دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

وجود دو جواب متناوب مثبت برای یک مدل بیماری مسری SIR غیر خودگردان

استاد راهنما

دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور

دکترحسین خیری

پژوهشگر

رسول شفقی ملکی

شهریور۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحیم

پروردگارا:

تو همواره مرا به هر آن چه زمینه ساز پیوند بیش تری با تو باشد،
توفیق دادی
هرگاه با نیایشی تو را خواندم، با پاسخ مثبت پذیرا شدی،
چون درخواستی کردم، بی دریغ بخشیدی،
اگر طاعتی کردم، با شکر ارج نهادی،
و اگر شکرگزار نعمتی شدم، مرا نعمت افزودی!
این همه، نعمت های بی شمارت را به اوج کمال رساند و
و مرا بیش از پیش از نیکی ات بهره مند ساخت!
چنین است که تو را پی در پی تسبیح می گویم
که از کاستی وارسته ای.

خدایا:

پدر و مادرم را شفیع من گردان، اگر پیش از من آمرزیده‌ای،

و مرا شفیع ایشان گردان، اگر پیش از ایشان آمرزیده‌ای،

تا من و پدر و مادرم،

در سایه‌ی لطف و رافت تو،

در سرای کرامت و جایگاه مغفرت و رحمت تو،

همنشین هم گردیم،

که تو را بخشایش بزرگ است و نعمت دیرساله.

تقدیم به

وجود مقدس پدر و مادرم

سپاس گزاری...

حمد و سپاس خداوندی را که اگر معرفت حمد خویش را از بندگان خود دریغ می‌داشت، در برابر آن‌همه نعمت‌ها که از پس یکدیگر بر آنان فرو می‌فرستاد، آن نعمت‌ها به کار می‌داشتند و لب به سپاسش نمی‌گشادند. به رزق او، فراخ روزی می‌جستند و شکرش نمی‌گفتند. و اگر چنین می‌بودند، از دایره انسانیت برون می‌افتادند و در زمره‌ی چهارپایان در می‌آمدند.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **علی اصغر جدیری اکبرفام**، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که همواره با رویی گشاده و سعه‌ی صدر در تمام مراحل آماده سازی این رساله یار و یاورم بودند.

از سرکار خانم دکتر **فریبا بهرامی** که داوری این رساله را با نهایت دقت انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از استاد گرانمایه‌ام جناب آقای دکتر **حسین خیری** که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل نمودند، کمال تشکر را دارم. از جناب آقای **حسین فضلی** (دانشجوی دکتری معادلات دیفرانسیل) و جناب آقای **هادی عابدی** (دانشجوی ارشد آنالیز ریاضی) به پاس همه زحماتی که در سال‌های اخیر در جهت راهنمائی من کشیدند کمال تشکر را دارم.

در پایان از خانواده عزیزم، که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، صمیمانه سپاس‌گزاری می‌کنم.

رسول شفقی ملکی

شهریور ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: شفقی ملکی نام: رسول
عنوان: وجود دو جواب متناوب مثبت برای یک مدل بیماری مسری SIR غیر خودگردان
استاد راهنما : دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام استاد مشاور : دکترحسین خیری
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۵۳
کلید واژه‌ها: پایداری، جواب های متناوب مثبت، درجه انطباق، نرخ انتقال دوره ای

چکیده

در این پایان نامه یک مدل SIR غیر-خودگردان با نرخ سرایت متناوب و نرخ انتقال ثابت فرموله می‌شود. با استفاده از قضیه تداوم از نظریه‌ی درجه انطباق، شرط کافی برای وجود حداقل دو جواب متناوب مثبت بدست آورده می‌شود. پایداری جواب متناوب برای افراد مستعد پذیرش بیماری بررسی گشته و سپس شبیه‌سازی عددی برای نشان دادن نتایج تئوری ارائه می‌گردد.

فهرست مطالب

مقدمه

مدل‌های ریاضی ابزارهای مهمی برای تحلیل گسترش و کنترل بیماری‌ها هستند. مطالعه‌ی این مدل‌های ساده، برای به دست آوردن اطلاعات مهم از جنبه‌های نهفته‌ی انتشار بیماری‌ها، حیاتی است. به‌دست آوردن درک واضحی از تشابه و اختلاف رفتار جواب مدل‌ها، از اهداف تحلیل مدل‌های اپیدمولوژی می‌باشد، که اجازه می‌دهد مدل‌ها را برای کاربردهای مختلفی بکار بگیریم. این مدل‌ها نتایج مفهومی مهمی را ارائه می‌دهند. به عنوان مثال عدد تولیدمثل پایه، در مورد سرعت انتشار بیماری‌ها اطلاعات زیادی می‌دهد.

