قدردانی و تشکر

خدایا تو را سپاسگزارم که مرا از دریای بی‌کران نعمت‌هایت سیراب نمودی و چراغ علم را فرا روی زندگی‌ام قراردادی.

اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و نه توان تشکر از بندگان تو.

با حداکثر بضاعتم که جز به قلم نیاید از دو گوهر زندگی‌ام که راه درست زندگی کردن را به من آموختند و با تحمل دشواریها سبب شدند تا در کمال آسودگی خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند، صمیمانه سپاسگزارم و از درگاه الهی سلامتی و طول عمر ایشان را خواستارم.

همچنین از خواهر و برادر عزیزم که همواره مشوق و پشتیبان من بوده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم و آرزو دارم وجود گرامیشان آزرده‌ی هیچ گزندی مباشد.

از کلیه اساتیدی که در طول سالهای تحصیل افتخار شاگردیشان را کسب کردم کمال تشکر را دارم، بخصوص از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سعید مقصودی که بی‌شک این پایان نامه بدون راهنمایی و مساعدت و تیزبینی علمی کم نظیر ایشان به سرانجام نمی‌رسید، تشکر و قدردانی می‌کنم. از استاد گرانقدر و ارجمند جناب آقای دکتر حبیب امیری که با سعه‌صدر و گشاده‌رویی قابل تحسینی از هیچ مساعدتی دریغ نورزیدند، سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر خطیب زاده و جناب آقای دکتر حبیب ا.. سامع که مسئولیت بازخوانی و داوری این پایان نامه را برعهده داشتند، متشکرم.

از کلیه دانشجویان به خصوص دانشجویان دوره‌ی دکتری و دوستان عزیزم به خاطر تمامی محبتها و همکاریشان صمیمانه سپاسگزارم و توفیق روز افزون ایشان را از خداوند متعال خواستارم.

تقدیم به پدر و مادرم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه‌ی ایثار و از خودگذشتی.

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان،

که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است،

و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز)

عنوان:

برخی ملاحظات نظریه اندازه‌ای درباره اندازه‌ی هار و پیچش اندازه‌ها روی گروه و نیم گروه توپولوژیک

نگارش:

فروغ شریفی

استاد راهنما: **دکتر سعید مقصودی**

استاد مشاور: **دکتر حبیب امیری**

دی ۱۳۸۹

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا نتایج کلی درباره‌ی منظم درونی و بیرونی بودن و همچنین گسترش و ضربی بودن اندازه‌های بئر، بورل ضعیف و بورل بررسی می‌شود. سپس این قضایا برای اندازه‌ی هار روی یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده به کار گرفته می‌شوند. گسترش‌های اندازه هار از جنبه‌های مختلفی بررسی می‌شود.

رده‌بندی موضوعی: ۲۸C۱۰، ۲۲D۰۵، ۴۳A۰۵.

کلمات کلیدی: اندازه بئر، اندازه بورل، اندازه بورل ضعیف، اندازه هار، گروه توپولوژیک، گسترش لبگ، گسترش کاراتئودری، منظم درونی، منظم بیرونی، یک و نیم منظم.

پیشگفتار

آنالیز هارمونیک در معنایی کلی بررسی توابع و اندازه‌های تعریف شده روی گروه‌های توپولوژیک است. به همین دلیل مفاهیم اندازه نقش پایه‌ای در آن بر عهده دارند؛ بویژه اندازه‌های منظم.
در این پایان نامه به بررسی رده‌های متفاوتی از اندازه‌ها و کاربرد آنها روی گروه‌های توپولوژیک می‌پردازیم.
در فصل اول مقدمات مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم.
در فصل دوم اندازه‌های بئر، بورل ضعیف و بورل که رده‌ی مهمی از اندازه‌ها روی فضای توپولوژیک هستند را معرفی می‌کنیم. در این فصل ارتباط این سه رده را با یکدیگر و خواص منظم بودن و ضربی بودن آنها را بررسی می‌کنیم.
در فصل سوم گسترش اندازه‌ها از یک رده به رده‌ی دیگر با در نظر گرفتن خواص منظم بودن را بررسی می‌کنیم.
در فصل چهارم ابتدا دو اثبات برای وجود اندازه هار یکی برای هار بورل ضعیف و دیگری برای هار بورل ارائه می‌کنیم. سپس نتایج فصل‌های دوم و سوم را برای اندازه‌ی هار به کار می‌گیریم. مثلاً ثابت می‌کنیم اندازه هار وقتی منظم دوطرفه است که گروه گسسته یا σ−فشرده باشد. در این فصل گسترشهای حداکثری ممکن اندازه هار با نگه داشتن برخی خواص منظم بودن مثل منظم درونی یا بیرونی بودن آن را بررسی می‌کنیم. همچنین امکان بازیابی اندازه هار از اندازه هار زیرگروهی را مطالعه می‌کنیم.
نهایتاً در فصل آخر ارائه منظم و یکدستی از خواص اندازه‌ها و توابع اندازه‌پذیر روی گروه موضعاً فشرده را ارائه می‌کنیم.

