دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

بسته بودن حوزه مقادیر ضربگرها روی جبرهای باناخ

تدوین

فاطمه رستگارمنش

استاد راهنما

دکتر جواد لآلی

شهریور ۱۳۹۱

سپاس **خدای** را که حق ستایشش، بالاتر از حد ستایشگران است.

خدایی که اندیشه های بلند، او را درک ننمایند و هوش های ژرف، به حقیقتش دست نیابند.

و سپاس سرایندگان ترانه هستی ام

آنانکه پرواز کردنم آموختند

گل های یاس بهشت آرزوهایم

پدر و مادر عزیزم

و سپاس انسانی را که همچون باران بر کویر خشک اندیشه هایم بارید

استاد گرانقدرم

سپاسی که حد آن را انتها و عدد آن را شمارشی نیست. . .

تقدیم به

قلب وجود عالم امکان

مهدی موعود(عج)

و

تقدیم به

ارزنده ترین نعمت زندگی ام

همسر مهربانم

چکیده

یکی از کارهایی که اخیراً توسط ریاضیدانان زیادی مورد پژوهش واقع شده است، این مسأله می باشد:

چه وقت ضربگر $T : A \longrightarrow A$ با حوزه مقادیر بسته، به صورت عواملی از یک ضربگر خودتوان و یک ضربگر وارونپذیر تجزیه می شود؟

هدف این پایان نامه بررسی برخی جنبه های مربوط به این مسأله است. پاسخ این مسأله متکی به پاسخ های دو مسأله دیگر است که مستقل و بسیار جالب می باشند. علی اولگر نیز این مسأله را بررسی کرده و نتایج جالبی بدست آورده است. نتایج اصلی این پایان نامه را می توان به صورت ذیل خلاصه کرد.

به ازای جبر باناخ A، با همانی تقریبی کراندار، به طوری که هر ایده آل بسته سره A مشمول در یک ایده آل بسته سره با همانی تقریبی کراندار باشد؛ ضربگر $T : A \longrightarrow A$ دارای حوزه مقادیر بسته است، اگر و تنها اگر، T به صورت عواملی از یک ضربگر خودتوان و یک ضربگر وارونپذیر تجزیه شود.

واژه‌های کلیدی: ضربگر، همانی تقریبی کراندار، جبر میانگین پذیر، طیف گلفاند، ضرب های آرنز، جبر تاوبرین

رده‌بندی موضوعی ریاضی۲۰۱۰: 43A22, 46J10, 47B48

مقدمه

هدف اصلی این پایان نامه بحث پیرامون مسأله زیر است.

مسأله(M) : تحت چه شرایطی ضربگر $T : A \longrightarrow A$ با حوزه مقادیر بسته را میتوان به حاصلضرب یک ضربگر وارونپذیر و یک ضربگر خودتوان تجزیه کرد؟

حل این مسأله به راه حلهای دو مسأله زیر بستگی دارد که هرکدام به تنهایی مورد توجه هستند.

مسأله (A) : فرض کنیم $T : A \longrightarrow A$ یک ضربگر با حوزه مقادیر بسته باشد. تحت چه شرایطی ایده آل $T(A)$ دارای همانی تقریبی کراندار است؟

برای برخی جبرهای باناخ، اگر $T(A)$ در A بسته باشد، آنگاه $T(A)$ دارای همانی تقریبی کراندار خواهد بود، به طوری که برای این جبرهای باناخ، حل مسأله (A) حاکی از حل مسأله (M) است. بنا به قضیه تجزیه کوهن [16, 32.22]، زمانی که $T(A)$ در A بسته است، شرط لازم برای اینکه $T(A)$ دارای همانی تقریبی کراندار باشد، این است که $T^۲(A)$ در $T(A)$ چگال باشد. بررسی این مطالعات موجب طرح سؤال زیر می شود.

مسأله (B) : جبرهای باناخ دارای همانی تقریبی کراندار را مشخص کنید، به طوری که برای هر ضربگر $T : A \longrightarrow A$ با حوزه مقادیر بسته، $T^۲(A)$ در $T(A)$ چگال باشد.

راه حل های مسأله های (A) و (B) حاکی از حل مسأله (M) است. در بخش های بعدی توجه اصلی ما به این دو مسأله خواهد بود.