یکی از جنبه‌های مهم اپیدمولوژی، کاربرد طرح‌های کنترل برای از بین بردن بیماری‌هاست. مدل‌های بیماری‌ها برای مقایسه، عملی کردن، تخمین، بهینه کردن تصمیم‌های مختلف، پیشگیری و برنامه‌ریزی کنترل، ضروری هستند. این مدل‌ها در ارائه مقدار واکسن تزریقی مورد نیاز برای کنترل بیماری‌ها بسیار مفید می‌باشند. به عنوان مثال سازمان سلامت جهانی، (WHO)[1] برنامه‌ای برای مقابله با آبله که حدود ۱۵ میلیون نفر در هر سال به آن مبتلا می‌شدند، در سال ۱۹۶۷ آغاز نمود. استراتژی سازمان سلامت جهانی شامل برنامه‌های واکسیناسیون گسترده، نظارت بر شیوع و کنترل این شیوع با برنامه‌های واکسیناسیون محلی بود. آبله در نهایت به‌صورت جهانی در سال ۱۹۷۷ ریشه‌کن شد. این برنامه یک موفقیت فوق‌العاده در واکسیناسیون عمومی بود. در مدل‌سازی ریاضی، این دو جنبه به سرعت تماس و سرعت شیوع بیماری که به ترتیب، به تعداد میانگین تماس بین افراد لازم برای انتقال بیماری و تعداد موارد جدید در بیماری نسبت به واحد زمان خلاصه می‌شود.
محتوای این پایان‌نامه شامل اساسی ترین مدل SIR برای مسائل مورد پژوهش است. برای تغییر یا گسترش مدل‌ها که شامل استراتژی های مداخله و کنترل مختلف، ساختار جمعیت و یا ویژگی های دیگر می‌توان مدل‌هایی را با تغییر پارامترهای مختلف و یا افزایش و کاهش متغیرها و پارامترها ارائه داد. به این ترتیب ما می‌توانیم ابزار شبیه‌سازی تعاملی و جذاب بسازیم. ما امیدواریم که که این اثر برای کسانی

[1] World Health Organization

که علاقه مند در مدل سازی بیماری‌ها هستند، مفید باشد.
پایان‌نامه حاضر از مقاله‌ای تحت عنوان

Existence of two periodic solutions for a non-autonomous SIR epidemic model

از

Zhenguo Bai ، Yicang Zhou

تهیه گردیده است [۱۸].

فصل ۱
قضایا و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

در این قسمت تعاریف اولیه و مقدماتی از آنالیز ریاضی که کاربردی اساسی در بیان مفاهیم آنالیز مجانبی و کاربردهای آن دارند را ارائه می‌دهیم.

۱.۱.۱ مفاهیم اولیه آنالیز

تعریف ۱.۱.۱. اگر $A \subseteq \mathbb{C}$ یك مجموعه باز و $f : A \to \mathbb{C}$ تعریف شده باشد، گوییم f در نقطه z_0 دارای مشتق است هرگاه $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ موجود باشد. این حد را با $f'(z_0)$ و یا با $\frac{df}{dz}(z_0)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. در فضای متریک (X,d) مجموعه‌ی $A \subset X$ را **باز** می‌گوییم هرگاه هر عضو آن مرکز گوی بازی است که این گوی زیر مجموعه‌ی A باشد. به زبان نمادهای ریاضی:

$$A \text{ مجموعه باز است} \Longleftrightarrow \forall x \in A, \exists r > 0; B(x,r) \subseteq A$$

تعریف ۳.۱.۱. فضای متریک (X,d) و دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ در E مفروض‌اند. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ را **دنباله‌ی کوشی** گوییم هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}:\ m,n \geq N \Rightarrow d(x_m,x_n) < \varepsilon.$$

این را به اختصار به صورت $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_m,x_n) = 0$ و یا $d(x_m,x_n) \to 0$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X یک فضای متریک و $A \subseteq X$ باشد و خانواده τ از زیر مجموعه‌های X را یک پوشش باز برای A گوییم هرگاه $A \subseteq \bigcup_{A_\alpha \in \tau} A_\alpha$.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید $X = \mathbb{R}$، $D = (0,1)$ و

$$\tau = \{B_n : B_n = [0, 1 - \frac{1}{n}),\quad n \geqslant 2\}.$$

در این صورت τ یک پوشش باز برای D است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای متری و $E \subseteq X$ باشد.

