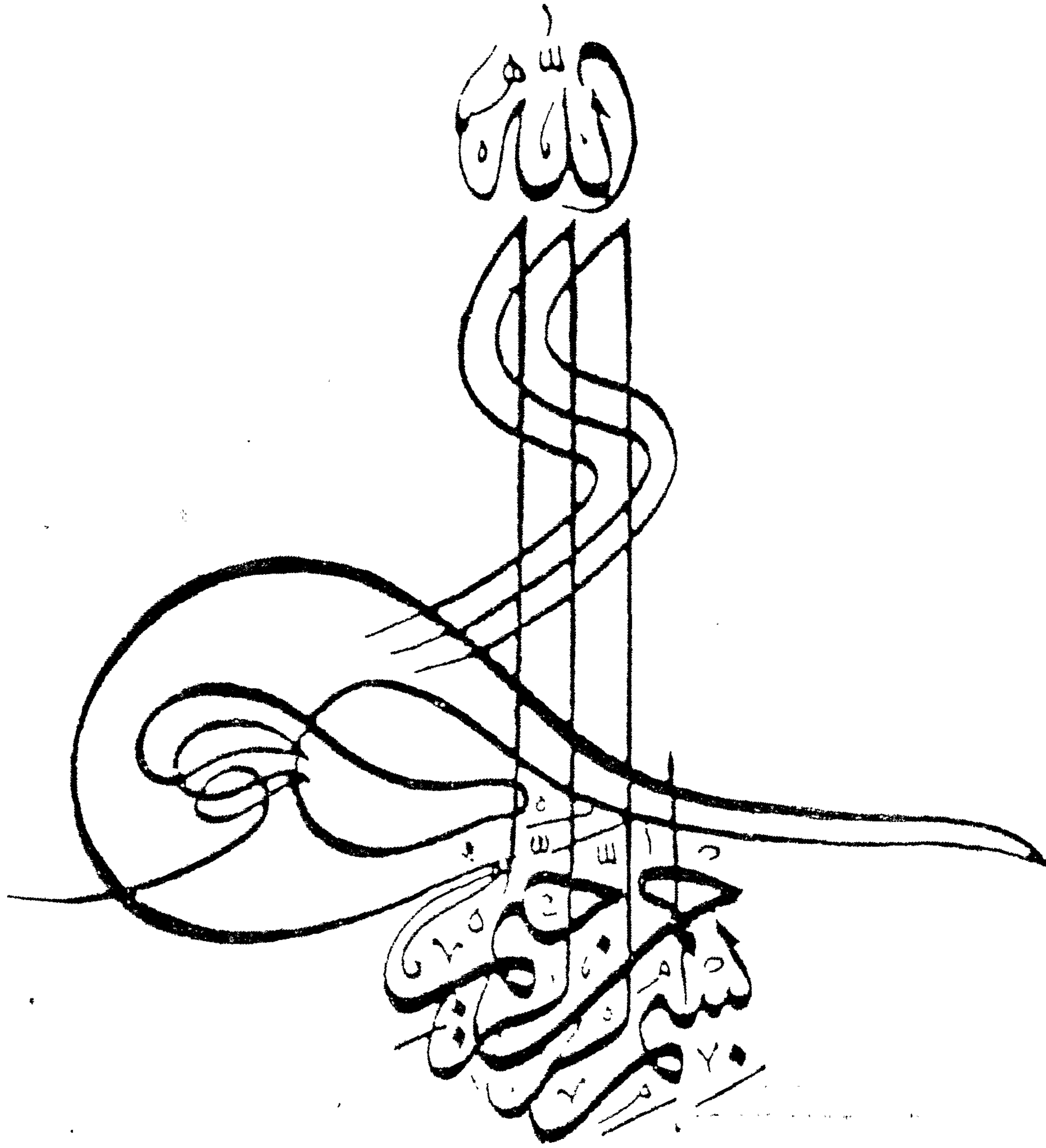
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