نقطه شروع مسأله (M) سخنرانی برلینگ [۱] است که طی کنگره نهم ریاضیدانان اسکاندیناویایی در سال ۱۹۳۸ ارائه داده است [4, 345-366]. (همچنین [3, 162] را ببینید.) برای توضیح این مسأله، G را یک گروه آبلی موضعاً فشرده و $M(G)$ را جبر اندازه در نظر می گیریم. مسأله برلینگ این بوده است : اندازه های $\mu \in M(G)$ را برای ایده آل $\mu * L^۱(G)$ که در جبر گروهی $L^۱(G)$ بسته است، مشخص کنید. اولین نتیجه که تا حدودی به این مسأله مربوط است، در مقاله [9] آمده است. تا قبل از سال ۱۹۷۰، هیچ مقاله ای مربوط به مسأله برلینگ نمی شناسیم. بر اساس [12, 419] ، این مسأله در آغاز دهه ۱۹۷۰ توسط هیوویت [۲] به گلیکسبرگ [۳] پیشنهاد داده شد. نخستین کار مهم مربوط به این مسأله، مقاله [12] است. گلیکسبرگ در این مقاله، علیرغم حل مسأله، تحلیلی بسیار خوب ارائه می دهد. به ویژه ثابت می کند که اگر ایده آل $\mu * L^۱(G)$ در $L^۱(G)$ بسته باشد، آنگاه ایده آل $\mu * \mu * L^۱(G)$ در آن چگال است. این قسمت ضروری حل مسأله برلینگ است.(قضیه ۶.۲.۴ را در ادامه ببینید.)دومین کار مهمی که پیرامون این مسأله انجام پذیرفت، مقاله [34] است، که در آن نشان داده می شود،

[۱] A.Beurling

[۲] E.Hewitt

[۳] I.Glicksberg

برای اندازه $\mu \in M(G)$ ، ایده آل $\mu * L^1(G)$ در $L^1(G)$ بسته است؛ و دارای همانی تقریبی کراندار است اگر و فقط اگر μ به صورت حاصلضربی از یک اندازه وارونپذیر و یک اندازه خودتوان باشد. مسأله برلینگ توسط هاست [۴] و پارو [۵] در مقاله [18] حل شد. نتیجه نهایی این است که؛ برای اندازه $\mu \in M(G)$، ایده آل $\mu * L^1(G)$ در جبر گروه $L^1(G)$ بسته است؛ اگر و تنها اگر؛ فاکتورهای μ به صورت اندازه ای وارونپذیر مانند λ و اندازه ای خودتوان مانند θ باشد. (یعنی $\mu = \theta * \lambda$). این همان قضیه گلیکسبرگ-هاست-پارو است.
بیان مجرد مسأله برلینگ، یعنی مسأله (M) که در بالا ذکر شد، توسط لارسن [۶] و همکارانش در [2] و [21] و [23] مطالعه شده است. خواننده می تواند در [10-4 ,23] نتایج بیشتر در مورد این مسأله تا سال ۲۰۰۰ را بیابد. اولگر [۷] در مقالات [30] و [31] این مسأله را نیز بررسی کرده است. در [31] قضیه گلیکسبرگ-هاست-پارو به همه گروه های میانگین پذیر موضعاً فشرده و همچنین به جبرهای باناخ نیمساده جابه جایی با همانی تقریبی کراندار مانند A که در آن جبر ضربگر $M(A)$ از A یک فضای دوگان زیرفضای X از A^* است، بسط می یابد.با توجه به اینکه هر جبر ضربگر $M(A)$ یک فضای دوگان نیست، این فرضیه کاملاً محدود است. آنچه در ادامه بررسی خواهیم کرد، بیان عمومی مسأله برلینگ است که در اینجا به عنوان مسأله (M) مطرح شد.تعریف ما از اصطلاح " ضربگر" همان تعریف آمده در کتاب لارسن [20] و همچنین مقاله [21] می باشد. این نوع ضربگرها اغلب در حالت جابه جایی رخ می دهند، اما در زمینه جبرهای باناخ غیر جابه جایی نیز معنی دارند. از آنجا که شرط جابه جایی بودن جبر باناخ هیچ سادگی در مطالعه مسأله (M) ایجاد نمی کند، با جبرهای باناخ عمومی کار می کنیم.
این پایان نامه شامل چهار فصل بوده که خلاصه محتویات فصول به این شرح است:
فصل اول، مروری بر تعاریف و قضیه های مورد نیاز است که در فصل های بعد از آنها استفاده خواهد شد.
در فصل دوم، ابتدا هنگ مینیمال تحویل یافته را تعریف می کنیم. سپس در قضیه ای ارتباط بین هنگ مینیمال تحویل یافته و حوزه مقادیر یک عملگر خطی کراندار را بیان می کنیم. همچنین وارون تعمیم یافته یک عملگر و خواص آن را معرفی می کنیم.
در فصل سوم، خواص وارون تعمیم یافته را روی ضربگرها مورد مطالعه قرار داده ایم.
در فصل چهارم، ابتدا وجود همانی تقریبی کراندار در حوزه مقادیر یک ضربگر را بررسی کرده و سپس شرایطی را معرفی می کنیم که تحت آن شرایط $T^2(A)$ در $T(A)$ چگال است. (منظور از $T(A)$ حوزه مقادیر ضربگر T است.) در پایان نیز با ترکیب چند قضیه و نتایج آنها مسأله اصلی پایان نامه را پاسخ می دهیم.
برای ارائه مفاهیم و مطالب گفته شده از مقالات زیر استفاده شده است. مقاله اول به عنوان مقاله اصلی و

