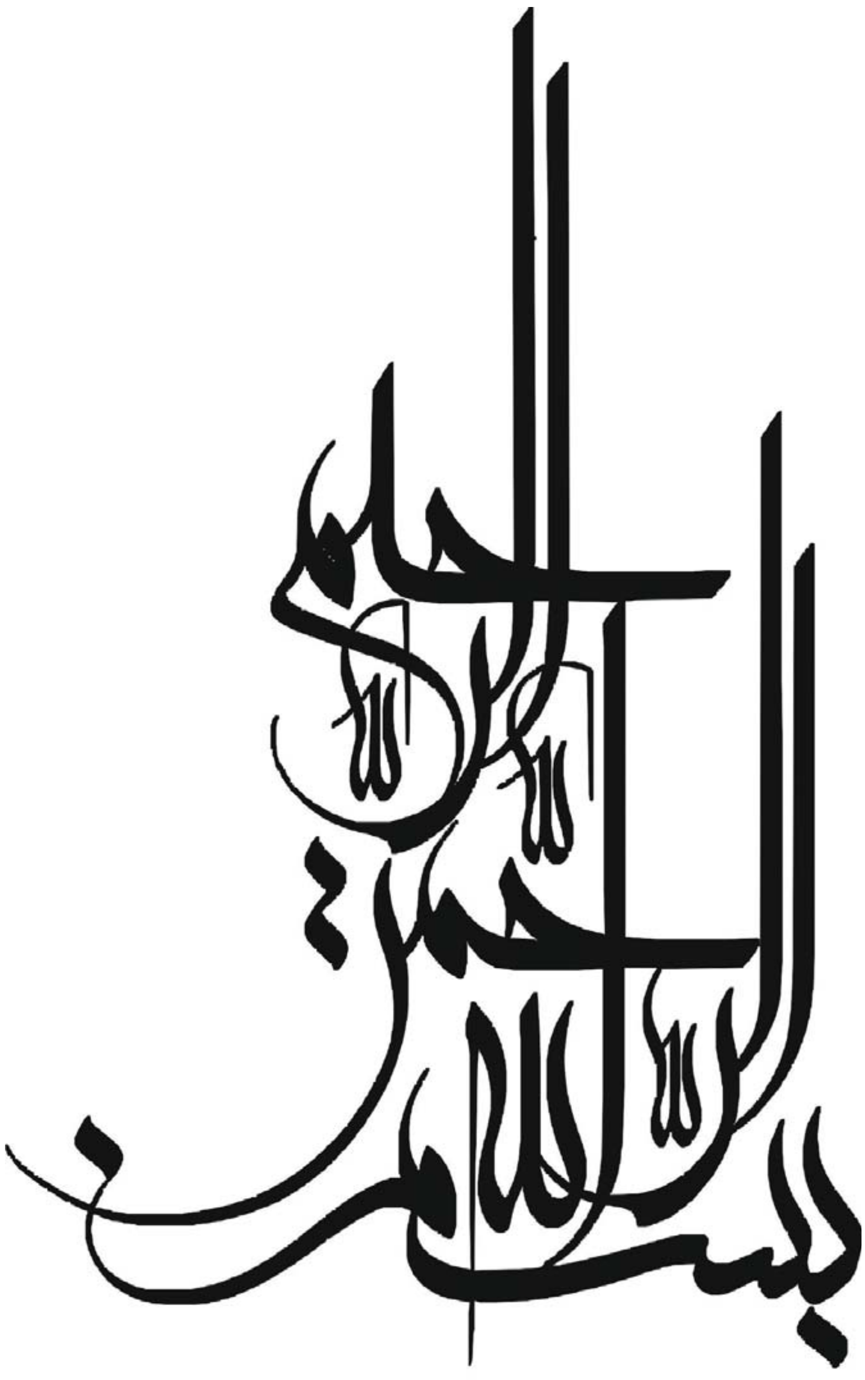
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه دکتری در

ریاضی محض، (گرایش جبر)

عنوان:

بررسی گراف وابسته به حلقه‌ها و ایده‌ال‌ها

استاد راهنما:

دکتر رضا جهانی نژاد

توسط:

محمد رضا احمدی

بهمن ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادرم

که راهنمای زندگیم هستند

و

همسر و دخترم

که همواره یار و همراهم در تمام سختی‌ها و خوشی‌ها بوده‌اند

سپاس

سپاس در همه حال خدا را سزاوار است که هر چه در عالم رخ می‌دهد با اراده اوست. بر خود واجب و لازم می‌دانم حال که دوره دکتری را به پایان رسانده‌ام، از تمام کسانی که برایم زحمت کشیده‌اند تشکر و قدردانی کنم. از پدر و مادر و همسرم شرمنده‌ام که جز رنج و محنت در این چند سال چیز دیگری برایشان به ارمغان نیاوردم. از استاد بزرگوارم جناب آقای **دکتر رضا جهانی نژاد** کمال تشکر را دارم و همواره راهنمایی‌ها و پندهای عالمانه ایشان را چراغ راهم قرار خواهم داد. سپاسگزاری می‌کنم از اساتید بزرگوار دانشگاه کاشان، جناب آقای **پروفسور علیرضا اشرفی** و **دکتر بهنام بازیگران** که به عنوان داور داخل زحمت داوری را متقبل شدند. همچنین از داوران خارج از دانشگاه **دکتر رحیم زارع نهندی** و **دکتر فرهاد رحمتی** سپاسگزارم. از نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه آقای **دکتر حسین رسا** تشکر می‌کنم که قبول زحمت نمودند.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. گراف ایده‌الی وابسته به ضرب ایده‌ال‌ها که آن را با $\overrightarrow{I\Gamma}(R)$ نمایش می‌دهیم، گرافی جهت‌دار است که مجموعه رئوس آن مجموعه ایده‌ال‌های سره و غیرصفر R می‌باشد. رأس I مجاور با رأس J است اگر ایده‌ال L در R وجود داشته باشد که $J = IL$. در این رساله به معرفی و بررسی خصوصیات گراف ایده‌الی، گراف زمینه و زیرگراف فراگیر هاسه می‌پردازیم. همچنین گراف هاسه حلقه $\mathbb{Z}_n$ به طور کامل بررسی شده و الگوریتم‌هایی برای محاسبه شاخص‌های گراف ارائه شده است.

کلمات کلیدی:

۱. گراف ایده‌الی ۲. گراف هاسه ۳. گراف کیلی ۴. گراف مقسوم علیه صفر ۵. شاخص توپولوژیک

فهرست مطالب

مقدمه

برای اولین بار در سال ۱۹۷۸، استفان بک[1] گرافی وابسته به حلقه‌ها ارائه کرد. بعد از آن مطالعات زیادی در مورد گراف‌های وابسته به حلقه‌ها انجام شد که حاصل آن تعریف چندین گراف از جمله گراف مقسوم علیه صفر، گراف تام، گراف جابجایی و گراف متباین می‌باشد. در این رساله دو گراف جدید وابسته به عمل جمع و ضرب ایده‌ال‌های یک حلقه تعریف می‌کنیم که آن را گراف ایده‌الی می‌نامیم. در این رساله فرض می‌کنیم تمام حلقه‌ها جابجایی هستند.

فرض کنید R یک حلقه باشد. گراف ایده‌الی وابسته به ضرب ایده‌ال‌های R که با نماد $\overrightarrow{I\Gamma}(R)$ نمایش می‌دهیم، گرافی جهت‌دار است که مجموعه رئوس آن، مجموعه ایده‌ال‌های سره و غیرصفر R می‌باشد که در آن رأس I مجاور با رأس J است، اگر ایده‌ال L در R وجود داشته باشد که $J = IL$. گراف ایده‌الی وابسته به جمع ایده‌ال‌ها نیز گرافی جهت‌دار است که با نماد $\overrightarrow{I\Gamma}_+(R)$ نشان می‌دهیم. مجموعه رئوس $\overrightarrow{I\Gamma}_+(R)$ تمام ایده‌ال‌های سره و غیرصفر R است و رأس I مجاور با رأس J است اگر عنصر $a \in R$ وجود داشته باشد که $J = I + (a)$. در فصل دوم خصوصیات گراف‌های ایده‌الی را بررسی می‌کنیم. چون هر مجاورت در گراف ایده‌الی، رابطه شمول القا می‌کند، لذا مفهوم ارتفاع گرافی روی حلقه‌ها تعریف می‌شود. در انتهای این فصل همبندی و عدد کلیک گراف ایده‌الی محاسبه می‌شود.

در فصل سوم گراف هاسه حلقه R را مطالعه می‌کنیم. گراف هاسه یک زیرگراف فراگیر گراف ایده‌الی است که با نماد $\overrightarrow{HI\Gamma}(R)$ نشان داده می‌شود. یکی از مباحث مهم در نظریه گراف، که اخیراً مورد توجه محققان قرار گرفته، موضوع شاخص‌های توپولوژیکی گراف‌هاست. در بخش دوم این فصل

[1] Istvan Beck

بعد از آشنایی با گراف هاسه، شاخص‌های وینر، پی‌آی و سگد این گراف محاسبه خواهد شد.