# کاربرد موجکهای متناوب در حل معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم

استاد راهنما: دکتر فرید (محمّد) مالک قائینی

استاد مشاور: دکتر سیّد محمّد مهدی حسینی

پژوهش و نگارش:

سمیرا ابوطالبی

مهرماه ۱۳۸۵

تقدیم به :

پدر و مادرم

که سبزینه حیاتند

و سر چشمه صبر و استقامت

و همسر محبوبم

که آینه آفتاب است

و دریای بیکران عشق و عطوفت

# قدردانی

باید خواست که رسید، خواستنی به قدرت عشق، عشقی به وسعت ایمان، ایمانی به عمق هستی، که هستی همه عشق است و عشق همه او، و او همه چیز، و چیزی نیست غیر او و چیزی نیست غیر از خواستن برای رسیدن. سپاس خداوند را که مرا غرق رحمت و محبت خویش کرد تا بتوانم سیر جدیدی از زندگی را درک نمایم.

در این مسیر بر خود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که مرا دربه انجام رسانیدن یاری و همراهی کرده اند، تشکّر نمایم. در ابتدا از استاد گرامی، جناب آقای دکتر فرید (محمّد) مالک قائینی صمیمانه قدردانی می‌کنم، چرا که انجام و تدوین این پایان‌نامه را از آغاز تا پایان مرهون راهنمایی‌ها و الطاف بی‌دریغ این استاد گرانقدر می‌دانم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سیّد محمّد مهدی حسینی که با قبول مسئولیت استاد مشاور این پایان‌نامه همواره این جانب را مرهون راهنمایی‌های ارزشمندشان نمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر سیّد مهدی کرباسی و جناب آقای دکتر محمود هادیزاده، عضو هیئت علمی دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، که با قبول داوری این پایان نامه از سوی ایشان توفیقی بزرگ نصیب اینجانب شد کمال تشکّر و قدردانی را دارم. امید آن دارم که شکر گذار لایق بزرگواریشان باشم.

همچنین ازسرکار خانم عابدینی، منشی دفتر دانشکده ریاضی، که در این دو سال زحمات بسیاری کشیدند سپاسگزارم. بی‌شک این کار علمی بدون حمایت‌های روانی و عاطفی خواهرانم مرضیه و مریم و تمامی اعضای خانواده‌ام و همسر مهربانم به انجام نمی رسید. تشکّر از آنها با واژه ها و الفاظ میسر نیست. از درگاه خداوند متعال برای آنها سلامتی و شادکامی آرزومندم.

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورت‌جلسه دفاعیه پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی خانم **سمیرا ابوطالبی** دانشجوی کارشناسی ارشد مجتمع علوم دانشگاه یزد، در رشته/ گرایش ریاضی کاربردی

تحت عنوان: **کاربرد موجکهای متناوب در حل معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم**

و تعداد واحد ۶ در تاریخ ۸۵/۷/۲۶

با حضور اعضای هیات داوران متشکل از

| | نام و نام خانوادگی | امضاء |
|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما | دکتر فرید(محمد) مالک قائینی | |
| ۲- استاد مشاور | دکتر سیدمحمدمهدی حسینی | |
| ۳- داور خارج از گروه | دکتر محمود هادیزاده | |
| ۴- داور داخل گروه | دکتر سیدمهدی کرباسی | |

تشکیل گردید و پس از ارزیابی پایان‌نامه توسط هیات داوران با درجهٔ **عالی** و نمره به عدد **۱۹/۷۵** و حروف **نوزده و هفتاد و پنج صدم** مورد تصویب قرار گرفت.

