دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض(آنالیز)

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض(آنالیز)

عنوان

تصاویر قاب ها

(Projections Of Frames)

استاد راهنما

دکتر محمدحسن فاروقی

استاد مشاور

دکتر حمید واعظی

پژوهشگر

داود عبادی

دی ۸۶

الله

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

حیدر بابا،
خزان یئلی یارپاقلاری توکنده
بولوت داغدان یئنیب کنده کوچنده
شیخ الاسلام گوزل سسین چکنده
نیسکیللی سئوز اورکلره دیئردی
آقاشلاردا الله ها باش ایئردی ؛

حیدربابا،
گویلر بیتون دوماندی
گوننریمیز بیئربیریننن یاماندی
بیئربیریزدن آیریلمائین آماندی
یاخشیلیقی الیمیزدن آلیبلار
یاخشی بیئزی یامان گونه سالیبلار ؛

حیدربابا،
مرداوغوللار دوغگونان
نامردلرین بیرنین نارین اوغگونان
حیدربابا دنیا یالان دونیادی
سلیماننان نوحدان قالان دونیادی
اوغول دوقان دردە سالان دونیادی
هر کیمسیه هر نه وئریب آلیبدی
افلاطوننان بیئر قوری آد قالیبدی .

تقدیم به مادر و پدر دلسوز و مهربانم که همچون شمع سوزان در عمق وجودم میدرخشند .

تقدیر و تشکر

منت خدای را عزوجل ، که طاعتش موجب قربت است و به شکراندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می رود ممد حیات است و چون برمی آید، مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

اعملو آل **داود** شکرا و قلیل من **عبادی** الشکور. (گلستان سعدی)

بارالهی؛ در تمامی حالات مرا فروتن قرار ده و نسبت به تقسیم روزیت، در تمام احوال راضی و قانع گردان.

بار الهی؛ تو کاشف هر راز و علمی و فریادم را جز تو پاسخگوئی نیست، پس راهم ده.

بار الهی؛ اگر تو خواهی همه آن کنم که تو خواهی.

با تشکر فراوان از تمامی معلمان و اساتید گرانقدرم از دوره ابتدائی تاکنون به خصوص جناب آقای دکتر محمد حسن فاروقی که راهنمای بنده بودند و با سعه صدر، زحمات و بدیهایم را تحمل کردند، کمال تشکر را دارم و از خداوند بزرگ برای ایشان سلامتی و طول عمر با عزت خواستارم. از جناب آقای دکتر حمید واعظی که زحمت مشاوره این کار را بر عهده داشتند، کمال تشکر و سپاس را دارم.

از جناب آقای دکترحسین امامعلی پور که محبت نموده و زحمت داوری پایاننامه اینجانب را پذیرفتند و همچنین از مدیر محترم گروه آموزشی ریاضی محض، جناب آقای دکتر حسن مهتدی فر نهایت تشکر را دارم.

در پایان از مسئولین محترم کتابخانه، امور دانشجویان، امور آموزشی دانشکده ریاضی و کلیه عزیزانی که در این انجام، مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی می نمایم.

با تشکر

داود عبادی

دی ٨٦

نام خانوادگی : عبادی **نام** : داود

عنوان پایاننامه : تصاویر قاب ها

استاد راهنما : دکترمحمد حسن فاروقی

استاد مشاور : دکتر حمید واعظی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز **دانشگاه :** تبریز

دانشکده: علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** دی ماه ۸۶ **تعداد صفحه:** ۷۹

کلید واژه ها : قاب ، تصویر قاب ، رتبه ، عملگر قاب ، عملگر آنالیز ، عملگر ترکیب ، موجک ، دنباله بسل .

چکیده :

ابتدا در فصل اول این پایان نامه، مفاهیم مقدماتی و پیشینه از فضاهای هیلبرت و چگونگی یکرختی هر فضای هیلبرت با یک فضای هیلبرت دیگر را بحث می کنیم، سپس در فصل دوم به بررسی انواع قاب ها و نقش موجک ها در فضاهای هیلبرت می پردازیم و سرانجام درفصل سوم، قاب ها را به فضاهای متناهی برده و با تصویر آنها روی یک زیرفضای بهینه خواص آنها را بهبود می بخشیم.

