دانشکده علوم پایه

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی از مرتبه‌ی کسری به روش تجزیه‌ی آدومیان

توسط:

محمدرضا ژیان‌پور

استاد راهنما:

دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمنداصل

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی کابردی

تیر ۱۳۹۰

باسمه تعالی

تعهدنامه‌ی اصالت اثر

اینجانب **محمدرضا ژیان‌پور** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و ماخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

محمدرضا ژیان‌پور

امضاء

فرم تاییدیه‌ی هیئت داوران

تقدیم به

پدر فداکارم

مادر مهربانم

همسر صبورم

قدردانی

قلم در دست گرفتن از من که مخلوقم و استعانت از او که خالق است، شروع در سخن گفتن از من که ماموم و توفیق تا پایان از او که آمر است، اگر چه قلم در دست گرفتن و سخن بر ورق آوردن نیز از اوست و همه چیز از اوست.

بر خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ پدر و مادر فداکارم که امید رسیدن به افق‌های روشن را در وجودم شکوفا ساختند، از همسر مهربانم که در این راه همراه و مشوقم بودند،
از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر حمید مسگرانی که بدون کمک و مساعدت ایشان انجام این پایان‌نامه برایم مقدور نبود و همواره مرا از راهنمایی‌های بی‌دریغ خود بهره‌مند ساختند،
از استاد مشاورم جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل که در طول این پایان‌نامه مرا از پیشنهادهای سازنده و ارزنده‌ی خود بهره‌مند ساختند،
از دوست عزیزم آقای جمال برزگری شریف‌آباد که در طول این دوره همواره مرا راهنمایی فرمودند و از تمام هم‌کلاسی‌هایم تشکر و قدردانی را داشته باشم.
از خداوند مهربان برای همه‌ی این عزیزان سعادت و سلامت را آرزومندم.

تیر ۱۳۹۰

محمدرضا ژیان‌پور

چکیده

در این پایان‌نامه که در چهار فصل نگاشته شده است، پس از پرداختن به روش‌های تجزیه‌ی آدومیان اصلاح شده و دومرحله‌ای، به کاربرد این روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل و دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی کسری پرداخته می‌شود و ضمن مقایسه با روش‌های دیگر از جمله روش تکرار تابعی به اهمیت و نقش این روش در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: روش تجزیه‌ی آدومیان اصلاح شده، دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی کسری و روش تکرار تابعی.

فهرست مندرجات

فهرست جدول‌ها

فهرست نمودارها

مقدمه

مبدا زمانی پیدایش مفهوم مشتق کسری به اواخر قرن هفدهم بر می‌گردد. در آن زمان لایب‌نیتز و نیوتن اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال را گسترش داده بودند. لایب‌نیتز نماد $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ را برای مشتق nام $f(x)$ معرفی کرده بود.

هوپیتال در نامه‌ای سوالی را مطرح می‌کند که مفهوم $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ وقتی که $n = \frac{۱}{۲}$ باشد، چیست؟

لایب‌نیتز در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ در جواب نامه‌ی هوپیتال می‌نویسد پارادوکس آشکاری است که ارزش آن بعداً مشخص خواهد شد. لذا تولد حسابان کسری را می‌توان از این تاریخ به حساب آورد. در سده‌های بعدی نظریه‌ی حسابان کسری (مشتق کسری و انتگرال کسری) مورد توجه قرار گرفت و تعاریف مختلفی از آن ارائه شد.

مشتق کسری گرانولد—لت‌نیکوف که در سال ۱۸۶۷ توسط گرانولد از پاراگوئه و لت‌نیکوف از مسکو در سال ۱۸۶۸ معرفی کردند، مشتق کسری ریمان—لیوویل در سال ۱۹۷۴ توسط اولدهام و اسپانیر و در سال ۱۹۹۳ توسط میلر و رایس معرفی شد و مشتق کسری کاپوتو توسط کاپوتو در سال ۱۹۷۶ ارائه گردید. قابل ذکر است که مشتق کسری کاپوتو تعریف بسیار کاربردی در زمینه‌ی علوم و مهندسی دارد[۱۵].

در چند دهه‌ی گذشته، دانشمندان و مهندسین علوم کاربردی به لزوم پرداختن به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری پی برده‌اند. از جمله مباحثی که مرتبط با این مفهوم مطرح هستند عبارتند از:

سیستم‌های ویسکولاستیک، الکترود—قطبش الکترولیت، الکتروشیمی، پردازش سیگنال و فرآیندهای انتشار، پردازش، کنترل و ....

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ مقدمه

حسابان کسری به معنای محاسبه‌ی اعداد کسری و محاسبه‌ی مشتق و انتگرال معمولی نیست، بلکه نامی است برای نظریه‌ی انتگرال‌ها و مشتق‌ها از هر مرتبه‌ی دلخواه که تعمیمی برای مشتق از مرتبه‌ی n و انتگرال $n-$گانه است. دنباله‌ی نامتناهی از انتگرال‌های $n-$گانه و مشتق‌های مرتبه‌ی n زیر را در نظر بگیرید:

$$\ldots, \int_a^t d\tau_۲, \int_a^{\tau_۲} f(\tau_۱)d\tau_۱, \int_a^t f(\tau_۱)d\tau_۱, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^۲f(t)}{dt^۲}, \ldots$$

نماد بکار رفته برای مشتق از مرتبه‌ی حقیقی دلخواه α توسط دیویس به صورت زیر پیشنهاد شد:

$$_aD_t^{\alpha}f(t)$$

نام کوتاه مشتق از مرتبه‌ی دلخواه را مشتق کسری می‌نامند.
واژه‌ی انتگرال کسری در این پایان‌نامه انتگرال از مرتبه‌ی دلخواه که متناظر با مقدار منفی α است. نماد مجزایی را برای انتگرال کسری به کار نمی‌بریم، انتگرال کسری از مرتبه‌ی $\beta > ۰$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$_aD_t^{-\beta}f(t)$$

در این فصل سعی بر این است که عملگر مشتق از مرتبه‌ی صحیح را به مشتق از مرتبه‌ی ناصحیح تبدیل کنیم، در این راستا تعریف‌های مختلفی از انواع مشتقات کسری بیان می‌شود و ویژگی‌های این عملگرها را نشان می‌دهیم تا در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده کنیم[۱۶].