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام و نام خانوادگی: دکتر فاطمه تمدن

امضاء

# فهرست مندرجات

# لیست اشکال

# چکیده

در این پایان‌نامه معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم، مورد بررسی قرار می‌گیرند.
در ابتدا تعاریف و قضایایی در مورد موجک‌ها، موجک‌های متناوب و معادلات انتگرال و به‌خصوص معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم بیان شده است.
در ادامه نشان داده می‌شود که با استفاده از موجک‌های متناوب می‌توان معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم را حل کرد. در این راستا معادلات انتگرال به دستگاه معادلات جبری خطی و غیر خطی تبدیل می‌شوند. در پایان یک نوع خاص موجک متناوب یعنی موجک دوبشی که برای بیان واضح‌تر روش بیان شده، ارائه می‌گردد.

## مقدمه

اولین اشاره به موجک‌ها، در ضمیمه‌ی رساله‌ی آلفرد هار[۱۰] در سال ۱۹۰۹، بوده است. هار با ارائه‌ی دنباله‌ی توابع $h_0, h_1, ..., h_n, ...$ که یک پایه‌ی متعامد یکّه برای فضای $L^2([0,1])$ است، راهی را به نظریه‌ی موجک‌ها گشود. موجکها در زمینه های مختلفی از جمله اخترشناسی، مهندسی هسته ای، پردازش تصویر و سیگنال، معادلات انتگرال و ... کاربرد دارند.

از سوی دیگر نام معادلات انتگرال اولین بار توسط دو بوا ریموند[۱] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شد، اگرچه اولین اشاره به معادلات انتگرال در مساله‌ی خم همزمانی[۲] در رساله‌ی آبل، که در سال‌های ۱۸۲۳ و ۱۸۲۶ چاپ گردید، بوده است.

در سال‌های اخیر، توابع پایه‌ی متعامد یکّه‌ی متفاوتی از جمله توابع فوریه[۲]، چندجمله‌ای‌های چبی‌شف[۲۱] و موجک‌ها[۸، ۱۴]، برای تقریب جواب معادلات انتگرال استفاده شده‌اند.

در استفاده از روش پایه‌های موجک برای حل معادلات انتگرال، به ناچار به محاسبه‌ی حاصلضرب داخلی موجک‌ها یا به طور متناظر به مقیاس بندی توابع انتگرال‌پذیر مربعی منظم نیاز خواهیم داشت[۸، ۱۴].

در این پایان‌نامه از روش گالرکین مبتنی بر پایه‌ی موجک‌های متناوب برای به‌دست آوردن جواب عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی، غیرخطی و تکین نوع دوم استفاده می‌کنیم. یک مزیت این روش بر سایر روش‌های گالرکین موجود در این است که در این روش ضرایب بسط موجک به صورت دقیق بدون نیاز به محاسبه‌ی انتگرال‌های

---

[۱] du Bois-Reymond

[۲] Tautochrone

موجک به‌دست می‌آیند و بنابراین روش ارائه شده به عنوان یک راه حل ارزان و دقیق برای معادلات انتگرال بر پایه‌ی موجک شمرده می‌شود.

در فصل اول ضمن بیان برخی تعاریف مورد نیاز، تابع مقیاس، موجک و آنالیز چندریزه ساز معرفی می‌گردند.

در فصل دوم تعاریف و قضایا برای موجک متناوب بیان خواهد شد.

در فصل سوم معادلات انتگرال معرفی می‌گردد و از پایه‌ی موجک متناوب برای حل این معادلات استفاده می شود.

در فصل چهارم یک روش جدید برای محاسبه ضرایب تظریف و مقادیر تابع مقیاس و موجک دوبشی بیان خواهد شد.

در فصل پنجم از موجک دوبشی برای حل معادله انتگرال فردهلم نوع دوم استفاده می‌شود و با ذکر چند مثال دقت روش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

# فصل ۱

# موجک

# ۱—۱ تعریف‌ها و پیش‌نیازهای ریاضی

**تعریف ۱.۱.۱:** فضای توابع انتگرال‌پذیر مربعی با ضرب داخلی

$$< f,g >= \int_{\mathcal{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

و نرم

$$\|f\|_۲ =< f,f >= \int_{\mathcal{R}} |f(x)|^۲ dx$$

را با $L^۲(\mathcal{R})$ نمایش می‌دهیم[۲۵].