فهرست صفحه

مقدمه:

مقدمه :

ایده نمایش یک تابع برحسب مجموعه کاملی از توابع، برای اولین بار توسط ژوزف فوریه، ریاضیدان و فیزیکدان بین سالهای ۱۸۰۲– ۱۸۰٦ ، طی رساله ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع بکار گرفته شد. در واقع برای آنکه یک تابع $f(x)$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود فوریه اساسا ثابت کرد که می توان از محورهایی استفاده کرد که به کمک مجموعه ای نامتناهی از توابع سینوس وار ساخته می شوند. بعبارتی، فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می توان بوسیله حاصلجمع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی بشکل $\sin ax$, $\cos ax$ نمایش داد. پایه های فوریه، بصورت ابزارهایی اساسی با کاربردهای فوق العاده متواتر در علوم، درآمده اند.

با گذشت زمان ضعف پایه های فوریه نمایان شد، مثلا دانشمندان پی بردند که پایه های فوریه و نمایش توابع سینوس وار در مورد سیگنال های پیچیده نظری تصاویر، نه تنها ایده آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب بدور هستند، بعنوان مثال بشکل کارآمدی، قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نیستند. همچنین تبدیل فوریه فقط برای توابع پایه مورد استفاده قرار می گیرد و برای توابع غیرپایه چندان کارآمد نیست.

اگرچه تبدیل فوریه یک ابزار اساسی در آنالیز سیگنال برای دو قرن اخیر بوده است، ولی بدلیل فقدان و کمبود در آنالیزسیگنال، که ازجمله می توان به عدم متمرکزسازی در طبقه بندی اطلاعات در آنالیز سیگنال، و مخفی نگاه داشتن اطلاعات مربوط به زمان و فرکانس یک سیگنال در یک لحظه مشخص، اشاره کرد. بدین ترتیب نیاز به فضای جدیدی با انعطاف پذیری بیشتری بود.

مقدمه

در سال ۱۹٤۲، دکتر گابیر[1] شکاف وارده در تجزیه سیگنال ها را پرکرد و یک حرکت اساسی رو به جلو و پیشرفتی در تجزیه سیگنال ها به جای سیگنال های مقدماتی تنظیم نمود.

در سال ۱۹۵۲ به علت بودن برخی مسائل مشکل و پیچیده در زمینه سریهای فوریه غیر همساز، دافین و اسچیفیر[2] با خلاصه کردن روش گابیر، قاب های[3] فضای هیلبرت را تعریف کردند. بیشتر کارهای دافین و شیفر روی سریهای فوریه غیرهارمونیک، (یعنی بسط توابع، بوسیله توابع نمایی مختلط $e^{i\lambda_n x}$ که $\lambda_n \neq 2\pi n$) بود. آنها با کار روی خانواده های نمایی $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in Z}$ سعی کردند تا ثابت کنند که چه موقع این خانواده ها کامل هستند یا برای $l^2\lfloor a,b\rfloor$ تشکیل یک پایه ریس می دهند.

همه ی این مطالب دافین و شیفر را سوق داد به مفهوم:

" اگر H یک فضای هیلبرت و I یک مجموعه اندیس گذار باشد و فرض کنیم $\{\chi_n\}_{n\in I}$ زیرمجموعه ای از اعضای H باشد. $\{\chi_n\}_{n\in I}$ را یک قاب برای H می نامیم هرگاه:

دو ثابت مثبت متناهی مانند $0<\alpha\leq\beta<\infty$ **موجود باشند**، بطوریکه به ازای هر $f\in H$:

$$\alpha\|f\|^2 \leq \sum_n \left|\left(f,\chi_n\right)\right|^2 \leq \beta\|f\|^2 \quad .$$

ولی بنابه دلایلی تحقیقات آنها نیمه تمام ماند، تا اینکه در سال ۱۹۸٦ ، دابیچیز[4]، گراسمان[5]، می یئر[6]، فعالیتهای خود را در این زمینه آغاز کردند تا باعث شد قاب ها با سرعت زیاد و به شکل وسیعی مورد مطالعه پژوهشگران قرار گیرد و شروع به رشد سریعی کند. امروزه، نظریه قاب ها یک وسیله اساسی در بسیاری از محیط های کاربردی بخصوص ،آنالیز سیگنال در سیستم مخابرات و شبکه های اینترنتی، فیلتر بانک ها و غیره می باشد.