فصل چهارم از دو بخش مستقل تشکیل شده است. در بخش اول، گراف مقسوم علیه صفر تعریف شده و انرژی و شاخص وینر گراف مقسوم علیه صفر حلقه $\mathbb{Z}_n$ محاسبه خواهد شد. در بخش دوم برنامه‌هایی ارائه خواهد شد که به زبان Matlab نوشته شده است. این برنامه‌های کامپیوتری شاخص‌های معرفی شده در فصل سوم را برای هر گراف دلخواه معرفی می‌کنند. در بخش آخر این فصل الگوریتم‌هایی پیاده سازی شده‌اند که با استفاده از دو عمل جمع و ضرب حلقه R، گراف‌های ایده‌الی را بدست می‌آورند.

از نتایج به دست آمده در این رساله، تاکنون مقالات [۲، ۳] استخراج شده است.

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

در این فصل که سرآغاز رساله است مطالب به دو بخش تقسیم شده است. در بخش اول مفاهیم و تعاریفی را ارائه می‌دهیم که در فصل‌های دیگر از آن استفاده خواهد شد. این مطالب شامل تعاریف و قضایایی در زمینه گراف و حلقه‌هاست. در بخش دوم مطالبی در رابطه با گراف‌های وابسته به حلقه‌ها ارائه می‌دهیم و چند نمونه از این گراف‌ها را توضیح خواهیم داد.

۱.۱ تعاریف و پیشنیازها

در این بخش به معرفی تعاریف و نمادهایی می‌پردازیم که در این رساله استفاده شده است. ابتدا مفاهیم وابسته به گراف آورده می‌شود و سپس آنچه در مورد حلقه‌ها نیاز است بیان خواهد شد.

فرض کنید $\overrightarrow{G}$ یک گراف جهت‌دار باشد. گراف زمینه $\overrightarrow{G}$ که با G نمایش داده خواهد شد، گرافی است که در آن $V(G) = V(\overrightarrow{G})$ و دو رأس u و v در G مجاورند اگر و تنها اگر در $\overrightarrow{G}$ یا u مجاور با v باشد یا v مجاور با u. فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه n باشد، اگر هر جفت از رئوس متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند، آنگاه گراف را کامل نامیده و با نماد K_n نمایش می‌دهیم.
گراف جهت‌دار $\overrightarrow{G}$ را تورنمنت می‌نامیم هرگاه گراف زمینه آن یک گراف کامل باشد. برای هر رأس u از گراف جهتدار $\overrightarrow{G}$ درجه ورودی u که با نماد $deg_+(u)$ نشان می‌دهیم تعداد رئوسی است که مجاور با u است و درجه خروجی u که با $deg_-(u)$ نمایش داده می‌شود تعداد رئوسی است که u با آنها مجاور

است. در گراف ساده G درجه رأس u برابر است با تعداد رئوس مجاور با u که آن را با نماد $deg(u)$ نشان می‌دهیم. کمترین و بیشترین درجه رئوس در گراف G، به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش داده می‌شود.

گراف H را یک زیرگراف از گراف G می‌نامند، هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و اگر دو رأس در H مجاور باشند، آنگاه در G نیز مجاور باشند. H زیرگراف فراگیر G است هرگاه $V(G) = V(H)$. اکنون فرض کنید که $V_1 \subseteq V(G)$. زیرگرافی از G با مجموعه رئوس V_1 را در نظر می‌گیریم که مجموعه یال‌های آن شامل همه یال‌هایی است که دو سر آن در V_1 است. این زیرگراف را زیرگراف القایی توسط V_1 می‌نامیم و به‌صورت $G[V_1]$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید G یک گراف متناهی باشد. زیرمجموعه X از رئوس $V(G)$ را مستقل می‌نامیم هرگاه زیرگراف القایی توسط X پوچ باشد. بزرگترین اندازه یک مجموعه مستقل را عدد استقلال گراف نامیده، با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

دو زیرگراف H_1 و H_2 از گراف G را رأس-مجزا یا به‌طور خلاصه مجزا گوییم هرگاه $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$. یک گشت در گراف G دنباله‌ای متناهی از رئوس و یال‌ها مانند $W = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ است به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $e_i = v_{i-1} v_i$. برای راحتی گشت $W = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ را به صورت ساده $W = v_0 v_1 \dots v_n$ می‌نویسیم. یک گشت از u به v را یک (u,v)-گشت می‌نامیم و طول آن را تعداد یال‌های پیموده شده در آن تعریف می‌کنیم. یک گذر گشتی است که یال‌های آن مجزا باشد و یک مسیر گشتی است که رأس‌ها و یال‌های آن مجزا هستند. گذر بسته را مدار و مسیر بسته را دور می‌نامیم. یک مسیر و یک دور به طول n را به ترتیب با P_n و C_n نشان می‌دهیم.