یک تابع $f \in L^۲(\mathcal{R})$ اغلب بهتر تحلیل می‌شود اگر به صورت یک ترکیب خطی

$$f(t) = \sum_l a_l \psi_l(t) \qquad (۱.۱.۱)$$

نشان داده شود که $l$ یک اندیس صحیح برای مجموع متناهی یا نامتناهی، $a_l$ ها ضرایب حقیقی — مقدار بسط و $\{\psi_l(t)\}_l$ یک مجموعه از توابع حقیقی مقدار از $t$ است که مجموعه‌ی بسط [۱] نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۱:** اگر بسط (۱.۱.۱) یکتا باشد، مجموعه‌ی بسط متناظر یک پایه[۲] برای $L^۲(\mathcal{R})$ نامیده می‌شود.

اگر پایه متعامد باشد به این معنا که

$$< \psi_k(t), \psi_l(t) >= \int \psi_k(t)\psi_l(t)dt = \alpha_k \delta_{kl} \qquad (۲.۱.۱)$$

که $\delta_{kl}$ تابع دلتای کرونکر است، آن‌گاه ضرایب را با حاصلضرب داخلی

$$a_k = \frac{۱}{\alpha_k} < f(t), \psi_k(t) >= \frac{۱}{\alpha_k} \int f(t)\psi_k(t)dt \qquad (۳.۱.۱)$$

---

[۱] expansion set

[۲] basis

می‌توان محاسبه کرد. در واقع با جایگزینی (۱.۱.۱) در (۳.۱.۱) و استفاده از (۲.۱.۱) ضرایب یکتای $a_k$ بدست می‌آیند[٦].

**تعریف ۳.۱.۱:** اگر در (۲.۱.۱)، $\alpha_k = ۱$، آن‌گاه پایه، یک پایه‌ی متعامد یکّه[۳] نامیده می‌شود.

**تعریف ۴.۱.۱:** یک موجک (یا موجک مادر) تابعی مانند $\psi \in L^۲(\mathcal{R})$ است به طوری‌که مجموعه‌ی

$$\{\sqrt{۲^m}\psi(۲^m x - n) : m, n \in Z\} = \{\psi_{m,n}(x) : m, n \in Z\}$$

تحت ضرب داخلی

$$< \psi_{m,n}(x), \psi_{k,l}(x) >= \int_{\mathcal{R}} \psi_{m,n}(x)\psi_{k,l}(x)dx$$

یک پایه‌ی متعامد یکّه برای $L^۲(R)$ باشد[۲۵]، یعنی در واقع

$$< \psi_{m,n}(x), \psi_{k,l}(x) >= \delta_{m,k}\delta_{n,l}$$

در بسط موجک توابع، دستگاه دو متغیره‌ای به صورت

$$f(t) = \sum_n \sum_m a_{m,n}\psi_{m,n}(t) \qquad (۴.۱.۱)$$

به‌دست می‌آید که هر دوی $n, m$ اندیس‌های صحیح هستند و $\psi_{m,n}(t)$ ها توابع بسط موجک هستند. مجموعه‌ی ضرایب بسط یعنی $a_{m,n}$ تبدیل موجک گسسته[۴] $f(t)$ و (۴.۱.۱) تبدیل وارون موجکی[۵] نامیده می‌شوند[٦].

به عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ی موجک $\psi_{m,n}(t)$ برای $m, n = ۱, ۲, ...$ داده شده باشد

---

[۳] orthonormal base

[۴] Discrete wavelet transform

[۵] Inverse transform

آن‌گاه برای هر تابع مناسب $f$ رابطه (۴.۱.۱) برقرار است.

یک مزیت استفاده از تبدیلات موجک بر سایر تبدیلات آن است که تبدیلات موجک اکثر توابع (یعنی مجموعه‌ی ضرایب بسط آن‌ها) با $O(N)$ عملیات محاسبه می‌شوند در حالی‌که سایر تبدیلات از جمله تبدیل سریع فوریه معمولاً به $O(N\log(N))$ عملیات نیاز دارند [٦].