۱- Gabor
۲- Duffin and Schaeffer
۳- Frames
۵- Daubechise
۶- Grossmann
۷- Meyer

مقدمه

این پایان نامه در سه فصل ، برگرفته از مقاله هایی مانند:

1) THE ART OF FRAME THEORY
2) PROJECTIONS OF FRAMES
3) TEN LECTURES OF WAVELETS

که توسط پروفسور کاسازا[۷] ،پروفسور منوئل[۸]و دابیچیز در سال ۱۹۹۸ ارائه شده ، تنظیم شده است.

ابتدا در فصل اول این پایان نامه مفاهیم مقدماتی و پیشینه از فضاهای هیلبرت و چگونگی یکرختی هر فضای هیلبرت با یک فضای هیلبرت دیگر را بحث می کنیم، سپس در فصل دوم به بررسی قاب ها و نقش موجکها در فضاهای هیلبرت می پردازیم و سرانجام درفصل سوم، قاب ها را به فضاهای متناهی برده و با تصویر آنها روی یک زیرفضای بهینه خواص آنها را بهبود می بخشیم.

۸- Casazza
۹- Manuel

فصل اول:

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱-۱. تعریف:

فضای برداری مختلط H همراه با یک نگاشت $(.,.):\mathrm{H}\times\mathrm{H}\rightarrow C$ را یک فضای ضرب داخلی مختلط نامیم اگر به هرجفت از بردارهای x,y در H یک عدد مختلط مانند (x,y) به نام حاصل ضرب داخلی x,y چنان مربوط شده باشد که اگر $x,y,z\in\mathrm{H}$ و α اسکالر باشد، داشته باشیم:

۱) $(y,x)=\overline{(x,y)}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط می باشد) ؛

۲) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$ ؛

۳) $(\alpha\, x,y)=\alpha(x,y)$ ؛

٤) $(x,x)\geq 0$ ؛

٥) $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

با توجه به خواص بالا نتایج زیر حاصل می شود:

الف) $(x,\alpha\, y)=\overline{\alpha}(x,y)$ ؛

ب) $(x,0)=(0,x)=0$ ؛

ج) $(z,x+y)=(z,x)+(z,y)$.

حال بنابر (٤)، نرم $x\in\mathrm{H}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|x\|^2=(x,x) \quad .$$

۱-۲. نامساوی شوارتز:

فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد. آنگاه به ازای هر $x,y\in\mathrm{H}$ داریم:

$$|(x,y)|\leq\|x\|\,\|y\| \quad .$$

برهان. رجوع کنید به [12] صفحه ۷۷ .

۱-۳. نتیجه:

فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی و $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathrm{H}$ **باشد. آنگاه به ازای هر** $f \in \mathrm{H}$ ،

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left(f, f_i \right) \right|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \| f \|^2 \| f_i \|^2 \quad .$$

۱-٤. تعریف:

فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد. یک متر بصورت زیر بر روی این فضا تعریف می کنیم:

$$\rho(x,y) = \| x-y \| = (x-y\, ,\, x-y)^{1/2} \quad .$$

بنا به خواص ذکر شده در ۱-۱، کاملا بدیهی است که این فضای ضرب داخلی H با مترتعریف شده، تشکیل یک فضای متری می دهد، لذا H یک فضای متری است. هرگاه این فضای متری تام باشد، یعنی هر دنباله کشی در H همگرا باشد،آنگاه H یک **فضای هیلبرت** نامیده می شود.

مثال:

اگر $\{\mathrm{H}_i\}_{i=1}^{\infty}$ خانواده ای از فضاهای هیلبرت باشند، مجموع مستقیم آنها بصورت زیر تعریف می شود:

$$H = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathrm{H}_n \right)_{l^2} = \left\{ g = (g_1, g_2, ..) : g_n \in \mathrm{H}_n \, , \sum_{n=1}^{\infty} \| g_n \|^2 < \infty \right\} \text{ ،}$$

H نسبت به ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت می باشد:

برای هر $f, g \in \mathrm{H}$ ، $\left(f, g \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n, g_n \right)$.

همچنین برای هر $g \in H$، داریم: $\| g \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| g_n \|^2$.