[۴] B.Host

[۵] F.Parreau

[۶] K.B.Laursen

[۷] Ülger

دومین مقاله به عنوان مقاله فرعی به کار رفته است.

Ülger, A. *When is the range of a multiplier on a banach algebra closed* ?, Math.Z. 254:715-728 (2006).

Laursen, K.B and M.Mbekhta, *Closed range multipliers and generalized inverses*, Stud. Math. 107, 127-135(1993).

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازها و نمادها

در این فصل نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول بعد را بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. یک **فضای برداری** روی میدان Φ که Φ میتواند مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و یا مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد؛ عبارت است از مجموعه ای مانند X، که اعضایش بردار نامیده می شوند و در آن دو عمل به نامهای جمع و ضرب اسکالر تعریف شده اند که از خواص جبری زیر برخوردارند:

۱. به هر زوج از بردارهای $x, y \in X$، برداری مانند $x + y$ نظیر است چنان که

$$x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \text{و} \qquad x + y = y + x.$$

در ضمن X بردار منحصر بفردی مانند 0 (بردار صفر) دارد که به ازای هر $x \in X$، $x + 0 = x$؛ و به ازای هر $x \in X$ بردار منحصر بفرد $-x$ وجود دارد که $x + (-x) = 0$.

۲. به هر زوج (α, x) که $\alpha \in \Phi$ و $x \in X$ برداری مانند αx نظیر است که

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \qquad \text{و} \qquad 1x = x.$$

و همچنین دو قانون پخش پذیری زیر برقرارند:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \qquad \text{و} \qquad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه $Y \subseteq X$ را **زیرفضای** X می نامیم هرگاه Y نسبت به اعمال X، خود یک فضای برداری باشد.به بیانی دیگر Y زیرفضای X است هرگاه به ازای هر اسکالر α, β،

$$\alpha Y + \beta Y \subseteq Y.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان مختلط Φ باشد. تابع $\| \cdot \| : X \longrightarrow [0, \infty[$ را یک **نرم** روی X می نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\| x \| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲. $\| \alpha x \| = |\alpha| \|x\|$.

۳. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

در مواقعی که بیش از یک فضای برداری داریم نرم روی X را با نماد $\| \cdot \|_X$ نمایش می دهیم.
فضای برداری X همراه با نرم $\|.\|$ را یک **فضای برداری نرمدار** (فضای نرمدار) می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ را یک **فضای باناخ** [1] گوییم هرگاه یک فضای کامل باشد یعنی هر دنباله ی کوشی در آن به عضوی از X همگرا باشد.

مثال ۵.۱.۱. *۱ . فرض کنیم $1 \leqslant p < \infty$. در این صورت فضای*

$$\ell^p(\mathbb{Z}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} | x_k \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} | x_n |^p < \infty\}$$

با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\| x \|_p = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} | x_n |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

۲ . فضای $\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_k \in \mathbb{C}, sup_{n\in\mathbb{N}} | x_n | < \infty\}$ با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\| x \| = sup_{n\in\mathbb{N}} | x_n | .$$

تعریف ۶.۱.۱. فضای باناخ A یک **جبر باناخ** نامیده می شود هرگاه یک عمل ضرب به صورت زیر روی A تعریف شود:

$$(.) : A \times A \longrightarrow A$$

[1] Banach

$$(x,y) \longrightarrow xy$$

و این عمل دارای خواص زیر باشد:
به ازای هر x,y,z از A و هر اسکالر α ؛

۱. $x(yz) = (xy)z$؛

۲. $x(y+z) = xy + xz$ و $(x+y)z = xz + yz$؛

۳. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

همچنین به ازای هر $x,y \in A$ نابرابری ضربی $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$ برقرار باشد. چنین نرمی را یک نرم جبری می نامند.