دو رأس u و v همبند هستند اگر یک (u,v)-مسیر در G موجود باشد. همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رئوس است. لذا، افرازی از مجموعه رئوس به صورت $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_\omega$ موجود است به طوری که، دو رأس همبند هستند اگر و فقط اگر در یک کلاس از افراز قرار داشته باشند. در این صورت زیرگراف‌های $G[V_i]$ مولفه‌های همبندی G نامیده می‌شود و گراف G را همبند گوییم، اگر یک مولفه همبندی داشته باشد. یک رأس یا یک یال را در گراف برشی گوییم اگر با حذف آن تعداد

مولفه‌های همبندی گراف افزایش یابد. فرض کنید G یک گراف باشد. هر زیرگراف کامل از G را یک کلیک می‌نامیم. عدد کلیک گراف G که با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود بزرگترین عدد صحیح $r \geq ۱$ است به طوری که $K_r \subseteq G$.

در یک گراف همبند، تعداد یال‌هایی که در کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v وجود دارند را فاصله بین دو رأس u و v نامیده و با $d_G(u,v)$ و یا به طور ساده $d(u,v)$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید d یک تابع متر روی $V(G)$ تعریف می‌کند.

گراف همبند G با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $e = uv$ یال دلخواهی از $E(G)$ باشد. دو زیرمجموعه از رئوس را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_u(e) = \{x \in V(G) : d(u,x) < d(v,x)\}$$

$$N_v(e) = \{x \in V(G) : d(v,x) < d(u,x)\}.$$

به عبارت دیگر $N_u(e)$ مجموعه‌ای از رئوس است که به u نزدیک‌تر هستند تا به v. مشابهاً $N_v(e)$ قابل بیان است. در بالا $n_u(e)$ و $n_v(e)$ را به ترتیب برابر با تعداد عناصر مجموعه‌های $N_u(e)$ و $N_v(e)$ در نظر می‌گیریم. به همین ترتیب، $M_u(e)$ را مجموعه یال‌های نزدیک‌تر به u نسبت به v و $m_u(e)$ را اندازه این مجموعه تعریف می‌کنیم. در این جا، فاصله یال $e = uv$ از $x \in V(G)$، به صورت $d(x,e) = \min\{d(x,u), d(x,v)\}$ تعریف می‌شود. مشابهاً $M_v(e)$ و $m_v(e)$ تعریف می‌شود.

برای گراف همبند و متناهی G، خروج از مرکز رأس v که به صورت $ecc_G(v)$ نشان می‌دهیم، فاصله این رأس تا دورترین رأس گراف از آن تعریف می‌شود، به بیان دیگر

$$ecc_G(v) = \max\{d(v,u) : u \in V(G)\}$$

و به هر رأسی که $ecc_G(v)$ را به دست می‌دهد، رأس خروج از مرکز v می‌گویند. شعاع گراف همبند G که با $rad(G)$ نموده می‌شود به صورت

$$rad(G) = \min\{ecc_G(v) : v \in V(G)\}$$

و قطر گراف را که با $diam(G)$ نشان می‌دهیم، به صورت

$$diam(G) = \max\{ecc_G(v) : v \in V(G)\}$$

تعریف می‌شود. قطر را هم می‌توان به صورت بیشترین فاصله ممکن بین همه جفت رئوس گراف در نظر گرفت. فرض کنید G یک گراف باشد، طول بلندترین دور در G را محیط می‌نامیم و با $c(G)$ نشان می‌دهیم.

یک k–رنگ آمیزی رأسی گراف تابعی مانند $C : V(G) \longrightarrow S$ است که $|S| = k$ و هرگاه $uv \in E(G)$ آن‌گاه $f(u) \neq f(v)$. یک گراف را k–رنگ‌پذیر گویند هرگاه دارای یک k–رنگ آمیزی باشد. کوچکترین عدد k را عدد رنگی گراف G نامیده با $\chi(G)$ نمایش می‌دهیم.

$\overline{G}$ را مکمل گراف G گوییم، هرگاه $V(\overline{G}) = V(G)$ و دو رأس در $\overline{G}$ مجاورند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.