## ۱—۲ تابع مقیاس

تعریف ۱.۲.۱: یک مجموعه از توابع مقیاس[٦] برحسب انتقال‌های صحیح[۷] توابع پایه به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\phi_k(t) = \phi(t-k), \quad k \in Z, \phi \in L^2(\mathcal{R})$$

زیر فضایی از $L^2(\mathcal{R})$ که با این توابع تولید می‌شود به صورت زیر است :

$$V_0 = \overline{span_k\{\phi_k(t)\}}, \quad k \in Z$$

بدین معنا که:

$$\forall f(t) \in V_0, \quad f(t) = \sum_{k \in Z} a_k \phi_k(t)$$

یک خانواده‌ی دو بعدی از توابع، از تابع پایه با مقیاس بندی[۸] و انتقال به صورت زیر تولید می‌شود :

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k) \tag{1.2.1}$$

که زیرفضای

$$V_j = \overline{span_k\{\phi_k(2^j t)\}} = \overline{span_k\{\phi_{j,k}(t)\}}, \quad k \in Z$$

از$L^2(\mathcal{R})$ را تولید می کند. در واقع اگر $f(t) \in V_j$ ، آن‌گاه

$$f(t) = \sum_k a_k \phi(2^j t - k)$$

گاهی تابع $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$، که از مقیاس بندی و انتقال تابع $\phi(t)$ به‌دست آمده، موجک تولید کننده یا موجک مادر نامیده می‌شود [٦].

---

[٦] Scaling functions

[۷] Integer translates

[۸] Scaling

## ۱—۳ آنالیز چند ریزه ساز

**تعریف ۱.۳.۱:** تابع مقیاس $\phi$ را در نظر می‌گیریم. یک پایه‌ی پایدار[۹] برای $V_n$ که با $\{\phi_{kn} : n \in Z\}$ داده می‌شود به صورت :

$$\phi_{kn}(t) = ۲^{n/۲}\phi(۲^n t - k)$$

تعریف می‌شود[۱۲].

**تعریف ۲.۳.۱:** یک آنالیز چندریزه ساز[۱۰] از $L^۲(\mathcal{R})$ یک دنباله‌ی تودرتوی نامتناهی از زیرفضاهای $L^۲(\mathcal{R})$ با خواص زیر است:

$MRA.۱$ — برای هر $m \in Z$ ، $V_m \subseteq V_{m+۱}$.

$MRA.۲$ — $\bigcup_n V_n$ در $L^۲(\mathcal{R})$ چگال است، یعنی

$$\overline{\bigcup_n V_n} = L^۲(\mathcal{R})$$

و به‌علاوه داریم $\bigcap_{n\in Z} V_n = \{۰\}$ .

$MRA.۳$ — $f(t) \in V_n \Longleftrightarrow f(۲t) \in V_{n+۱}, \forall n \in Z$.

$MRA.۴$ — $f(t) \in V_n \Longleftrightarrow f(۲^n t - k) \in V_n, \forall n, k \in Z$.

$MRA.۵$ — یک تابع $\phi \in L^۲(\mathcal{R})$ وجود دارد به طوری‌که $\{\phi(t-k) : k \in Z\}$ یک پایه‌ی پایدار برای $V_۰$ است [۱۲].

تودرتویی تولیدکننده‌های $\phi(۲^j t - k)$ ، که با $V_j$ در $MRA.۱$, $MRA.۳$ نشان داده شده، این نتیجه را می‌دهد که اگر $\phi(t)$ در $V_۰$ باشد، آن‌گاه در $V_۱$ فضای تولید شده به وسیله $\phi(۲t)$، هم هست و در نتیجه $\phi(t)$ را به صورت یک مجموع از انتقال‌های $\phi(۲t)$ به

---

[۹] Stable base

[۱۰] Multiresolution Analysis (MRA)