عضو $e \in A$ را **همانی** A می نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $xe = ex = x$. و عضو همانی e را **یکه** A خوانیم در صورتی که $\| e \| = 1$.
جبر باناخ A را **جابه جایی** می نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in A$، $xy = yx$.
هرگاه جبر باناخ A عضو همانی داشته باشد، آن را **یکدار** می نامیم. در چنین حالتی میدان Φ با زیرجبر Φe یکریخت خواهد بود.
مجموعه همه اعضای وارونپذیر A (نسبت به عمل ضرب) را با $\mathrm{Inv}(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. نگاشت $* : A \longrightarrow A$ که x را به x^* تبدیل می کند، یک **برگشت** نامیده می شود هرگاه خواص زیر را دارا باشد:

۱. $x \in A$ $\quad (x^*)^* = x$؛

۲. $x \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$؛

۳. $x,y \in A$ $\quad (x+y)^* = x^* + y^*$؛

۴. $x,y \in A$ $\quad (xy)^* = y^* x^*$.

تعریف ۸.۱.۱. هرگاه بتوانیم روی جبر باناخ A یک برگشت تعریف کنیم، آنگاه $(A,*)$ را یک **$*$-جبر** می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. [11] اگر $*$-جبر A دارای این خاصیت باشد که؛ به ازای هر $x \in A$؛ $\| x^* x \| = \| x \|^2$، آنگاه A را یک **C^*-جبر** می نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم A و B ، جبرهای باناخ یکدار باشند. نگاشت خطی $h : A \longrightarrow B$ را یک **همریختی** می نامیم اگر، برای هر $a \in A$ و $b \in B$؛ $h(ab) = h(a)h(b)$.

مثال ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر مختلط و h یک تابعک خطی بر A باشد که متحد با صفر نیست. هرگاه به ازای هر $x, y \in A$ ، $h(xy) = h(x)h(y)$، آنگاه $h : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک **همریختی مختلط** بر A نام دارد.*

تعریف ۱۲.۱.۱. همریختی $T : A \longrightarrow A$ یک **درونریختی** روی A نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار با همانی e باشد. برای هر $a \in A$ ، **طیف** a که با نماد $\sigma(a)$ نمایش داده می شود، برابر است با:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \notin \mathrm{Inv}(A)\}.$$

طیف a در A را با $\sigma_A(a)$ تصریح خواهیم کرد.

مثال ۱۴.۱.۱. *فرض کنیم؛*

$$A = \ell^{\infty}(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \mid f(n) \mid < \infty\}.$$

A با اعمال جمع و ضرب معمولی دنباله ها؛ یک جبر باناخ است و برای هر $f \in A$ ، اگر S مجموعه حدود زیر دنباله ای $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ باشد، آنگاه $\sigma_A(f) = \overline{f(\mathbb{N})} = f(\mathbb{N}) \cup S$.

تعریف ۱۵.۱.۱. مجموعه **حلال** A را با نماد $\rho(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a).$$

به منظور آشنایی بیشتر با ویژگی های $\sigma(a)$ ابتدا باید اعضای وارونپذیر یک جبر باناخ را شناسایی کنیم.

لم ۱۶.۱.۱. *[11, 1.1] فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار با عضو همانی e باشد. اگر $\| x \| < 1$ ، آنگاه $(e - x)^{-1}$ موجود است.*

قضیه ۱۷.۱.۱. *[11, 1.2] فرض کنیم $\mathrm{Inv}(A)$ مجموعه همه اعضای وارونپذیر A باشد. در این صورت*

۱. *$\mathrm{Inv}(A)$ باز است.*

۲. *نگاشت $x \longrightarrow x^{-1}$ روی $\mathrm{Inv}(A)$ پیوسته است.*

قضیه ۱۸.۱.۱. *[11, 1.4] فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد؛ در این صورت $\sigma(a)$ برای هر $a \in A$ ، زیرمجموعه ای ناتهی و فشرده از $\mathbb{C}$ است.*