۱-۵. لم: (اتحاد قطبی)

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد.آنگاه به ازای هر $x, y \in H$،

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left[||x+y||^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i||x-iy||^2 \right] .$$

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ -||x-y||^2 &= -||x||^2 + -||y||^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ i||x+iy||^2 &= i||x||^2 - i||y||^2 + \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle \\ -i||x-iy||^2 &= -i||x||^2 + -i||y||^2 + \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

با جمع روابط فوق حکم برقرار است.

۱-٦ .لم: (قانون متوازی الاضلاع)

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. آنگاه به ازای هر $x, y \in H$،

$$||x+y||^2 + \|x-y\|^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 .$$

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

با جمع روابط فوق حکم برقرار است.

۱-۷. قضیه:

نگاشتهای $\begin{array}{l} f:\mathrm{H}\to C \\ f(x)=(x,y) \end{array}$ و $\begin{array}{l} f:\mathrm{H}\to C \\ f(x)=(y,x) \end{array}$ و $\begin{array}{l} f:\mathrm{H}\to \Re^{\geq 0} \\ f(x)=\|x\| \end{array}$ به ازای هر $y\in \mathrm{H}$ ثابت،

توابعی بطور یکنواخت پیوسته بر H هستند.

برهان.رجوع کنید به [12] صفحه ۷۸ .

۱-۸. تعریف:

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $x,y\in \mathrm{H}$ باشند. اگر داشته باشیم $(x,y)=0$، گوئیم x متعامد به y است و می نویسیم $x\perp y$. رابطه $\perp$ متقارن است زیرا:

اگر $x\perp y$ آنگاه $(x,y)=0 \Leftarrow \overline{(x,y)}=0 \Leftarrow (y,x)=0 \Leftarrow y\perp x$.

توجه شود که متعامد بودن رابطه تعدی نیست پس رابطه هم ارزی هم نخواهد بود.

تعریف می کنیم:

$$x^{\perp}=\{y\in \mathrm{H} \mid (x,y)=0\} \quad .$$

اگر M زیرفضائی از H باشد، تعریف می کنیم:

$$\mathrm{M}^{\perp}=\{y\in \mathrm{H} \mid (x,y)=0 \qquad \forall x\in \mathrm{M}\} \quad .$$

$x^{\perp}$ یک زیرفضای بسته H است، زیرا:

$x\perp y$ و $x\perp z$ ، $z,y\in x^{\perp}$ ایجاب می کند رابطه $x\perp (y+z)$ و $x\perp \alpha y$. برای اثبات

بسته بودن آن، تابع پیوسته $\begin{array}{l} \Phi_x:\mathrm{H}\to \Im \\ \Phi_x(y)=(x,y) \end{array}$ را در نظر می گیریم،

داریم:

$$x^{\perp}=\{y\in \mathrm{H} \mid (x,y)=0\}=\Phi_x^{-1}(\{0\}) \ .$$

با توجه به بسته بودن $\{0\}$ و پیوسته بودن تابع Φ_x، بسته بودن $x^{\perp}$ ثابت می شود. فرض کنیم M زیرفضای H باشد، چون $M^{\perp} = \cap x^{\perp},\ x \in M$ ، پس: $M^{\perp}$ نیز یک زیرفضای بسته H می باشد.

۱-۹. مفاهیم اصلی در فضاهای هیلبرت:

(۱-۹-۱) اگر $\{x_n\}$ یک دنباله از بردارها در یک فضای هیلبرت H باشد، گوئیم $\{x_n\}$ یک دنباله متعامدیکه است هرگاه:

$$\begin{matrix} i)\ \forall n \neq m\ ,\ (x_m, x_n) = 0 \\ ii)\ \| x_n \|^2 = (x_n, x_n) = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (x_m, x_n) = \sigma_{m,n} \quad .$$

اگر $\overline{\{x_n\}} = H$ آنگاه گوئیم $\{x_n\}$ در H چگال است.

حال در این قسمت به بررسی یکی از قضایای اسا سی در پایه های متعامدیکه می پردازیم:

قضیه: برای یک سیستم متعامدیکه مانند $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H، گزاره های زیر هم ارزند:

(i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه متعامدیکه است ؛

(ii) $\forall f \in H \quad , \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$ ؛

(iii) $\forall f, g \in H \quad , \quad (f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)(e_k, g)$ ؛

(iv) $\forall f \in H \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2$ ؛

(v) $\overline{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = H$ ؛

(vi) $\forall k \in N, (f, e_k) = 0 \Rightarrow f = 0$.