۲.۱ مشتق کسری گرانولد–لت‌نیکوف

تابع پیوسته $y = f(t)$ را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف، مشتق مرتبه اول $f(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \qquad (۱.۲.۱)$$

مشتق مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^۲ f}{dt^۲} &= \lim_{h\to ۰} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\{\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-۲h)}{h}\} \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{f(t) - ۲f(t-h) + f(t-۲h)}{h^۲} \end{aligned} \qquad (۲.۲.۱)$$

با استفاده از روابط (۱.۲.۱) و (۲.۲.۱) به دست می‌آید:

$$f'''(t) = \frac{d^۳ f}{dt^۳} = \lim_{h\to ۰} \frac{f(t) - ۳f(t-h) + ۳f(t-۲h) - f(t-۳h)}{h^۳} \qquad (۳.۲.۱)$$

و با ادامه این روند داریم:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h^n} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \qquad (۴.۲.۱)$$

که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\dots(n-r+۱)}{r!} \qquad (n \in I\!N) \qquad (۵.۲.۱)$$

اکنون با تعمیم روابط (۱.۲.۱) تا (۴.۲.۱) برای عدد صحیح مثبت دلخواه p داریم:

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{۱}{h^p} \sum_{r=۰}^{n} (-۱)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \qquad (۶.۲.۱)$$

که n عدد صحیح می‌باشد.

برای $p \in I\!N$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p} \qquad (۷.۲.۱)$$

که ضرایب بعد از $\binom{p}{p}$ برابر صفر است.

برای مقادیر صحیح منفی p تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+۱)\dots(p+r-۱)}{r!} \qquad (۸.۲.۱)$$

پس می‌توان نوشت:

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-۱)\dots(-p-r+۱)}{r!} = (-۱)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} \qquad (۹.۲.۱)$$

در رابطه (۶.۲.۱) به جای p، $-p$ قرار می دهیم:

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=۰}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \qquad (۱۰.۲.۱)$$

که p عدد صحیح مثبت می‌باشد.

اگر n ثابت باشد آن‌گاه $f_h^{(-p)}(t)$ وقتی $h \to ۰$ از لحاظ حدی به صفر میل می‌کند. برای رسیدن به مقدار حدی مخالف صفر $h = \frac{t-a}{n}$ را در نظر می‌گیریم که a ثابت حقیقی است و مقدار حد $f_h^{(-p)}(t)$ متناهی یا نامتناهی است. پس:

$$\lim_{\substack{h\to ۰ \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \qquad (۱۱.۲.۱)$$

که $D_t^{(-p)}$ اپراتوری است که روی تابع $f(t)$ عمل می‌کند و a و t حدود پایانی این اپراتور می‌باشد. چندین حالت خاص را بررسی می‌کنیم؛ برای $p = ۱$ داریم:

$$f_h^{(-۱)}(t) = h \sum_{r=۰}^{n} f(t-rh) \qquad (۱۲.۲.۱)$$

حال اگر $t - nh = a$ و $f(t)$ تابع پیوسته در نظر گرفته شود، نتیجه می‌گیریم که:

$$\lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} f_h^{(-۱)}(t) = {}_a D_t^{-۱} f(t) = \int_۰^{t-a} f(t-z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau \qquad (۱۳.۲.۱)$$

برای حالتی که $p = ۲$ باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ r \end{bmatrix} = \frac{۲ \times ۳ \times \ldots \times (۲ + r - ۱)}{r!} = r + ۱$$

پس:

$$f_h^{(-۲)}(t) = h \sum_{r=۰}^{n} h(r+۱) f(t - rh) \qquad (۱۴.۲.۱)$$

با در نظر گرفتن $t + h = y$ داریم:

$$f_h^{(-۲)}(t) = h \sum_{r=۱}^{n+۱} (rh) f(y - rh) \qquad (۱۵.۲.۱)$$

حال اگر $h \to ۰$ داریم:

$$\lim_{\substack{h\to ۰\\ nh=t-a}} f_h^{(-۲)}(t) = {}_a D_t^{-۲} f(t) = \int_۰^{t-a} z f(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)d\tau \qquad (۱۶.۲.۱)$$

اگر $h \to ۰$ آنگاه $y \to t$.

حال برای $p = ۳$ رابطه برای aD_t^{-p} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ r \end{bmatrix} = \frac{۳ \times ۴ \times \ldots \times (۳ + r - ۱)}{r!} = \frac{(r+۱)(r+۲)}{۱ \times ۲}$$

پس:

$$f_h^{(-۳)}(t) = \frac{h}{۱ \times ۲} \sum_{r=۰}^{n} (r+۱)(r+۲) h^۲ f(t - rh) \qquad (۱۷.۲.۱)$$

با در نظر گرفتن $t + h = y$ می‌توانیم بنویسیم:

$$f_h^{(-۳)}(t) = \frac{h}{۱ \times ۲} \sum_{r=۱}^{n+۱} r(r+۱) h^۲ f(y - rh) \qquad (۱۸.۲.۱)$$