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد. زیرفضای I از A را یک **ایده آل چپ** گوییم، اگر $AI \subseteq I$. همچنین I را **ایده آل راست** گوییم، اگر $IA \subseteq I$. I یک **ایده آل دوطرفه** است، اگر هم ایده آل چپ باشد و هم ایده آل راست. I **ایده آل سره** نامیده می شود، اگر $I \subsetneqq A$.
ایده آل سره M را یک **ایده آل ماکسیمال** خوانیم، هرگاه M مشمول در هیچ ایده آل سره دیگری نباشد.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض A و B دو جبر باشند. **رادیکال ژاکبسون** A که با نماد $\mathrm{Rad}(A)$ نمایش داده می شود، برابر است با اشتراک همه ایده آل های ماکسیمال A.

هرگاه $\mathrm{Rad}(A) = A$، A را یک **جبر رادیکال** و در غیر این صورت آن را **جبر غیر رادیکال** می نامیم.
جبر A را **نیمساده** گوییم، اگر $\mathrm{Rad}(A) = (0)$.

تعریف ۲۱.۱.۱. ایده آل چپ تولید شده توسط $a \in A$ را یک **ایده آل اصلی چپ** گوییم.
هرگاه A یک جبر باناخ روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، به ازای هر $a \in A$ ایده آل چپ تولید شده توسط a برابر است با

$$< a >= \mathbb{C}a + Aa.$$

و هرگاه A یکدار باشد، $< a >= Aa$.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم $(A, \| \, . \, \|)$ یک جبر نرمدار باشد. تور (e_α) از اعضای A را **همانی تقریبی چپ** گوییم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم؛ $\lim_\alpha \| e_\alpha x - x \| = 0$.
و اگر $\lim_\alpha \| xe_\alpha - x \| = 0$، آنگاه (e_α) را **همانی تقریبی راست** خوانیم.
همچنین (e_α) را **همانی تقریبی کراندار** گوییم، هرگاه $\sup_\alpha \| e_\alpha \| < \infty$ ، و آن را کراندار به وسیله $M > 0$ نامیم اگر $\sup_\alpha \| e_\alpha \| \leq M$.

توجه کنیم که اگر (e_α) همانی تقریبی با کران $M > 0$ برای $A \neq 0$ باشد؛ آنگاه لزوماً $M \geq 1$. زیرا برای هر $0 \neq a \in A$ داریم؛

$$\| e_\alpha a \| \leq \| e_\alpha \| \| a \| \leq M \| a \| \, .$$

به حدگیری نتیجه میشود:

$$\| a \| \leq M \| a \| \, .$$

و چون $\| a \| \neq 0$ نتیجه می شود که $M \geq 1$. همچنین در این حالت برای هر $a \in A$ و هر $\epsilon > 0$، عضو $x \in A$ وجود دارد که $\| x \| \leq M$ و $\| a - xa \| < \epsilon$.
(در واقع $\exists \alpha_0$ که $\| a - e_{\alpha_0} a \| < \epsilon$. حال قرار می دهیم ، $x = e_{\alpha_0}$)

مثالی که در اینجا بیان می کنیم مثالی از یک جبر باناخ است که عضو همانی ندارد اما ، همانی تقریبی کراندار دارد.

مثال ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم*

$$C_\circ(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \text{پیوسته و دارای محمل فشرده است } f\}$$

$C_\circ(\mathbb{R})$ *با* $\|\ .\ \|_\infty$ *یک جبر باناخ است. یادآور می شویم که* $\| f \|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} | f(x) |$.

این جبر باناخ، یکدار نیست. زیرا تابع ثابت $e(x) = ۱$ *بر* $\mathbb{R}$ *محمل فشرده ندارد. اما اگر برای* $\lambda > \circ$ *، توابع* e_λ *را به این صورت تعریف کنیم؛*

$$e_\lambda(x) = \begin{cases} ۱ & -\lambda \le x \le \lambda \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

آنگاه مجموعه $\{e_\lambda : \lambda > \circ\}$ *یک تور در* $C_\circ(\mathbb{R})$ *است و به ازای هر* $f \in C_\circ(\mathbb{R})$ *داریم؛* $e_\lambda f \longrightarrow f$.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی باشد. **طیف گلفاند** A که با نماد $\Delta(A)$ نمایش داده می شود، مجموعه همه تابعک های نابدیهی، خطی و ضربی روی A است.