- نقطه‌ی p یک **نقطه‌ی حدی** مجموعه‌ی E است هرگاه **هر** همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.
- E **باز** است هرگاه هر نقطه‌ی E یک نقطه‌ی درونی‌اش باشد.
- E **بسته** است هرگاه هر نقطه‌ی حدی E یک نقطه از E باشد.
- E **کراندار** است هرگاه عددی حقیقی چون M و نقطه‌ای مثل $q \in X$ باشند بطوریکه به ازای هر $p \in E$، $d(p, q) < M$.
- یک **همسایگی** نقطه‌ی p مجموعه‌ای است مثل $N_r(p)$، مرکب از تمام نقاطی چون q که $d((p, q) < r$. عدد r **شعاع** $N_r(p)$ نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. مجموعه E را **فشرده** گوییم هرگاه هر پوشش باز آن یک زیر پوشش متناهی داشته باشد یعنی اگر $E \subset \bigcup_{A_n \in I} A_n$ آنگاه $n_k, ..., n_1$ای وجود داشته باشند به طوری‌که $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

ویژگی ۸.۱.۱. ۱. *هر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}^k$ فشرده است.*

۲. *در هر فضای متریک، هر مجموعه متناهی فشرده است.*

۳. *هر زیر مجموعه نامتناهی از $[a, b]$ فشرده است هرگاه یک نقطه حدی در $[a, b]$ داشته باشد.*

تعریف ۹.۱.۱. منظور از $C^m[a, b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a, b]$ هستند که تا مرتبه mام مشتق‌پذیر بوده و پیوسته باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱. تابع $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ را در z_0 **تحلیلی** گوییم هرگاه $f'(z)$ در یك همسایگی z_0 موجود باشد. f را در $\mathcal{A}$ تحلیلی گوییم هرگاه در تمام نقاط $\mathcal{A}$ تحلیلی باشد. تابع f را در بازه $[a, b]$ تحلیلی گوییم هرگاه در هر نقطه‌ی واقع در درون این بازه تحلیلی باشد.

۲.۱.۱ همگرایی نقطه به نقطه و همگرایی یکنواخت

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع حقیقی در بازه $[a,b]$ باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به بازه $[a,b]$، دنباله عددی $\{f_n(x)\}$ همگرا به $f(x)$ باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

در این صورت، گوییم دنباله توابع $\{f_n\}$, **نقطه به نقطه** روی بازه $[a,b]$ همگرا به $f(x)$ است. به عبارت دیگر، دنباله توابع $\{f_n\}$ را نقطه به نقطه روی بازه $[a,b]$ همگرا گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $x \in [a,b]$ عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

برقرار باشد.

مثال ۱۲.۱.۱. دنباله توابع $\{f_n\}$ را روی بازه $[۰,۱]$ با ضابطه

$$f_n = \frac{nx}{nx+۱}, n = ۱,۲,۳,...$$

در نظر بگیرید. به ازای $x = ۰$, دنباله متناظر $\{f_n(۰)\}$ همگرا به صفر است. اما به ازای x هایی که $x \in [۰,۱],$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+۱} = ۱.$$

پس به ازای $x \in (۰,۱]$ ، دنباله $\{f_n(x)\}$ همگرا به ۱ است. بدین ترتیب دنباله $\{f_n(x)\}$ نقطه به نقطه روی بازه $[۰,۱]$ ، به تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x = ۰, \\ ۱ & ۰ < x \leq ۱ \end{cases}$$

همگراست.

تعریف ۱۳.۱.۱. گوییم دنباله‌ای از توابع حقیقی مانند $\{f_n\}$ روی بازه $[a,b]$ به طور **یکنواخت** به تابع f همگراست هرگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که $n \geqslant N$ نامساوی $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ را به ازای هر $x \in [a,b]$ ایجاب کند.

مثال ۱۴.۱.۱. دنباله توابع $\{f_n\}$ را بازه $[۰,۱]$ با ضابطه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^۲}{nx+۱}, n = ۱,۲,۳...$$

در نظر بگیرید. به ازای $x = ۰$ ، دنباله متناظر $\{f_n(۰)\}$ همگرا به صفر است و به ازای هر $x \in (۰,۱]$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x.$$

بدین ترتیب، دنباله $\{f_n\}$ نقطه به نقطه روی بازه $[۰,۱]$ همگرا به تابع $f(x) = x$ است. بعلاوه، همگرایی $\{f_n\}$ روی این بازه یکنواخت است؛ زیرا به ازای $\varepsilon > ۰$ دلخواه، اگر داشته باشیم

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^۲}{nx+۱} - x\right| = \frac{x}{nx+۱} \leq \varepsilon,$$

آنگاه n باید در نامساوی $n \geqslant \frac{۱}{\varepsilon} - \frac{۱}{x}$ صدق کند. اما به ازای $x \in [۰,۱]$ داریم

$$\frac{۱}{\varepsilon} - \frac{۱}{x} \leqslant \frac{۱}{\varepsilon} - ۱.$$

بنابراین، با انتخاب $N \geqslant [\frac{۱}{\varepsilon}]$ (فقط وابسته به ε ، نه به x)، به ازای $n \geqslant N$ و به ازای هر $x \in [۰,۱]$ ، نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

برقرار است.