ق

فصل ۱

مقدمات

در این فصل تعاریف، مفاهیم و قضیه‌های مورد نیاز برای فصل‌های بعد را می آوریم.

تعریف ۱.۱ (الف) زیرمجموعه‌ی E از فضای توپولوژیک X زیرمجموعه‌ی σ–فشرده نامیده می‌شود هرگاه دنباله‌ی (C_n) از مجموعه‌های فشرده موجود باشد که $E = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$.

(ب) فضای X را موضعاً فشرده خوانیم هرگاه هر نقطه از X دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.

(ج) زیر مجموعه‌ی E در فضای موضعاً فشرده X، σ–کراندار است اگر دنباله‌ی (C_n) از زیرمجموعه‌های فشرده X موجود باشد که $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} C_n$.

تعریف ۲.۱ فضای توپولوژیک X منظم است هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ و هر $x \in U$ مجموعه‌ی باز V وجود داشته باشد به طوری که $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

گزاره ۳.۱ فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های فضای توپولوژیک X باشد به طوری که اشتراک هر تعداد متناهی از اعضاء $\mathcal{F}$ غیرتهی باشد. همچنین فرض کنید عضوی از $\mathcal{F}$ فشرده و بقیه اعضای $\mathcal{F}$ بسته باشند، آن‌گاه $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

اثبات. به لم ۲.۲ از [۲۵] رجوع کنید. ■

لم ۴.۱ (لم اوریسون). فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد به طوری که برای هر دو زیرمجموعه‌ی بسته و ازهم مجزای $A_۱$ و $A_۲$ زیرمجموعه‌های باز و مجزای O_i $(i = ۱, ۲)$ موجوداند که $A_i \subseteq O_i$. آن گاه تابع پیوسته $f : X \to [۰, ۱]$ موجود است به طوری که $f|_{A_۱} \equiv ۰$ و $f|_{A_۲} \equiv ۱$

اثبات. به مرجع [۲۵] مراجعه کنید. ■

گزاره ۵.۱ فرض کنید X فضای هاسدورف و $K_۱$ و $K_۲$ زیر مجموعه‌های فشرده و مجزا در X باشند. آن‌گاه مجموعه‌های باز و مجزای $U_۱$ و $U_۲$ یافت می‌شود به طوری که $K_i \subset U_i$ برای $i = ۱, ۲$.

اثبات. به گزاره‌ی ۷.۱.۱ از [۷] مراجعه کنید. ■

لم ۶.۱ اگر X یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد و A, C به ترتیب زیر مجموعه‌های فشرده و بسته از X باشند به طوری که $C \cap A = \emptyset$. آن‌گاه مجموعه‌های باز و مجزای U, V یافت می‌شوند به طوری که $C \subseteq U$ و $A \subseteq V$. علاوه بر آن $\overline{U}$ را می‌توان فشرده در نظر گرفت.

اثبات. به گزاره ۲.۵ از [۲۵] رجوع کنید. ■

گزاره ۷.۱ اگر X موضعاً فشرده و هاسدورف باشد و K زیر مجموعه‌ی فشرده از X و U زیرمجموعه‌ای باز از X شامل K باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی باز V یافت می‌شود که $\overline{V}$ فشرده است و $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

اثبات. به گزاره‌ی ۷.۱.۳ از [۷] مراجعه کنید. ■

لم ۸.۱ اگر X فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد و K زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از آن باشد. اگر $U_۱$ و $U_۲$ دو زیر مجموعه‌ی باز از X باشند به طوری که $K \subset U_۱ \cup U_۲$. آن‌گاه مجموعه‌های فشرده‌ی $K_۱$ و $K_۲$ یافت می‌شوند که $K = K_۱ \cup K_۲$ و $K_i \subset U_i$ برای $i = ۱, ۲$.