اگر $h \in \Delta(A) \cup \{\circ\}$، آنگاه هسته h را با نماد M_h نشان می دهیم. $M_h = \ker h$.

در واقع $L(A, \mathbb{C})$ ؛ $\Delta(A)$ و A^* چنین قابل مقایسه اند.

$$L(A, \mathbb{C}) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{C} : \forall x, y \in A, \forall\lambda \in \mathbb{C}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)\}.$$

$$\Delta(A) = \{f \in L(A, \mathbb{C}) : f \neq \circ, f(xy) = f(x)f(y)\}.$$

$$A^* = \{f \in L(A, \mathbb{C}) : \text{پیوسته است } f\}.$$

عناصر $\Delta(A)$ را **مشخصه های** A می نامیم.

قضیه ۲۵.۱.۱. *[28, 10.7] فرض کنیم h یک مشخصه روی جبر باناخ جابه جایی A باشد. در این صورت h پیوسته است و* $\| h \| \le ۱$.

قضیه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی باشد. در این صورت؛*

۱ . *هر ایده آل ماکسیمال A ، هسته یک همریختی $h \in \Delta(A)$ است.*

۲ . *به ازای هر $h \in \Delta(A)$؛ هسته h که آن را با M_h نمایش می دهیم، یک ایده آل ماکسیمال A است.*

۳ . $x \in A$ *وارونپذیر است؛ اگر و تنها اگر؛ به ازای هر* $h \in \Delta(A)$ ، $h(x) \neq \circ$.

تعریف ۲۷.۱.۱. [7] فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی و $\Delta(A)$ طیف گلفاند آن باشد. به ازای هر $a \in A$؛ نگاشت

$$\widehat{a} : \Delta(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

با ضابطه

$$\widehat{a}(f) = f(a) =< a, f > \qquad (f \in \Delta(A))$$

را **تبدیل گلفاند** نظیر a می نامیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باشد. تبدیل خطی $T : A \longrightarrow A$ را یک **ضربگر چپ** گوییم اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $T(a.b) = T(a).b$ همچنین T را **ضربگر راست** گوییم هرگاه $T(a.b) = a.T(b)$.
به طور کلی T را یک **ضربگر** می نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in A$؛ $T(ab) = T(a).b = a.T(b)$.

مجموعه همه ضربگر ها را با $M(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. در این صورت **پوچساز چپ** ، **پوچساز راست** و **پوچساز** جبر A را به ترتیب ، چنین تعریف می کنیم.

$$A_{nn_l}(A) = \{x \in A : xA = \circ\}.$$

$$A_{nn_r}(A) = \{x \in A : Ax = \circ\}.$$

$$A_{nn}(A) = \{x \in A : xA = Ax = \circ\}.$$

جبر A را **وفادار** گوییم اگر

$$A_{nn}(A) = \{\circ\}.$$

گاهی به جای واژه وفادار از واژه **بدون مرتبه** استفاده می شود که هر دو به یک معنی است.

تعریف ۳۰.۱.۱. [7] فرض کنیم A جبری از توابع باشد که روی فضای توپولوژیک و ناتهی X تعریف شده اند. برای هر $f \in A$؛ **محمل یا تکیه گاه** f عبارت است از

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq \circ\}}$$

و خانواده $A_{\circ\circ}$ از اعضای A به این شکل معرفی می شود؛

$$C_{\circ\circ}(X) = A_{\circ\circ} = \{f \in A : \text{در } X \text{ فشرده است } \operatorname{supp} f\}$$

$A_{\circ\circ}$ ایده آلی از A است. اکنون فرض کنیم $S \subseteq X$ زیر مجموعه ای بسته از X باشد. در این صورت

$$J(S) = \{f \in A_{\circ\circ} : f(S) = \{\circ\}\} = \{f \in C_{\circ\circ}(X) : (\mathrm{supp} f) \cap S = \Phi\}$$

و

$$I(S) = \{f \in A : f(S) \subseteq \{\circ\}\}$$

مجموعه S را یک **ترکیب** برای A گوییم، اگر $\overline{J(S)} = I(S)$.

S را **غیر-ترکیب** گویند اگر $\overline{J(S)} \neq I(S)$. اگر هر زیر مجموعه بسته $S \subseteq X$ یک مجموعه ترکیب برای A باشد، می گوییم A دارای طیف ترکیب است.

مجموعه S را مجموعه **دتکین** [۲] برای A گوییم، اگر برای هر $f \in I(S)$؛ $f \in \overline{f(J(S))}$ [7, 4.1.12].