نتیجه ۱۵.۱.۱. *واضح است که همگرایی یکنواخت همگرایی نقطه‌وار را نتیجه می‌دهد اما عکس این مطلب درست نمی‌باشد.*

۳.۱.۱ بیان مفاهیم $codim$ و $coker$

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر W یک زیرفضای خطی فضای برداری V با بعد متناهی باشد، در اینصورت $codimW$ در V بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$codimW = dimV - dimW.$$

- $codim$ بصورت یک مفهوم نسبی است که تنها برای یک جسم در داخل جسم دیگر بکار می‌رود.
- هیچ $codim$ هم‌بعدی برای یک فضای برداری وجود ندارد. تنها $codim$ ای که وجود دارد، زیرفضای برداری همان فضای برداری است.

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر W یک زیرفضای خطی (احتمالاً با بعد نامتناهی) فضای برداری V باشد، در اینصورت $codimW$ در V، بعد فضای خارج قسمتی V/W (احتمالاً با بعد نامتناهی) می‌باشد. یعنی داریم:

$$codimW = dimV/W = dimcoker(W \to V) = dimV - dimW.$$

۴.۱.۱ نگاشت فردهلم

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید X و Z فضاهای باناخ باشند، $L : DomL \subset X \to Z$ یک نگاشت خطی باشد. نگاشت L را نگاشت فردهلم از شاخص صفر گوییم هرگاه $\mathrm{dim\ Ker\ L} = \mathrm{codim\ Im\ L} < +\infty$ و ImL در Z بسته باشد.

۲.۱ قضایای کاربردی

قضیه ۱.۲.۱ (آرزلا-اسکولی). [۱] *فرض کنیم $\Re$ گردایه‌ای از توابع مختلط هم‌پیوسته نقطه به نقطه کراندار بر فضای متری X بوده و X شامل زیر مجموعه چگال شمارش پذیر E باشد. در این صورت f_n در $\Re$*

[۱] Arzela-Ascoli

زیر دنباله‌ای دارد که بر هر زیرمجموعه فشرده X به طور یکنواخت همگراست.

برهان. رجوع شود .[۱۷] □

قضیه ۲.۲.۱ (همگرایی تسلطی لبگ). *فرض کنیم $f_n : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ دنباله‌ای از توابع (لبگ) اندازه‌پذیر هستند بطوریکه حد نقطه به نقطه‌ی $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وجود دارد. همچنین فرض کنید تابع انتگرال‌پذیر $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ چنان موجود باشد که $\forall x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f_n(x)| \leq g(x)$. در اینصورت f انتگرال‌پذیر است و*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mu.$$

برهان. رجوع شود .[۱۷] □

۳.۱ سیستم‌های دینامیکی و مفاهیم اولیه

یک سیستم دینامیکی مجموعه‌ای از همه‌ی مسیرهای ممکن فضای فازی است و در آن با دانستن وضعیت فعلی می‌توان وضعیت آینده‌ی سیستم را تعیین کرد.
هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح سنجیده شود یعنی $t \in \mathbb{Z}$، سیستم دینامیکی را گسسته گویند.
اگر زمان به‌طور پیوسته تغییر کند یعنی $t \in \mathbb{R}$، سیستم دینامیکی را پیوسته گویند.
در حالت کلی سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیر خطی. سیستم $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \dot{x} = X(x)$ را سیستم خطی از مرتبه n گویند هرگاه X نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیر خطی باشد، آن را سیستم غیر خطی می‌گویند.

تعریف ۱.۳.۱. سیستم‌هایی به صورت

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که X_1 و X_2 دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته برای هر (x_1, x_2) هستند و متغیر مستقل t فقط در دیفرانسیل dt در سمت چپ بوده و به طور صریح در توابع X_1 و X_2 در سمت راست ظاهر نشده است، **سیستم خودگردان** نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. سیستم خودگردان

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{۲.۱}$$

را در نظر بگیرید. یک **نقطه بحرانی** (نقطه تعادل، نقطه ثابت)، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = X(x) = 0$، صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

- نقطه بحرانی x_0 از (۲.۱) را **پایدار** گویند هرگاه برای هر همسایگی N از x_0 یک همسایگی کوچک‌تر $N' \subseteq N$ از x_0 وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مسیری که وارد N' می‌شود، با افزایش t در N باقی بماند.