اثبات. به لم ۷.۱.۹ از [۷] مراجعه کنید. ■

تعریف ۹.۱ (الف) فرض کنید f یک تابع پیوسته حقیقی ـ مقدار و یا تابع پیوسته مختلط ـ مقدار روی فضای توپولوژیک X باشد. بستار مجموعه‌ی $\{x : \ x \in X, \ f(x) \neq ۰\}$ را محمل تابع f نامیم و با $\mathrm{supp}(f)$ نمایش می‌دهیم.

(ب) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته $f : X \to Y$ با محمل مشمول در یک مجموعه‌ی فشرده را با $C_c(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱ زیر مجموعه‌ی E از فضای توپولوژیک X را G_δ نامند، هرگاه دنباله‌ی (U_n) از مجموعه‌های باز موجود باشد که $E = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$.

لم ۱۱.۱ فرض کنید X فضای هاسدورف موضعاً فشرده، f تابع پیوسته حقیقی ـ مقدار روی X و c عدد حقیقی‌باشد، آن‌گاه سه مجموعه‌ی زیر G_δ بسته هستند.

$$\{x : f(x) \leq c\}, \qquad \{x : f(x) \geq c\}, \qquad \{x : f(x) = c\}.$$

همچنین اگر C مجموعه‌ی G_δی فشرده باشد، آن‌گاه تابع پیوسته حقیقی ـ مقدار f موجود است که $0 \leq f(x) \leq 1$ برای هر $x \in X$ و $C = \{x : f(x) = 0\}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۲۱۷ از [۸] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه و $X^2 = X \times X$ حاصل ضرب دکارتی X در خودش باشد.

(الف) برای $V \subseteq X^2$ منظور از V^{-1} عبارت است از $V^{-1} = \{(y,x) : \ (x,y) \in V\}$.

(ب) اگر U, V دو زیرمجموعه از X^2 باشند، آن‌گاه منظور از $U \circ V$ عبارت است از

$$U \circ V = \{(x,z) : \ \exists \ y \in X \quad (x,y) \in V, \quad (y,z) \in U\}.$$

(ج) منظور از قطر X عبارت است از $\Delta_X = \{(x,x) : \ x \in X\}$.

(د) اگر $U \subseteq X^2$ و $A \subseteq X$، تعریف می‌کنیم

$$U[A] = \{y \in X : \ \exists \ x \in A, \ (x,y) \in U\}.$$

به جای $U[\{x\}]$ می‌نویسیم $U[x]$.

تعریف ۱۳.۱ اگر X یک مجموعه و $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X^2)$ و $U \neq \emptyset$، گوییم $\mathcal{U}$ یک یکنواختی روی X است هرگاه

(الف) $\forall \ U \in \mathcal{U}, \quad \Delta_X \subseteq U$

(ب) $\forall\, U \in \mathcal{U}, \quad U^{-1} \in \mathcal{U}$

(ج) $\forall\, U \in \mathcal{U}, \quad \exists\, V \in \mathcal{U}, \quad V^{2} = V \circ V \subseteq U$

(د) $\forall\, U, V \in \mathcal{U}, \quad U \cap V \in \mathcal{U}$

(هـ) $\forall\, U \in \mathcal{U}, \quad \forall\, A \subseteq X^{2}, \quad (U \subseteq A \longrightarrow A \in \mathcal{U})$.

اگر $\mathcal{U}$ یک یکنواختی روی X باشد، گوییم $(X,\mathcal{U})$ یک فضای یکنواخت است. اگر $\mathcal{U}$ یک یکنواختی روی X باشد، گوییم $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ یک پایه برای یکنواختی $\mathcal{U}$ است هرگاه

$$\forall\, U \in \mathcal{U}, \quad \exists\, B \in \mathcal{B}, \quad B \subset U.$$

فضای یکنواخت $(X,\mathcal{U})$ را در نظر بگیرید. برای هر $x \in X$ قرار می‌دهیم

$$\mathcal{U}_x = \{U[x] : \ U \in \mathcal{U}\}.$$

به راحتی می‌توان دید که $\mathcal{U}_x$ یک پایه از همسایگی‌ها حول x، توپولوژی منحصر به فردی روی X تشکیل می‌دهد. فضای X را همراه با توپولوژی فوق در نظر می‌گیریم و آن را توپولوژی القایی از یکنواختی $\mathcal{U}$ می‌نامیم و با $\tau_{\mathcal{U}}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید (X,τ) یک فضای فشرده منظم باشد، دراین صورت همسایگی‌های قطر یک یکنواختی برای X تشکیل می‌دهند. به علاوه توپولوژی این یکنواختی با τ یکی است.

