



دانشکده علوم پایه

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی از مرتبه‌ی کسری به روش تجزیه‌ی آدومیان

توسط:

محمد رضا ژیان پور

استاد راهنما:

دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا هوشمند اصل

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی کاربردی

تیر ۱۳۹۰

باسمه تعالی

تعهدنامه‌ی اصالت اثر

اینجانب محمدرضا ژیان پور متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و ماخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.

محمدرضا ژیان پور

امضاء

فرم تائیدیهی هیئت داوران

تقدیم به

پدر فداکارم

مادر مهربانم

همسر صبورم

قدردانی

قلم در دست گرفتن از من که مخلوقم و استعانت از او که خالق است، شروع در سخن گفتن از من که مامورم و توفیق تا پایان از او که آمر است، اگر چه قلم در دست گرفتن و سخن بر ورق آوردن نیز از اوست و همه چیز از اوست.

بر خود می دانم از زحمات بی دریغ پدر و مادر فداکارم که امید رسیدن به افق های روشن را در وجودم شکوفا ساختند، از همسر مهربانم که در این راه همراه و مشوقم بودند، از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر حمید مسگرانی که بدون کمک و مساعدت ایشان انجام این پایان نامه برایم مقدور نبود و همواره مرا از راهنمایی های بی دریغ خود بهره مند ساختند،

از استاد مشاورم جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که در طول این پایان نامه مرا از پیشنهادهای سازنده و ارزنده ی خود بهره مند ساختند،

از دوست عزیزم آقای جمال برزگری شریف آباد که در طول این دوره همواره مرا راهنمایی فرمودند و از تمام هم کلاسی هایم تشکر و قدردانی را داشته باشم.

از خداوند مهربان برای همه ی این عزیزان سعادت و سلامت را آرزومندم.

تیر ۱۳۹۰

محمدرضا ژیان پور

چکیده

در این پایان نامه که در چهار فصل نگاشته شده است، پس از پرداختن به روش‌های تجزیه‌ی آدومیان اصلاح شده و دومرحله‌ای، به کاربرد این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل و دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی کسری پرداخته می‌شود و ضمن مقایسه با روش‌های دیگر از جمله روش تکرار تابعی به اهمیت و نقش این روش در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: روش تجزیه‌ی آدومیان اصلاح شده، دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی کسری و روش تکرار تابعی.

فهرست مندرجات

۲	۱ تعاریف و مفاهیم پایه
۳	۱.۱ مقدمه
۴	۲.۱ مشتق کسری گرانولد-لت نیکوف
۹	۱.۲.۱ رابطه‌ی انتگرال‌گیری
۱۰	۲.۲.۱ انتگرال‌های مرتبه‌ی دلخواه
۱۴	۳.۲.۱ مشتق‌های مرتبه‌ی دلخواه
۱۸	۴.۲.۱ مشتق کسری $(t - a)^\beta$
۲۰	۵.۲.۱ ترکیب مشتق کسری با مشتق مرتبه‌ی صحیح
۲۱	۶.۲.۱ ترکیب مشتقات کسری
۲۶	۳.۱ مشتق کسری ریمان-لیوویل
۲۷	۱.۳.۱ یکپارچگی مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح

۲۸	انتگرال مرتبه‌ی دلخواه	۲.۳.۱
۳۲	مشتق‌گیری مرتبه‌ی دلخواه	۳.۳.۱
۳۶	مشتق کسری $(t - a)^\beta$	۴.۳.۱
۳۷	ترکیب مشتق کسری با مشتق مرتبه‌ی صحیح	۵.۳.۱
۳۸	ترکیب مشتقات کسری	۶.۳.۱
۴۰	مشتق کسری کاپوتو	۴.۱
۴۴	مشتق کسری دنباله‌ای	۵.۱
۴۶	مشتق کسری چپ و راست	۶.۱
۴۷	خصوصیات مهم مشتق کسری	۷.۱
۴۷	خطی بودن	۱.۷.۱
۴۸	قاعده‌ی لایب‌نیتز برای مشتقات کسری	۲.۷.۱
۵۳	مشتق کسری تابع مرکب	۳.۷.۱
	مشتق کسری ریمان-لیوویل از انتگرال وابسته به یک	۴.۷.۱
۵۴	پارامتر	