چندجمله‌ای مشخصه یک ماتریس مربعی مانند A به صورت

$$\chi(A; x) = \det(xI - A)$$

تعریف می‌شود. صفرهای چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را مقادیر ویژه A می‌نامند. مجموعه همه مقادیر ویژه را طیف A می‌نامیم. فرض کنید G یک گراف است و $V(G) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ و $E(G) = \{e_۱, e_۲, \ldots, e_m\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های آن باشند. در این صورت ماتریس وقوع G، برابر با ماتریسی $n \times m$ مثل $M(G) = [m_{ij}]$ است که m_{ij} برابر ۱ است اگر رأس v_i واقع بر یال e_j باشد و در غیر این صورت برابر با ۰ است. اکنون ماتریس صفر و یکی تعریف می‌کنیم که متناظر با رئوس مجاور گراف است. ماتریس مجاورت گراف G، ماتریس مربعی از مرتبه n است که با $A(G) = [a_{i,j}]$ نمایش می‌دهیم. درایه سطر i–ام و ستون j–ام این ماتریس یک است هرگاه v_iv_j یالی از گراف باشد و در غیر این صورت صفر خواهد بود. ماتریسی که درایه‌های آن فاصله بین دو رأس از گراف می‌باشد را ماتریس فاصله گویند و با $D(G) = [d(v_i, v_j)]$ نشان می‌دهیم. در گراف ساده G هر دو ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله، ماتریس‌های متقارن هستند.

مقادیر ویژه گراف G را ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه $A(G)$ تعریف می‌کنیم و به صورت

$$\chi(G;x) = \det(xI - A(G)) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$$

می‌نویسیم.

یک گراف را گراف دوبخشی می‌نامند، هرگاه مجموعه رئوس آن را بتوان به دو زیر مجموعه V_1 و V_2 چنان افراز نمود به گونه‌ای که بین هر دو رأس در هر افراز یالی موجود نباشد. زوج (V_1, V_2) را یک دوبخشی‌سازی گراف می‌نامند. به عبارت دیگر $V(G) = V_1 \cup V_2$ به طوری که V_1 و V_2 مستقل هستند. مجموعه‌های V_1 و V_2 یک دو رنگ‌پذیری از G به دست می‌دهد. به عکس اگر G دو رنگ‌پذیر باشد، آن‌گاه با انتخاب مجموعه‌های V_1 و V_2 متناظر با رئوس با یک رنگ داده شده، یک دوبخشی سازی برای G به دست می‌آید. با استفاده از تعریف نتایج ساده زیر در رابطه با ساختار گراف‌های دوبخشی برقرار است. یکی از مشخص سازی‌های گراف دوبخشی که استفاده وسیعی دارد و توسط کونیگ[1] در ۱۹۱۶ به دست آمد، رابطه‌ای خاص میان گراف‌های دوبخشی و دورها را بیان می‌کند. وی ثابت کرد گراف غیر بدیهی G دوبخشی است اگر و فقط اگر G دور فرد نداشته باشد. گراف دو بخشی را با دوبخشی سازی V_1 و V_2 در نظر بگیرید، که $|V_1| = n_1$ و $|V_2| = n_2$. اگر هر رأس از V_1 با همه رئوس V_2 و هر رأس از V_2 با همه رئوس V_1 مجاور باشد، آن‌گاه گراف را دوبخشی کامل می‌نامند و با K_{n_1,n_2} نشان می‌دهیم.

چندین رده ویژه از گراف‌های دوبخشی مهم و پرکاربرد هستند. اولین و مهم‌ترین آن‌ها درخت‌ها هستند. یک درخت گراف همبندی است که شامل دوری نباشد. گرافی که هر مولفه آن درخت باشد را جنگل می‌نامند. بدیهی است که درخت‌ها و به تبع آن جنگل‌ها دوبخشی‌اند.

اگر بتوان گراف را به گونه‌ای رسم کرد که یال‌ها فقط در رئوس یکدیگر را قطع کنند، انگاه گراف را مسطح می‌نامیم. فرض کنید G یک گراف باشد. اگر بتوان مسیر بسته‌ای در G پیدا کرد که از تمام رئوس دقیقاً یک بار گذشته باشد، G را هامیلتونی می‌نامیم.

---

[1] Denes Koing

تعریف ۱.۱. گراف G را اویلری می نامیم هرگاه شامل مداری باشد که از تمام یالها بگذرد

قضیه زیر که در مرجع [۱۱] آورده شده شرط لازم و کافی برای اویلری بودن گراف G را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۱. گراف G اویلری است اگر و تنها اگر درجه هر رأس زوج باشد.

