرایط زیر صدق کند، متمم H می‌نامیم؛

(۱) $K \cap H = ۱$؛

(۲) $G = KH$.

نتیجه ۴۷.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی و H یک زیرگروه هال آن است. در این صورت H در G دارای متمم است.*

برهان. به مرجع [۳۲] نتیجه ۶.۴.۱۵ مراجعه شود. □

تعریف ۴۸.۱.۱ (گروه جایگشتی)**.** فرض کنیم Ω یک مجموعه است. در این صورت هر زیرگروه $\mathbb{S}_\Omega$ را یک گروه جایگشتی می‌نامیم ($\mathbb{S}_\Omega$ گروه جایگشت‌ها روی Ω است).

تعریف ۴۹.۱.۱ (نمایش جایگشتی)**.** فرض کنیم G یک گروه متناهی و Ω مجموعه‌ای شامل n عضو است. در این صورت هر همریختی $\rho : G \longrightarrow \mathbb{S}_\Omega$ را یک نمایش جایگشتی G از درجه n می‌نامیم. و در حالتی که ρ یک‌به‌یک باشد آن را نمایش باوفا می‌نامیم.

قضیه ۵۰.۱.۱ (برنساید)**.** *فرض کنیم G گروهی متناهی و P یک p-زیرگروه سیلوی آن است. در این صورت اگر $P \leq Z(N_G(P))$، آن‌گاه P یک متمم نرمال در G دارد.*

برهان. به مرجع [۳۲] قضیه ۷.۳.۱۳ مراجعه شود. □

ملاحظه ۵۱.۱.۱. *یادآوری می‌کنیم اگر P یک p-گروه دوری از مرتبه‌ی p^m باشد، آن‌گاه:*

$$|\mathrm{Aut}(P)| = \phi(p^m) = p^{m-۱}(p-۱).$$

به مرجع [۳۲] قضیه ۱۲.۱.۴ مراجعه شود (ϕ تابع اویلر است).