۲ روش تجزیه‌ی آدومیان و کاربرد آن

۵۶	مقدمه	۱.۲
----	-------	-----

۵۸ روش تجزیه‌ی آدومیان	۲.۲
۵۹ چند جمله‌ای‌های آدومیان	۳.۲
۶۶ کاربرد روش تجزیه‌ی آدومیان	۴.۲
۶۶ معادلات انتگرال فردهلم خطی	۱.۴.۲
۶۷ روش تجزیه‌ی آدومیان	۲.۴.۲
۶۸ معادلات انتگرال فردهلم غیر خطی	۳.۴.۲
۶۸ روش تجزیه‌ی آدومیان	۴.۴.۲
۷۰ معادلات انتگرال خطی ولترا	۵.۴.۲
۷۱ روش تجزیه‌ی آدومیان	۶.۴.۲
۷۲ معادلات انتگرال غیر خطی ولترا	۷.۴.۲
۷۲ روش تجزیه‌ی آدومیان	۸.۴.۲
۷۴ روش تجزیه‌ی اصلاح شده	۹.۴.۲
	روش تجزیه‌ی آدومیان برای حل معادلات انتگرال	۱۰.۴.۲
۷۸ دیفرانسیل فردهلم	
	روش تجزیه‌ی آدومیان برای حل معادلات انتگرال	۱۱.۴.۲
۸۰ دیفرانسیل ولترا	
	روش تجزیه‌ی آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل	۱۲.۴.۲
۸۲ خطی و غیر خطی	
۸۹ روش دو مرحله‌ای تجزیه‌ی آدومیان (TSADM)	۱۳.۴.۲

- ۱۴.۴.۲ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی . . . ۹۲
- ۱۵.۴.۲ کاربرد روش تجزیه‌ی آدومیان برای حل دستگاه
معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول ۹۳

- ۵.۲ روش تکرار تابعی برای حل معادلات غیرخطی ۹۷
- ۱.۵.۲ معادله‌ی انتگرال ولترای غیر خطی ۹۸
- ۲.۵.۲ مثال‌های عددی ۱۰۰

۳ حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی از

مرتبه‌ی کسری

۱۰۴

- ۱.۳ مقدمه ۱۰۵

- ۲.۳ چند تعریف و ویژگی از حسابان کسری ۱۰۶

- ۳.۳ روش تجزیه‌ی آدومیان برای معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه‌ی

- کسری ۱۰۷

- ۱.۳.۳ آنالیز حل معادله‌ی دیفرانسیل خطی از مرتبه‌ی کسری

- با ضرایب ثابت به روش آدومیان ۱۰۹

- ۲.۳.۳ حل چند مثال ۱۱۲

- ۴.۳ حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی از مرتبه‌ی کسری با روش آدومیان ۱۱۵
 ۱.۴.۳ حل چند مثال عددی ۱۱۶

۴ حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل با مرتبه‌ی

کسری ۱۲۱

- ۱.۴ مقدمه ۱۲۲

- ۲.۴ دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری و روش تجزیه‌ی آدومیان ۱۲۳

- ۱.۲.۴ مثال‌های عددی ۱۲۵

- ۳.۴ روش تجزیه‌ی آدومیان اصلاح شده برای حل دستگاه معادلات

- دیفرانسیل کسری ۱۳۱

- ۱.۳.۴ مثال‌های عددی ۱۳۳

- ۴.۴ روش تکرار تابعی ۱۳۸

- ۵.۴ نتیجه‌گیری ۱۴۰

A تعاریف مشتقات کسری ۱۴۱

	Riemann-Liouville fractional derivatives with the	B
۱۴۳	lower terminal at 0	
	Riemann-Liouville fractional derivatives with the	C
۱۴۵	lower terminal at $-\infty$	
۱۴۷	اثبات رابطه‌ی	D
۱۴۸	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	E
۱۵۸	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	F

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۲ ۹۷

فهرست نمودارها

۱۰۲	نمودار ۱-۲
۱۰۴	نمودار ۲-۲
۱۰۴	نمودار ۳-۲
۱۰۴	نمودار ۴-۲
۱۲۱	نمودار ۱-۳
۱۲۱	نمودار ۲-۳
۱۲۸	نمودار ۱-۴
۱۳۱	نمودار ۲-۴
۱۳۱	نمودار ۳-۴
۱۳۸	نمودار ۴-۴
۱۴۰	نمودار ۵-۴
۱۴۰	نمودار ۶-۴

مقدمه

مبدا زمانی پیدایش مفهوم مشتق کسری به اواخر قرن هفدهم برمی گردد. در آن زمان لایب نیتز و نیوتن اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال را گسترش داده بودند. لایب نیتز نماد $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ را برای مشتق n ام $f(x)$ معرفی کرده بود.

هوپیتال در نامه‌ای سوالی را مطرح می‌کند که مفهوم $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ وقتی که $n = \frac{1}{4}$ باشد، چیست؟

لایب نیتز در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ در جواب نامه‌ی هوپیتال می‌نویسد پارادوکس آشکاری است که ارزش آن بعداً مشخص خواهد شد. لذا تولد حسابان کسری را می‌توان از این تاریخ به حساب آورد. در سده‌های بعدی نظریه‌ی حسابان کسری (مشتق کسری و انتگرال کسری) مورد توجه قرار گرفت و تعاریف مختلفی از آن ارائه شد.

مشتق کسری گرانولد-لت نیکوف که در سال ۱۸۶۷ توسط گرانولد از پاراگوئه و لت نیکوف از مسکو در سال ۱۸۶۸ معرفی کردند، مشتق کسری ریمان-لیوویل در سال ۱۹۷۴ توسط اولدهام و اسپانیر و در سال ۱۹۹۳ توسط میلر و رایس معرفی شد و مشتق کسری کاپوتو توسط کاپوتو در سال ۱۹۷۶ ارائه گردید. قابل ذکر است که مشتق کسری کاپوتو تعریف بسیار کاربردی در زمینه‌ی علوم و مهندسی دارد [۱۵].