اثبات. به قضیه‌ی ٦.٣٠ از [١٧] مراجعه کنید . ■

قضیه ۱۵.۱ فضای یکنواخت $(X,\mathcal{U})$ متریک پذیر است اگر و تنها اگر یکنواختی آن یک پایه شمارا داشته باشد.

اثبات. به قضیه‌ی ٦.٣٠ از [١٧] مراجعه کنید . ■

یادآوری می‌کنیم فضای یکنواخت $(X,\mathcal{U})$ متریک پذیر است هرگاه متر ρ روی X یافت شود که مجموعه‌های $\{(x,y) : \ \rho(x,y) < r\}$، $r > 0$، یک پایه برای یکنواختی $\mathcal{U}$ تشکیل دهند.

تعریف ۱٦.۱ مجموعه‌ی G را یک گروه توپولوژیک نامیم، هرگاه G یک فضای توپولوژیک باشد و

(الف) G یک گروه باشد.

(ب) نگاشت $G \times G \to G$ با ضابطه‌ی $(x,y) \to xy^{-1}$ پیوسته باشد.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید G یک گروه نه لزوماً آبلی و نه گروه توپولوژیک باشد. عمل ضرب روی مشخصه‌های G به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\chi_۱\chi_۲(x) = \chi_۱(x)\chi_۲(x)$$

مجموعه تمام مشخصه‌های پیوسته کراندار که با عمل فوق یک گروه تشکیل می‌دهند را گروه دوگان G نامند و با $\hat{G}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید G گروه توپولوژیک دلخواهی باشد. گوییم زیرمجموعه‌ی E در گروه توپولوژیک G کراندار است، هرگاه برای هر همسایگی U از e، مجموعه‌ی متناهی $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ موجود باشد به طوری که $E \subset \cup_{i=۱}^{n} x_i U$.

توجه کنید اگر G فضای موضعاً فشرده باشد، تعریف بالا معادل است با اینکه مجموعه‌ی فشرده‌ی C در G موجود باشد که $E \subset C$.

گزاره ۱۹.۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و $\mathcal{U}$ پایه‌ای از همسایگی‌های حول e باشد. آن‌گاه برای هر $x \in G$ مجموعه‌های $\{xU : U \in \mathcal{U}\}$ و $\{Ux : U \in \mathcal{U}\}$ پایه‌ای از همسایگی‌ها حول x هستند.

اثبات. به لم ۲.۲ از [۲۵] مراجعه کنید. ■

گزاره ۲۰.۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. آن‌گاه

(۱) اگر $O \subset G$ باز و $E \subset G$ دلخواه‌باشد، آن‌گاه مجموعه‌های EO ، OE و $O^{-۱}$ همگی بازند.

(۲) هرگاه B و A زیر مجموعه‌های فشرده‌ای از G باشند، آن‌گاه AB و $B^{-۱}$ نیز فشرده‌اند.

اثبات. به لم ۳.۱ از [۲۵] رجوع کنید. ■

گزاره ۲۱.۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیک، K زیر مجموعه‌ی فشرده و U زیرمجموعه‌ای باز از G شامل K باشد آن‌گاه همسایگی‌های باز V_R و V_L از e موجوداند که $KV_R \subset U$ و $V_L K \subset U$.

اثبات. به گزاره‌ی ۹.۱.۳ از [۷] مراجعه کنید. ■

لم ۲۲.۱ فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. آن‌گاه
(الف) زیرگروه H باز است اگر و فقط اگر درون ناتهی باشد.
(ب) هر زیرگروه باز از G بسته است.