برهان. رجوع کنید به [4] صفحه ۵۷ .

(۱-۹-۲) فرض کنیم $\mathrm{H,K}$ فضاهای هیلبرت، به ترتیب با حاصل ضربهای داخلی $(.,.)_{\mathrm{K}}$, $(.,.)_{\mathrm{H}}$ و نرمهای $\|.\|_{K}$, $\|.\|_{\mathrm{H}}$ باشند. فرض کنیم $\mathrm{T:H\to K}$ یک نگاشت دلخواهی باشد. حال خواص زیر را تعریف می کنیم:

(۱-۹-۳) $\mathrm{T:H\to K}$ خطی است هرگاه:

$$\forall x,y\in \mathrm{H}\ \ ,\alpha,\beta\in\Im\ :\ \ \mathrm{T}(\alpha\,x+\beta\,y)=\alpha\,\mathrm{T}(x)+\beta\,\mathrm{T}(y)\quad .$$

(۱-۹-٤) $\mathrm{T:H\to K}$ یک به یک است هرگاه:

$$x\neq y\Rightarrow \mathrm{T}x\neq \mathrm{T}y\quad .$$

(۱-۹-۵) برد $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت $rang\mathrm{T}=\{\mathrm{T}x|x\in\mathrm{H}\}$ و رتبه $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت $rank\mathrm{T}=\dim rang\mathrm{T}$ و کو- رنک $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت $(rang\mathrm{T})^{\perp}$ تعریف می کنیم.

(۱-۹-٦) هسته $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت $\ker\mathrm{T}=\{x|\mathrm{T}x=0\}$ و پوچی $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت $null\ \mathrm{T}=\dim\ker\mathrm{T}$ تعریف می کنیم.

(۱-۹-۷) $\mathrm{T:H\to K}$ پوشا ست هرگاه: $rang\mathrm{T}=k$.

(۱-۹-۸) نرم $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|\mathrm{T}\|=\sup_{0\neq x\in\mathrm{H}}\frac{\|\mathrm{T}x\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|_{\mathrm{H}}=1}\|\mathrm{T}x\|\quad .$$

$\mathrm{T:H\to K}$ کراندار است هرگاه $\|\mathrm{T}\|\rangle\infty$.

توجه: یک عملگر خطی کراندار است اگرو فقط اگر پیوسته باشد.

(۱-۹-۹) الحاقی $\mathrm{T:H\to K}$ را بصورت $\mathrm{T}^{*}:\mathrm{K}\to\mathrm{H}$ تعریف می کنیم که در شرط زیر صدق کند:

$$(\mathrm{T}x,y)_{\mathrm{K}}=(x,\mathrm{T}^{*}y)_{\mathrm{H}}\ ,\ x\in\mathrm{H},y\in\mathrm{K}\quad .$$

از آنجا نتیجه می شود:

$$\|T\| = \|T^*\| \quad .$$

(۱-۹-۱۰) $T : H \to K$ یک ایزومتری است هرگاه به ازای هر $x \in H$:

$$\|Tx\|_K = \|x\|_H$$

و نیز ایزومتری است اگرو فقط اگر،

$$(Tx, Ty)_K = (x, y)_H \ , \ \ x, y \in H \quad .$$

اگر الحاقی $T : H \to K$ ایزومتری باشد آنگاه T را کو- ایزومتری می نامیم.

(۱-۹-۱۱) در تمام تعاریف زیر فرض می کنیم $H = K$ و $T, S : H \to H$ عملگرهای خطی و کراندار و $\{e_n\}$ یک پایه متعامدیکه بر H می باشد.

(۱-۹-۱۲) T خودالحاقی است اگر $T = T^*$ و این هم معادل است با:

$$(Tx, y) = (x, Ty), \ \ x, y \in H \quad .$$

(۱-۹-۱۳) T مثبت است هرگاه به ازای هر $x \in H$:

$$(Tx, x) \geq 0$$

و بصورت $T \geq 0$ نشان می دهیم.