۲.۱ گراف‌های وابسته به حلقه

یکی از مباحثی که اخیراً در زمینه نظریه حلقه‌ها مورد توجه قرار گرفته و برخی از محققان علاقه خاصی نسبت به آن نشان داده‌اند، موضوع گراف‌هایی است که روی حلقه‌ها تعریف شده است. در این رساله، تمام حلقه‌ها جابجایی و یکدار هستند و منظور از زنجیر، مجموعه‌ای از ایده‌ال‌هاست که با رابطه شمول یک زنجیر تشکیل می‌دهند. اولین بار در سال ۱۹۸۸ بک در مقاله‌ای به عنوان رنگ آمیزی حلقه‌های جابجایی گراف مقسوم علیه صفر را تعریف کرد[۱۰]. در این مقاله بک فرض کرد تمام عناصر حلقه R رئوس گراف هستند و دو رأس آن مجاورند اگر حاصلضرب آنها در حلقه R صفر شود. چند سال بعد در سال ۱۹۹۹ اندرسون[۲] و لیوینگستون[۳] مقاله‌ای با نام گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه جابجایی به چاپ رساندند که در آن مقاله فرض کردند عناصر مقسوم علیه صفر غیرصفر حلقه، رئوس گراف هستند. همچنین گراف‌های دیگری روی حلقه‌ها تعریف شد. گراف متباین در سال ۱۹۹۵ توسط شرما[۴]، گراف جابجایی توسط اکبری[۵] در سال ۲۰۰۴ و گراف تام در سال ۲۰۰۸ توسط اندرسون ارائه شد. در این رساله یک گراف جدید روی حلقه‌ها تعریف کرده‌ایم که تعمیمی از گراف کیلی است. قبل از بررسی این گراف، ابتدا خلاصه‌ای از مطالعات انجام شده درباره گراف‌های وابسته به حلقه‌ها را ارائه می‌دهیم.

اندرسون در مرجع [۷] برای تعریف گراف مقسوم علیه صفر فرض کرد R یک حلقه جابجایی و $Z(R)$ مجموعه تمام عناصر مقسوم علیه صفر R باشد. در این صورت گراف ساده مقسوم علیه صفر

[۲] D.F. Anderson
[۳] P.S. Livingston
[۴] P. K. Sharma
[۵] S. Akbari

که آن را با نماد $\Gamma(R)$ نشان داد، گرافی است که رئوس آن عناصر مقسوم علیه صفر غیرصفر R بوده و دو رأس متفاوت x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. اندرسون توانست در سال ۱۹۹۹ تمام گراف‌های مقسوم علیه صفر را که از مرتبه کمتر از ۵ هستند، تعیین کند که نتیجه آن را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

R	$\Gamma(R)$
$Z_۴\ ,\ Z_۲[x]/(x^۲)$	$K_۱$
$Z_۹\ ,\ Z_۲ \times Z_۲\ ,\ Z_۳[x]/(x^۲)$	$K_۲$
$Z_۶\ ,\ Z_۸\ ,\ Z_۲[x]/(x^۳)\ ,\ Z_۴[x]/(x^۲-۲,۲x)$	$P_۳$
$F_۴[x]/(x^۲)\ ,\ Z_۴[x]/(x^۲+x+۱)\ ,\ Z_۴[x]/(۲,x)^۲\ ,\ Z_۲[x,y]/(x,y)^۲$	$K_۳$
$Z_۲ \times F_۴$	$K_{۱,۳}$
$Z_۳ \times Z_۳$	$C_۴$
$Z_{۲۵}\ ,\ Z_۵[x]/(x^۲)$	$K_۴$

در ادامه برخی از نتایجی که اندرسون برای گراف مقسوم علیه صفر بدست آورده است را ارائه می دهیم. اثبات این قضایا را می توانید در مرجع [۷] ببینید.

در مقاله [۷] نشان داده شده است که به ازای هر عدد صحیح و مثبت r حلقه R وجود دارد به طوری که $\Gamma(R) = K_r$ اگر و تنها اگر به ازای یک عدد اول p و عدد طبیعی n، داشته باشیم $r = p^n - ۱$.

به علاوه اندرسون ثابت کرد اگر R یک حلقه جابجایی باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرار است:

الف) $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و تنها اگر R متناهی بوده یا R دامنه صحیح باشد. در حقیقت اگر $۱ \le |\Gamma(R)| < \infty$، آنگاه R متناهی است و $|R| \le |Z(R)|^۲$.

ب) $\Gamma(R)$ همبند است و $diam(\Gamma(R)) \le ۳$.

ج) اگر $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آنگاه $gr(\Gamma(R)) \le ۴$.

و اگر R یک حلقه جابجایی باشد که دامنه صحیح نیست، آنگاه تنها یکی از گزاره‌های زیر برقرار است:

الف) $\Gamma(R)$ یک دور از مرتبه ۳ یا ۴ دارد.

ب) $\Gamma(R)$ یک گراف ستاره است.

ج) $R \cong Z_4 \times Z_2$ یا $R \cong Z_2 \times Z_2[x]/(x^2)$

اندرسون همچنین ثابت کرد برای دو حلقه جابجایی کاهشی متناهی A و B که میدان نیستند، $A \cong B$ اگر و تنها اگر $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$.