اثبات. به گزاره‌ی ۹.۱.٦ از [۷] مراجعه کنید. ■

قضیه ۲۳.۱ (قضیه‌ی سوم یکریختی). فرض کنید G یک گروه و H, N زیرگروه‌های نرمال G باشند به طوری که $H \subset N$. آن‌گاه

$$\frac{G}{N} \simeq \frac{\frac{G}{H}}{\frac{N}{H}}.$$

اثبات. به مرجع [۹] مراجعه کنید. ■

گزاره ۲۴.۱ هر گروه موضعاً فشرده‌ی G شامل زیر گروه بسته، باز و $\sigma-$فشرده‌ای مانند H است. علاوه بر آن $G = \bigcup_{i \in I} x_i H$ برای مجموعه مناسبی از اندیس I.

اثبات. فرض کنید V همسایگی فشرده و متقارن از e باشد. ثابت می‌کنیم $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ زیرگروه باز، بسته و $\sigma-$ فشرده‌ای در G است. فرض کنید $h, h' \in H$. پس به ازاء m و nی

$$h \in V^n \quad , h' \in V^m.$$

لذا $hh' \in V^{m+n} \subseteq H$. از آنجا که H متقارن است بنابراین برای هر $h \in H$، $h^{-1} \in H$ و در نتیجه H زیرگروه است. حال چون $V \subset H$، بنابراین H درون ناتهی است. در نتیجه H باز و بسته است. به وضوح H، $\sigma-$فشرده است. از $\sigma-$فشردگی H، $\sigma-$فشردگی xH نتیجه می‌شود. خانواده‌ی $\{xH \ ; \ x \in G\}$، G را می‌پوشاند لذا $G = \bigcup_{x \in I} xH$ که در آن I زیرمجموعه‌ی مناسبی از G است. ■

تعریف ۲۵.۱ (الف) فرض کنید $\sum$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که
(۱) برای هر $E, F \in \sum$ ، $F \setminus E \in \sum$.
(۲) برای هر تعداد شمارا از زیرمجموعه‌های $E_n \in \sum$، $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \sum$.
(۳) $X \in \sum$.
در این صورت گوییم $\sum$ یک $\sigma-$جبر روی X است.
(ب) چنانچه ویژگی (۳) حذف شود، $\sum$ را یک $\sigma-$حلقه می‌نامیم.
(ج) اگر شرط (۲) برای تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های X برقرار باشد، آن‌گاه $\sum$ را یک جبر و چنانچه شرط (۳) هم حذف شود یک حلقه نامیده می‌شود.

توجه کنید هر جبر، یک حلقه شامل X است اما عکس آن برقرار نیست.
فرض کنید X یک مجموعه و $\mathbf{E}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. کوچکترین $\sigma-$حلقه شامل $\mathbf{E}$ را $\sigma-$حلقه تولید شده توسط $\mathbf{E}$ می‌نامیم و با $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ نشان می‌دهیم، به وضوح چنین $\sigma-$حلقه‌ای همواره وجود دارد.

گزاره ۲۶.۱ (الف) اگر $\mathbf{E}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد و A مجموعه‌ای در $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$، آن‌گاه زیر رده‌ی شمارای $\mathbf{D}$ از $\mathbf{E}$ موجود است که A در $\sigma-$حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathbf{D}$ قرار دارد.

(ب) فرض کنید X یک مجموعه و $\mathbf{E}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. دراین صورت هر مجموعه در $\sigma-$حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathbf{E}$ در اجتماع شمارایی از مجموعه‌های $\mathbf{E}$ قراردارد.

(ج) فرض کنید $\mathbf{E}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه باشد. اگر عدداصلی $\mathbf{E}$ کمتر از c باشد، آن‌گاه عدد اصلی $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ نیز کمتر از c است.

(د) اگر $\mathbf{R}$ یک $\sigma-$حلقه از زیرمجموعه‌های X باشد و $E \subset X$. آن‌گاه رده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های $A \subset X$ که $A \cap E \in \mathbf{R}$ یک $\sigma-$حلقه است.

اثبات. (الف) به صفحه‌ی ۲۴ از [۸] مراجعه کنید.

(ب) به صفحه‌ی ۵ از [۴] مراجعه کنید.

(ج) به صفحه‌ی ۲۶ از [۸] مراجعه کنید.

(د) به نتیجه‌ی ۱.۶ از [۴] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۷.۱ فرض کنید X فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف باشد.