تعریف ۳۱.۱.۱. [7, 4.1.16] فرض کنیم A یک جبر باناخ جابه جایی نیمساده، $\Delta(A)$ طیف گلفاند و $\widehat{a}$ تبدیل گلفاند نظیر a باشد. همچنین فرض کنیم

$$I = \{a \in A : \text{فشرده است}\ \mathrm{supp}(\widehat{a}) \cap \Delta(A)\}.$$

هرگاه I در A تحت نرم چگال باشد، A یک جبر باناخ **تاوبرین** [۳] نامیده می شود.

تعریف ۳۲.۱.۱. [7, 4.1.16] فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک ناتهی و A جبری از توابع روی X باشد. A را **منظم** گوییم، در صورتی که برای هر زیر مجموعه بسته ی $S \subseteq X$ و هر $x \in X \setminus S$ عضوی، مانند $g \in A$، موجود باشد چنان که $g(x) = ۱$ و $g(S) \subseteq \{\circ\}$.

تعریف ۳۳.۱.۱. [7, 4.1.16] A را **نرمال** گوییم در صورتی که برای هر زیر مجموعه فشرده $K \subseteq X$ و هر زیر مجموعه بسته ی $S \subseteq X$ با شرط $S \cap K = \Phi$ ؛ عضوی ، مانند $g \in A$، موجود باشد چنان که $g(S) \subset \{\circ\}$ و $g(K) \subset \{۱\}$.

تعریف ۳۴.۱.۱. [7, 4.1.16] جبر جابه جایی A را **منظم (نرمال)** گوییم، در صورتی که طیف گلفاند آن، یعنی، $\Delta(A)$ ، ناتهی باشد و $\widehat{A}$ روی $\Delta(A)$ منظم (نرمال) باشد.

مجموعه $\Delta(A)$ دارای دو توپولوژی است، که عبارتند از توپولوژی گلفاند و توپولوژی هسته- غلافی. ابتدا توپولوژی هسته-غلافی را معرفی می کنیم.

---

[۲] Ditkin

[۳] Tauberian

در این توپولوژی برای هر $E \subseteq \Delta(A)$، بستار E را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$cl(E) = hul(\ker(E)) = \{\Psi \in \Delta(A) : \Psi(T) = \circ; \forall T \in \bigcap_{\varphi \in E} \ker(\varphi)\}.$$

حال گوییم، E در این توپولوژی بسته است، اگر $cl(E) = E$. مجموعه $O \subseteq \Delta(A)$ باز است، اگر مجموعه $E = \Delta(A) \setminus O$ مجموعه ای بسته باشد.

توپولوژی گلفاند روی $\Delta(A)$ ، توپولوژی ای است که تحت آن تبدیل گلفاند $\widehat{a}$ به ازای هر $a \in A$ پیوسته است.

در حالت کلی توپولوژی گلفاند از توپولوژی هسته-غلافی ظریف تر است [22]. در نتیجه ممکن است به ازای یک $a \in A$ ، تبدیل گلفاند $\widehat{a}$ نسبت به توپولوژی گلفاند پیوسته باشد اما نسبت به توپولوژی هسته-غلافی پیوسته نباشد.

توپولوژی های گلفاند و هسته-غلافی روی $\Delta(A)$ یکی هستند؛ اگر و تنها اگر ؛ A یک جبر باناخ منظم باشد [22].

۲.۱ عملگرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X وY دو فضای برداری مختلط باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک **عملگر خطی** می‌نامیم اگر به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$، $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این صورت **نرم عملگر خطی** T را با $\|T\|$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant ۱\} &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = ۱\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq \circ\} \\ &= \inf\{M > \circ : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

عملگر خطی T را **کران‌دار** نامیم در صورتی که $\|T\| < \infty$ و در غیر این صورت آن را عملگر خطی **بی‌کران** نامیم.

مجموعه تمام تبدیلات خطی کران‌دار از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم. اگر $X = Y$، T را عملگری روی X می‌نامیم و $L(X,X)$ را با $L(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۲.۱. *مجموعه ی $L(X,Y)$ با نرم عملگر یک فضای نرمدار تشکیل می دهد. اگر Y فضای باناخ باشد، $L(X,Y)$ نیز چنین است.*

اگر $Y=\mathbb{C}$ آن‌گاه $T:X\longrightarrow\mathbb{C}$ را **تابعک خطی** می‌گوییم و مجموعه تمام تابعک‌های خطی و کران‌دار روی X را با X^* نشان داده و **فضای دوگان** X می‌نامیم و همچنین قرارداد می‌کنیم که اگر $x\in X$ و $x^*\in X^*$، آن‌گاه $\langle x,x^*\rangle := x^*(x)$.