پس از بررسی خواص پایه گراف مقسوم علیه صفر مطالبی در مورد عدد کلیک گراف مقسوم علیه صفر ارائه می‌دهیم. اگر گراف $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، واضح است که $\omega(\Gamma(R)), gr(\Gamma(R)) \leq c(\Gamma(R))$. همانطور که در جدول ابتدای فصل دیده می‌شود ممکن است در گراف $\Gamma(R)$ داشته باشیم $gr(\Gamma(R)) = 4 > \omega(\Gamma(R)) = 2$. اما اگر $gr(\Gamma(R)) = 3$، لزوماً $\omega(\Gamma(R)) \geq 3 = gr(\Gamma(R))$. همچنین برای زیرحلقه A از حلقه جابجایی B همواره $\omega(\Gamma(A)) \leq \omega(\Gamma(B))$ و $c(\Gamma(A)) \leq c(\Gamma(B))$.

از آنجا که $\chi(K_n) = n$، لذا $\omega(\Gamma) \leq \chi(\Gamma)$. بک در مرجع [10] نشان داد که برای گراف $\Gamma(R)$، عدد رنگی برابر ۲، ۳ یا ۴ است اگر و تنها اگر $\omega(\Gamma(R)) = \chi(\Gamma(R))$ و حدس زد برای حلقه‌های متناهی این رابطه درست است. اما در سال ۱۹۹۳ اندرسون یک حلقه متناهی ارائه کرد که عدد کلیک آن ۵ و عدد رنگی آن ۶ است و بدین ترتیب حدس بک رد شد.

همانطور که در ابتدای این بخش اشاره شد، گراف تام یکی دیگر از گراف‌هایی است که وابسته به حلقه تعریف شده است. در سال ۲۰۰۸اندرسون در مقاله‌ای با نام گراف تام حلقه جابجایی [6] برای تعریف گراف تام فرض کرد تمام عناصر حلقه R رئوس گراف باشند و دو رأس x و y از R مجاورند اگر $x + y$ یک مقسوم علیه صفر حلقه R باشد. وی گراف تام را با نماد $T(\Gamma(R))$ نمایش داد. مطالعات اندرسون روی گراف تام بر ایده‌ال بودن مجموعه عناصر مقسوم علیه صفر حلقه R استوار است. وی نشان داد که اگر $Z(R)$ ایده‌ال R و $Reg(\Gamma(R))$ زیرگراف القایی توسط رئوس $Reg(R)$ از گراف $T(\Gamma(R))$ باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند:

الف) $diam(Reg(\Gamma(R))) = 0$ اگر و تنها اگر $R \cong Z_2$ و در نتیجه $Reg(\Gamma(R)) = K_1$.

ب) $diam(Reg(\Gamma(R))) = 1$ اگر و تنها اگر $R \ncong Z_2$ و $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_2$ یا $R \cong Z_3$ و در نتیجه

$Reg(\Gamma(R)) = K_\alpha$ برای $\alpha \geq ۲$.

ج) $diam(Reg(\Gamma(R))) = ۲$ اگر و تنها اگر $\frac{R}{Z(R)} \cong Z_۳$ و $R \ncong Z_۳$.

د) $gr(Reg(\Gamma(R))) = ۳$ اگر و تنها اگر $۲ \in Z(R)$ و $|Z(R)| \geq ۳$.

ه) $gr(Reg(\Gamma(R))) = ۴$ اگر و تنها اگر $۲ \notin Z(R)$ و $|Z(R)| \geq ۲$.

و) در سایر موارد $gr(Reg(\Gamma(R))) = \infty$.

ز) $gr(T(\Gamma(R))) = ۳$ اگر و تنها اگر $|Z(R)| \geq ۳$.

ح) $gr(T(\Gamma(R))) = ۴$ اگر و تنها اگر $۲ \notin Z(R)$ و $|Z(R)| = ۲$.

ط) در سایر موارد $gr(T(\Gamma(R))) = \infty$.

بعد از تعریف گراف تام محققان دیگری از جمله اکبری مطالعاتی روی این گراف انجام دادند. در [۵] شرایطی جهت هامیلتونی بودن گراف تام ارائه شده است.

گراف جابجایی یکی دیگر از گراف‌هایی است که روی حلقه‌ها تعریف شده است. این گراف که روی حلقه‌های غیرجابجایی تعریف می‌شود، توسط اکبری در مرجع [۴] به صورت زیر معرفی شده است.