در چند دهه‌ی گذشته، دانشمندان و مهندسين علوم کاربردی به لزوم پرداختن به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری پی برده‌اند. از جمله مباحثی که مرتبط با این مفهوم مطرح هستند عبارتند از:

سیستم‌های ویسکولاستیک، الکترو-قطبش الکتروولیت، الکتروشیمی، پردازش سیگنال و فرآیندهای انتشار، پردازش، کنترل و ...

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ مقدمه

حسابان کسری به معنای محاسبه‌ی اعداد کسری و محاسبه‌ی مشتق و انتگرال معمولی نیست، بلکه نامی است برای نظریه‌ی انتگرال‌ها و مشتق‌ها از هر مرتبه‌ی دلخواه که تعمیمی برای مشتق از مرتبه‌ی n و انتگرال n -گانه است. دنباله‌ی نامتناهی از انتگرال‌های n -گانه و مشتق‌های مرتبه‌ی n زیر را در نظر بگیرید:

$$\dots, \int_a^t d\tau_2, \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \dots$$

نماد بکاررفته برای مشتق از مرتبه‌ی حقیقی دلخواه α توسط دیویس به صورت زیر پیشنهاد شد:

$${}_a D_t^\alpha f(t)$$

نام کوتاه مشتق از مرتبه‌ی دلخواه را مشتق کسری می‌نامند. واژه‌ی انتگرال کسری در این پایان‌نامه انتگرال از مرتبه‌ی دلخواه که متناظر با مقدار منفی α است. نماد مجزایی را برای انتگرال کسری به کار نمی‌بریم، انتگرال کسری از مرتبه‌ی $\beta > 0$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$${}_a D_t^{-\beta} f(t)$$

در این فصل سعی بر این است که عملگر مشتق از مرتبه‌ی صحیح را به مشتق از مرتبه‌ی ناصحیح تبدیل کنیم، در این راستا تعریف‌های مختلفی از انواع مشتقات کسری بیان می‌شود و ویژگی‌های این عملگرها را نشان می‌دهیم تا در فصل‌های بعدی از آنها استفاده کنیم [۱۶].

۲.۱ مشتق کسری گرانولد-لتنیکوف

تابع پیوسته $y = f(t)$ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف، مشتق مرتبه اول $f(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (1.2.1)$$

مشتق مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \quad (2.2.1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) به دست می‌آید:

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (3.2.1)$$

و با ادامه این روند داریم:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \quad (4.2.1)$$

که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (5.2.1)$$

اکنون با تعمیم روابط (۱.۲.۱) تا (۴.۲.۱) برای عدد صحیح مثبت دلخواه p داریم:

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (6.2.1)$$

که n عدد صحیح می باشد.

برای $p \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \quad (7.2.1)$$

که ضرایب بعد از $\binom{p}{r}$ برابر صفر است.

برای مقادیر صحیح منفی p تعریف می کنیم:

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p+1)\dots(p+r-1)}{r!} \quad (8.2.1)$$

پس می توان نوشت:

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)\dots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \binom{p}{r} \quad (9.2.1)$$

در رابطه (6.2.1) به جای p ، $-p$ قرار می دهیم:

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n \binom{p}{r} f(t-rh) \quad (10.2.1)$$

که p عدد صحیح مثبت می باشد.

اگر n ثابت باشد آن گاه $f_h^{(-p)}(t)$ وقتی $h \rightarrow 0$ از لحاظ حدی به صفر میل می کند. برای

رسیدن به مقدار حدی مخالف صفر $h = \frac{t-a}{n}$ را در نظر می گیریم که a ثابت حقیقی است و

مقدار حد $f_h^{(-p)}(t)$ نامتناهی یا نامتناهی است. پس:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (11.2.1)$$

که ${}_a D_t^{(-p)}$ اپراتوری است که روی تابع $f(t)$ عمل می کند و a و t حدود پایانی این اپراتور

می باشد. چندین حالت خاص را بررسی می کنیم؛ برای $p = 1$ داریم:

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t-rh) \quad (12.2.1)$$

حال اگر $t - nh = a$ و $f(t)$ تابع پیوسته در نظر گرفته شود، نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (13.2.1)$$

برای حالتی که $p = 2$ باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2 \times 3 \times \dots \times (2+r-1)}{r!} = r+1$$

پس:

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^n h(r+1) f(t-rh) \quad (14.2.1)$$

با در نظر گرفتن $t+h=y$ داریم:

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y-rh) \quad (15.2.1)$$

حال اگر $h \rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (16.2.1)$$

اگر $h \rightarrow 0$ آنگاه $y \rightarrow t$.

حال برای $p = 3$ رابطه برای ${}_a D_t^{-p}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3 \times 4 \times \dots \times (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1 \times 2}$$

پس:

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \times 2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2) h^2 f(t-rh) \quad (17.2.1)$$

با در نظر گرفتن $t+h=y$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1 \times 2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1) h^2 f(y-rh) \quad (18.2.1)$$