زیرفضاهای $N(T)=\{x\in X: T(x)=0\}$ و $R(T)=\{T(x):x\in X\}$ به ترتیب از X و Y را **فضای پوچ** و **فضای برد** T می‌نامیم. یادآوری می کنیم که $P:X\longrightarrow\mathbb{R}$ را نیم نرم گوییم هرگاه $P(x+y)\leq P(x)+P(y)$ و به ازای هر t نامنفی، $P(tx)=tP(x)$.

قضیه ۴.۲.۱. (*قضیه هان- باناخ*)[۴] *[28, 3.3] فرض کنیم M زیرفضایی از فضای برداری حقیقی X و P یک نیم نرم بر X باشد. همچنین فرض کنیم f یک تابعک خطی بر M باشد، به طوریکه به ازای هر $x\in M$، داشته باشیم؛ $|f(x)|\leq P(x)$. در این صورت، f به تابعک خطی Λ بر X توسیع می یابد که به ازای هر $x\in X$ در شرط $|\Lambda x|\leq P(x)$ صدق می کند.*

نتیجه ۵.۲.۱. *اگر X یک فضای نرمدار بوده و $x_0\in X$، آنگاه $\Lambda\in X^*$ وجود دارد که $\Lambda x_0=\|x_0\|$ و به ازای هر $x\in X$، $\|\Lambda\|\leq 1$.*

قضیه ۶.۲.۱. *[28, 3.5] فرض کنیم M زیرفضایی از فضای موضعاً محدب X باشد و $x_0\in X$. هرگاه x_0 در بستار M نباشد، آنگاه $\Lambda\in X^*$ وجود دارد که $\Lambda x_0=1$ و به ازای هر $x\in M$، $\Lambda x=0$.*

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم A و B دو فضای باناخ، و $T:A\longrightarrow B$ عملگری خطی و پیوسته باشد. عملگر $T^*:B^*\longrightarrow A^*$ به ازای هر $x\in A$ و هر $y^*\in B^*$ به صورت زیر تعریف می شود؛

$$T^*(y^*)(x)=y^*(T(x)).$$

T^* را مزدوج (دوگان) T می نامیم [24].

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم I عملگر همانی بر X باشد. در این صورت عملگر $T\in L(X)$ را **وارون پذیر** می نامیم اگر عملگر $S\in L(X)$ چنان موجود باشد که $ST=I=TS$ و می نویسیم $S=T^{-1}$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $T\in L(X)$. مجموعه ی تمام اسکالرهای λ به طوری که $T-\lambda I$ وارون پذیر نیست را **طیف** عملگر T می نامیم و با نماد $\sigma(T)$ نمایش می دهیم.

---

[۴] Hahn-Banach

تعریف ۱.۲.۱۰. عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را که در آن X و Y دو فضای نرم‌دار هستند، از **پایین کران‌دار** گوییم اگر $m > 0$ای موجود باشد چنان که به ازای هر $x \in X$، $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ و m را یک کران پایین T می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و U گوی یکه باز در X باشد. گوییم عملگر $T : X \longrightarrow Y$ **فشرده** است، اگر بستار $T(U)$ در Y فشرده باشد.

قضیه ۱.۲.۱۲. *[28, 4.25] فرض کنیم T یک عملگر فشرده روی فضای باناخ A باشد. در این صورت $\sigma(T)$ شماراست، و هر $\lambda \in \sigma(T)$ یک ویژه مقدار برای T و یک نقطه تنها برای $\sigma(T)$ است.*

قضیه ۱.۲.۱۳. **(نگاشت باز)** *[6, 12.1] فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ تبدیل خطی پیوسته و پوشا باشد. در این صورت به ازای هر مجموعه باز مانند $G \subseteq X$، $T(G)$ در Y باز است.*

نتیجه ۱.۲.۱۴. *فرض کنیم X و Y فضاهایی باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی، پیوسته، یک به یک و پوشا باشد. در این صورت ثابت های $a, b > 0$ موجودند به طوری که*

$$a \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel \leq b \parallel x \parallel \qquad (x \in X).$$