- نقطه بحرانی x_0 از (۲.۱) را **به‌طور مجانبی پایدار** گویند هرگاه پایدار باشد و یک همسایگی N از x_0 وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مسیری که وارد N می‌شود با افزایش t، به x_0 میل کند.

- نقطه بحرانی x_0 از (۲.۱) را **پایدار خنثی** گویند هرگاه پایدار باشد اما به‌طور مجانبی پایدار نباشد.

- نقطه بحرانی x_0 از (۲.۱) را **ناپایدار** گویند هرگاه پایدار نباشد.

تعریف ۳.۳.۱. نقطه تعادل x_0 از (۲.۱) را **زینی** گویند هرگاه یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند.

۱. دو مسیر وجود داشته باشد که وقتی $t \to +\infty$، از دو جهت مخالف به x_0 نزدیک و وارد شوند و دو مسیر دیگر نیز وجود داشته باشند که وقتی $t \to -\infty$ ، از دو جهت مخالف به x_0 نزدیک و وارد شوند. این مسیرها، **جداکننده‌ها** یا **جهت‌های اصلی** نامیده می‌شوند و چهار ناحیه ایجاد می‌کنند.

۲. در هرکدام از چهار ناحیه، تعداد نامتناهی مسیر وجود داشته باشد که به x_0 به اندازه دلخواه نزدیک شوند اما وقتی $t \to +\infty$ یا $t \to -\infty$، به x_0 وارد نشوند.

تعریف ۴.۳.۱. نقطه تعادل x_0 از سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ را **گره** گویند هرگاه یک همسایگی از x_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیر C در این همسایگی، وقتی $t \to +\infty$ یا $t \to -\infty$، به x_0 نزدیک شده و به آن وارد شود.

تعریف ۵.۳.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم خطی $\dot{x} = Ax$،

- به‌طور مجانبی پایدار است هرگاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه چندجمله‌ای مشخصه A، منفی باشند؛
- پایدار خنثی است هرگاه مقادیر ویژه، موهومی محض باشند؛
- ناپایدار است هرگاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه چندجمله‌ای مشخصه A، مثبت باشند.

۱.۳.۱ خطی‌سازی در نقاط ثابت

فرض کنید (ξ, η) نقطه ثابت سیستم غیرخطی

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

باشد. خطی‌سازی این سیستم در نقطه (ξ, η) در فرم ماتریسی به‌صورت $\dot{y} = Jy$ است که در آن

$$J = \left. \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{(x_1, x_2) = (\xi, \eta)},$$

ماتریس ژاکوبین سیستم غیرخطی (۲.۱) است.

تعریف ۶.۳.۱. تابع حقیقی $V : N \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را که در آن N یک همسایگی از $0 \in \mathbb{R}^2$ است، در N، **معین مثبت (منفی)** گویند هرگاه به ازای هر $x \in N \setminus \{0\}$، $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) و $V(0) = 0$ باشد.

تعریف ۷.۳.۱. تابع حقیقی $V : N \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را که در آن N یک همسایگی از $0 \in \mathbb{R}^2$ است، در N، **نیم‌معین مثبت (منفی)** گویند هرگاه به ازای هر $x \in N \setminus \{0\}$، $V(x) \geq 0$ ($V(x) \leq 0$) و $V(0) = 0$ باشد.

قضیه ۸.۳.۱. ***(پایداری لیاپانوف)*** *فرض کنید سیستم غیرخطی $\dot{x} = X(x)$، $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ یک نقطه ثابت در مبدأ دارد. اگر یک تابع حقیقی V در همسایگی N از مبدأ وجود داشته باشد به‌طوری‌که*

- *$\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ موجود و پیوسته باشند؛*
- *V معین مثبت باشد؛*

دراین‌صورت

(۱) اگر $\dot{V}$ نیم‌معین منفی باشد، آنگاه مبدأ یک نقطه ثابت پایدار سیستم است.

(۲) اگر $\dot{V}$ معین منفی باشد، آنگاه مبدأ یک نقطه ثابت به‌طور مجانبی پایدار است.

(۳) اگر $\dot{V}$ معین مثبت باشد، آنگاه مبدأ ناپایدار است.