اگر R یک حلقه غیرجابجایی باشد رئوس گراف جابجایی که با نماد $\Gamma_c(R)$ نشان داده می‌شود، عناصر $R \setminus C(R)$ هستند که $C(R)$ مرکز R می‌باشد و دو رأس متمایز x و y با یکدیگر مجاورند هرگاه $xy = yx$. اکبری ثابت کرد:

الف) برای هر حلقه غیرجابجایی R و $x, y \in V(\Gamma_c(R))$، مسیری به طول حداکثر ۲ بین x و y در $\Gamma_c(R)$ وجود دارد.

ب) فرض کنید R و S دو حلقه نیمه ساده متناهی باشد به طوری که $\Gamma_c(R) \cong \Gamma_c(S)$. در این صورت حلقه‌های نیمه ساده جابجایی $R_۱$ و $S_۱$ و حلقه نیمه ساده T وجود دارد که $R \cong T \times R_۱$، $S \cong T \times S_۱$ و $|R_۱| = |S_۱|$.

ج) اگر R حلقه غیرجابجایی متناهی باشد، آنگاه $\Gamma_c(R)^c$ هامیلتونی است.

اکبری بخشی از مطالعات خود را به حلقه ماتریس‌ها روی میدان F اختصاص داد که نتایج آن را در ادامه ذکر می‌کنیم:

الف) اگر F یک میدان متناهی باشد، آنگاه $\Gamma_c(M_2(F))$ یک گراف است که تعداد مولفه‌های همبندی آن $|F|^2+|F|+1$ و اندازه تمام مؤلفه‌ها $|F|^2-|F|$ بوده و تمام مؤلفه‌ها کامل هستند.

ب) اگر F یک میدان متناهی و $n \geq 2$، آنگاه

$$\Delta(\Gamma_c(M_n(F))) = |F|^{n^2-2n+2}-|F|-1$$
$$\delta(\Gamma_c(M_n(F))) = |F|^n-|F|-1$$

ج) اگر F و E دو میدان متناهی و $m,n \geq 2$ باشند که $\Gamma_c(M_m(E)) = \Gamma_c(M_n(F))$، آنگاه $m=n$ و $F \simeq E$.

د) فرض کنید F یک میدان متناهی و $n \geq 2$ باشد. در این صورت
$\omega(\Gamma_c(M_n(F))) = |F|^{\lfloor n^2/4 \rfloor} - |F|$

ه) فرض کنید F یک میدان متناهی و $n \geq 2$ باشد. در این صورت

۱) اگر $|F| > n$، آنگاه

$$\alpha(\Gamma_c(M_n(F))) \geq (|F|^2+|F|+1)|F|^{(n^2-n-2)/2}$$

۲) اگر $|F| \geq n$، آنگاه

$$\alpha(\Gamma_c(M_n(F))) \geq (|F|^2+|F|+1)|F|^{(|F|-1)(n-|F|/2)-1}$$

فصل ۲

گراف ایده‌الی وابسته به عمل ضرب ایده‌ال‌ها

در این فصل قصد داریم تعمیمی از گراف کیلی روی حلقه‌ها را ارائه دهیم. گراف کیلی، که با نام‌های دیگری از جمله گراف رنگی کیلی، دیاگرام کیلی، دیاگرام گروه و گروه رنگی نیز معرفی شده است، گرافی است که روی ساختار یک گروه تعریف می‌شود. برای اولین بار در سال ۱۸۷۸ آرتور کیلی[۱] روی گروه‌های متناهی یک گراف تعریف کرد که امروزه محققان در مقالات و نوشته‌های خود آن را گراف کیلی می‌نامند[۱۲]. امروزه گراف کیلی یکی از ابزارهای مهم در زمینه نظریه هندسی گروه‌ها و ترکیبیات می‌باشد. بعد از کیلی در سالهای ۱۹۰۹ و ۱۹۱۰ مکس دان[۲] در مطالعات خود روی نظریه گروه‌ها، از این گراف استفاده کرده است [۱۴]. وی این گراف را در مقالات خود دیاگرام گروه نامید. نتایج مطالعات و تحقیقات مکس دان در نظریه هندسی گروه‌ها کاربرد زیادی دارد.

آرتور کیلی در سال ۱۸۷۸ در یکی از مقالات خود گراف کیلی را به صورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۱.۲. فرض کنید G یک گروه و S یک مجموعه مولد برای G باشد. گراف کیلی که با نماد $\Gamma = Cay(G,S)$ نشان داده می‌شود، یک گراف رنگ آمیزی شده جهت‌دار است که

- هر عنصر $g \in G$ یک رأس از Γ است، یعنی $V(\Gamma) = G$،
- به هر عنصر $s \in S$ رنگ c_s نسبت داده می‌شود.

[۱] Arthur Cayley
[۲] Max Dehn