(الف) خانواده‌ی مجموعه‌های بئر در X، $\sigma-$حلقه تولید شده توسط زیرمجموعه‌های G_δ فشرده در X است که آن را با $B_\circ(X)$ نشان می‌دهیم.

(ب) خانواده‌ی مجموعه‌های بورل ضعیف در X، $\sigma-$حلقه تولید شده توسط زیرمجموعه‌های فشرده است که آن را با $B_\omega(X)$ نمایش می‌دهیم.

(ج) خانواده‌ی مجموعه‌های بورل در X، $\sigma-$حلقه تولید شده توسط زیرمجموعه‌های بسته است و آن را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۲۸.۱ فرض کنید E یک زیرمجموعه‌ی بورل ضعیف از گروه توپولوژیک موضعاً فشرده G باشد، آن‌گاه زیرگروه درون ناتهی و $\sigma-$فشرده‌ی H از G موجود است که $E \subset H$.

اثبات. بنا به گزاره‌ی ۲۶.۱(ب)، کافی است ثابت کنیم اگر (C_n) دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده در G باشد، آن‌گاه زیرگروه درون ناتهی و σ-فشرده‌ی H از G موجود است به طوری که $C_n \subset H$ برای هر $n \in \mathbb{N}$.

فرض کنید D مجموعه‌ی فشرده شامل یک همسایگی از e باشد. قرارمی‌دهیم

$$D_\circ = D, \qquad D_{n+1} = D_n^{-1} D_n \cup C_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

چون G گروه توپولوژیک است لذا $D_n^{-1} D_n$ فشرده و در نتیجه D_{n+1} فشرده‌است. حال قرار دهید $H = \cup_{n=\circ}^{\infty} D_n$. بوضوح H یک زیر مجموعه‌ی σ-فشرده و درون ناتهی و شامل هر C_n است. بنابراین کافی است نشان دهیم $H^{-1} H \subset H$.

توجه کنید $e \in D$ و بوضوح اگر $e \in D_n$ آن‌گاه $e \in D_n^{-1}$. فرض کنید $x \in D_n$، آن‌گاه

$$x \in (D_n^{-1})x \subset D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1}.$$

بنا به استقراء ریاضی $D_n \subset D_{n+1}$ برای هر n. اکنون فرض کنید $x, y \in H$، در این صورت عدد مثبتی مانند n موجود است که $x, y \in D_n$. در نتیجه

$$x^{-1} y \in D_n^{-1} D_n \subset D_{n+1} \subset H.$$

یعنی $H^{-1} H \subset H$. به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

گزاره **۲۹.۱** فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت هر مجموعه بورل ضعیف، σ-کراندار است. همچنین هر مجموعه‌ی باز σ-کراندار یک مجموعه بورل ضعیف است.

اثبات. هر مجموعه فشرده، کراندار است و بنابراین σ-کراندار است. از آنجا که اجتماع شمارا و تفاضل مجموعه‌های σ-کراندار، σ-کراندار است، لذا خانواده‌ی همه مجموعه‌های σ-کراندار، σ-حلقه است. چون این σ-حلقه شامل $\mathcal{C}$ یعنی خانواده‌ی همه مجموعه‌های فشرده‌ی X است. بنابراین شامل هر مجموعه از σ-حلقه تولید شده توسط $\mathcal{C}$ است.

به عکس فرض کنید U مجموعه باز و σ-کراندار باشد و (C_n) دنباله‌ای ازمجموعه‌های فشرده باشد به طوری که

$$U \subset \cup_{n=1}^{\infty} C_n = K.$$

چون برای هر n، $C_n \setminus U$ فشرده است، لذا $D = \cup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus U) \in B_\omega(X)$. با توجه به اینکه $D = K \setminus U$، بنابراین $U = K \setminus (K \setminus U) \in B_\omega(X)$. ■

لم ۳۰.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. اگر $\mathcal{B}$ زیرپایه‌ای برای فضای X باشد و $\mathbf{R}$، $\sigma-$حلقه‌ای شامل $\mathcal{B}$. آن‌گاه $B_\circ(X) \subseteq \mathbf{R}$.