(۱-۹-۱۴) تریس T تعریف می شود بوسیله:

$$tr T = \sum_n (Te_n, e_n) \quad .$$

(۱-۹-۱۵) نرم $Hilbert - schmidt$ برای T چنین تعریف می شود:

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_n \|Te_n\|^2 \right)^{1/2} \quad .$$

اگر P یک تصویر از رتبه n باشد، آنگاه:

$$\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{HS}}^2=\sum_i\|\mathrm{P}e_i\|^2=\sum_i(\mathrm{P}e_i,\mathrm{P}e_i)$$
$$=\sum_i(\mathrm{P}e_i,e_i)=tr\mathrm{T}=n \quad .$$

(۱-۹-۱٦) فرض کنیم $\{x_i\},\{y_i\}$ به ترتیب دو دنباله در فضاهای هیلبرت X,Y باشند.

این دو دنباله هم ارزند هرگاه:

عملگری منحصربه فرد و وارون پذیر از X به توی Y موجود باشد، بطوریکه: $\mathrm{T}x_i=y_i$ و بصورت $\{x_i\}\approx\{y_i\}$ نشان می دهیم.

(۱-۹-۱۷) دنباله $\{x_i\}$ یک پایه شودر[۹] یا فقط یک پایه برای X نامیده می شود هرگاه :

هر عضوی از $x\in X$ در نظر بگیریم، بتوانیم آن را بفرم یکتائی بشکل زیر نشان دهیم:

$$x=\sum_i\alpha_i\, x_i \qquad (\circledast)$$

که $\{\alpha_i\}$ یک دنباله از اسکالرها می باشد.

اگر سری $(\circledast)$ برای هر $x\in X$ ، بطور نا مشروط همگرا باشد گوئیم، $\{x_i\}$ یک پایه نا مشروط برای X می باشد .

(۱-۹-۱۸) یک پایه ریس[۱۰] برای یک فضای هیلبرت H، پایه ای نا مشروط و کراندار بر H است .دنباله $\{x_i\}$ یک پایه ریس برای فضای هیلبرت H می باشد اگر و فقط اگر $\{x_i\}\approx\{e_i\}$ که $\{e_i\}$ یک پایه متعامدیکه برای H می باشد.

(۱-۹-۱۹) T یک عملگر یکانی بر H است هرگاه:

$$\mathrm{TT}^*=\mathrm{T}^*\mathrm{T}=\mathrm{I} \quad .$$

۱- Schauder
۲- Riesz

(۱–۹–۲۰) اگر T یک عملگر کراندار بر H و $\|\mathrm{I}-T\| < 1$ باشد، آنگاه، T معکوس پذیر و $\mathrm{T}^{-1}=\sum_{K=0}^{\infty}(\mathrm{I}-\mathrm{T})^{K}$ می باشد .

(۱–۹–۲۱) فضاهای هیلبرت $\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2$ در صورتی یکریختند که یک نگاشت خطی یک به یک مانند Λ از H_1 بروی H_2 موجود باشد که حاصل ضربهای داخلی را حفظ نماید. یعنی:

$$(\Lambda(x),\Lambda(y))=(x,y),\quad x,y\in\mathrm{H}_1$$

یک چنین Λای را یکریختی فضاهای هیلبرت از H_1 بروی H_2 می گویند.

(۱–۹–۲۲) یک فضا در صورتی جدایی پذیر است که شامل یک زیرمجموعه چگال شمارش پذیر باشد. حال یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است اگر و فقط اگر شامل یک دستگاه متعامدیکه ماکزیمال باشد که حداکثر شمارا است.

۱–۱۰. قضیه: فرض کنیم H یک فضای هیلبرت (فضای ضرب بودن نیز کافی است)، آنگاه:

۱) برای هر $x,y\in\mathrm{H}$ و هر عضو k از میدان H داریم:

$$x\perp y \iff \|k\,x+y\|^2=\|k\,x\|^2+\|y\|^2 \quad .$$

۲) برای هر $x,y\in\mathrm{H}$ داریم:

$$x\perp y \quad\Rightarrow\quad \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \quad .$$

۳) اگر H یک فضای هیلبرت حقیقی باشد، آنگاه :

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \quad\Rightarrow\quad x\perp y \quad .$$

٤) اگر H یک فضای هیلبرت مختلط باشد، آنگاه نمی توان رابطه (۳) را نتیجه گرفت.

برهان. رجوع کنید به [15] صفحه ۲۱۳ .