اثبات. به صفحه‌ی ۲۲۱ از [۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۳۱.۱ (قضیه ساندویچ بئر). فرض کنید C مجموعه‌ی فشرده و U مجموعه‌ی باز از فضای توپولوژیک X باشند به طوری که $C \subset U$. در این صورت مجموعه‌های بئر D و V وجود دارند به طوری که

(الف) $C \subset V \subset D \subset U$.

(ب) V مجموعه‌ای باز و برابر اجتماعی از دنباله‌های G_δ فشرده است.

(ج) D مجموعه‌ی G_δ فشرده است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۷۶ از [۴] مراجعه کنید. ■

تعریف ۳۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه و (E_n) دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد.

(الف) فرض کنید E^* مجموعه نقاطی از X باشد که به تعداد بی‌پایانی از E_nها تعلق دارند. E^* را حد زبرینه دنباله‌ی (E_n) می‌نامند و می‌نویسند

$$E^* = \limsup_n E_n.$$

(ب) فرض کنید E_* مجموعه نقاطی از X باشد که به جز یک تعداد باپایان به همه‌ی E_nها تعلق دارند. E_* را حد زیرینه دنباله‌ی مذکور می‌نامند و می‌نویسند

$$E^* = \liminf_n E_n.$$

(ج) هرگاه $E^* = E_*$ باشد، این مقدار مشترک را با $\lim_n E_n$ نمایش می‌دهند و آن را حد دنباله‌ی مذکور می‌نامند.

تعریف ۳۳.۱ گوییم تابع ـ مجموعه‌ای $\mu : \sum \to [\circ, \infty]$ روی خانواده‌ی $\mathbf{E}$ یکنوا است هرگاه برای هر $E, F \in \mathbf{E}$ که $E \subset F$ و $F \setminus E \in \mathbf{E}$ داشته باشیم $\mu(E) \leq \mu(F)$.

تعریف ۳۴.۱ فرض کنید $\sum$ خانواده‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های X باشد، تابع $\mu : \sum \to [0, \infty]$ را

(۱) $\sigma-$جمعی می‌نامند، هرگاه برای هر دنباله‌ی شمارای (E_n) از مجموعه‌های دو به دو مجزا در $\sum$ که $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \sum$ داشته باشیم

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

چنانچه رابطه‌ی مذکور برای تعداد متناهی (E_n) از مجموعه‌های دو به دو مجزا برقرار باشد، μ را متناهی جمعپذیر یا جمعی می‌نامند.

(۲) $\sigma-$زیرجمعی می‌نامند، هرگاه برای هر دنباله‌ی شمارای (E_n) در $\sum$ که $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \sum$ داشته باشیم

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

چنانچه برای هر $F, E \in \sum$ که $E \cup F \in \sum$ داشته باشیم $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$، μ را زیرجمعی می‌نامند.

گزاره ۳۵.۱ فرض کنید $\sum$ یک $\sigma-$ جبر روی مجموعه‌ی X و μ یک تابع $\sigma-$جمعی باشد. در این صورت

(۱) اگر $E \subseteq F$، آن‌گاه $\mu(E) \leq \mu(F)$. در این حالت گوییم μ یکنواست.

(۲) برای هر دنباله‌ی (E_n) از اعضاء $\sum$، $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$؛ یعنی μ، $\sigma-$ زیرجمعی است.

(۳) اگر $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ دنباله‌ای در $\sum$ و $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ (در این حالت می‌نویسیم $E_n \uparrow E$) آن‌گاه $\mu(E_n) \uparrow \mu(E)$.

(۴) $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ دنباله‌ای در $\sum$ و $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$ (در این حالت می‌نویسیم $E_n \downarrow E$) آن‌گاه $\mu(E_n) \downarrow \mu(E)$. مشروط به اینکه برای هر n، $\mu(E_n) < \infty$.

اثبات. به گزاره ۱.۲ از [۲۵] رجوع کنید. ■

تعریف ۳۶.۱ (الف) فرض کنید $\sum$ حلقه‌ای روی مجموعه‌ی X باشد، تابع $\sigma-$جمعی $\mu : \sum \to [0, \infty]$ که $\mu(\emptyset) = 0$ را یک اندازه روی حلقه‌ی $\sum$ نامند. در این صورت $(X, \sum, \mu)$ را فضای اندازه خوانند. بوضوح اگر μ اندازه‌ای روی حلقه‌ی $\mathbf{R}$ باشد، آن‌گاه μ یکنوا است.