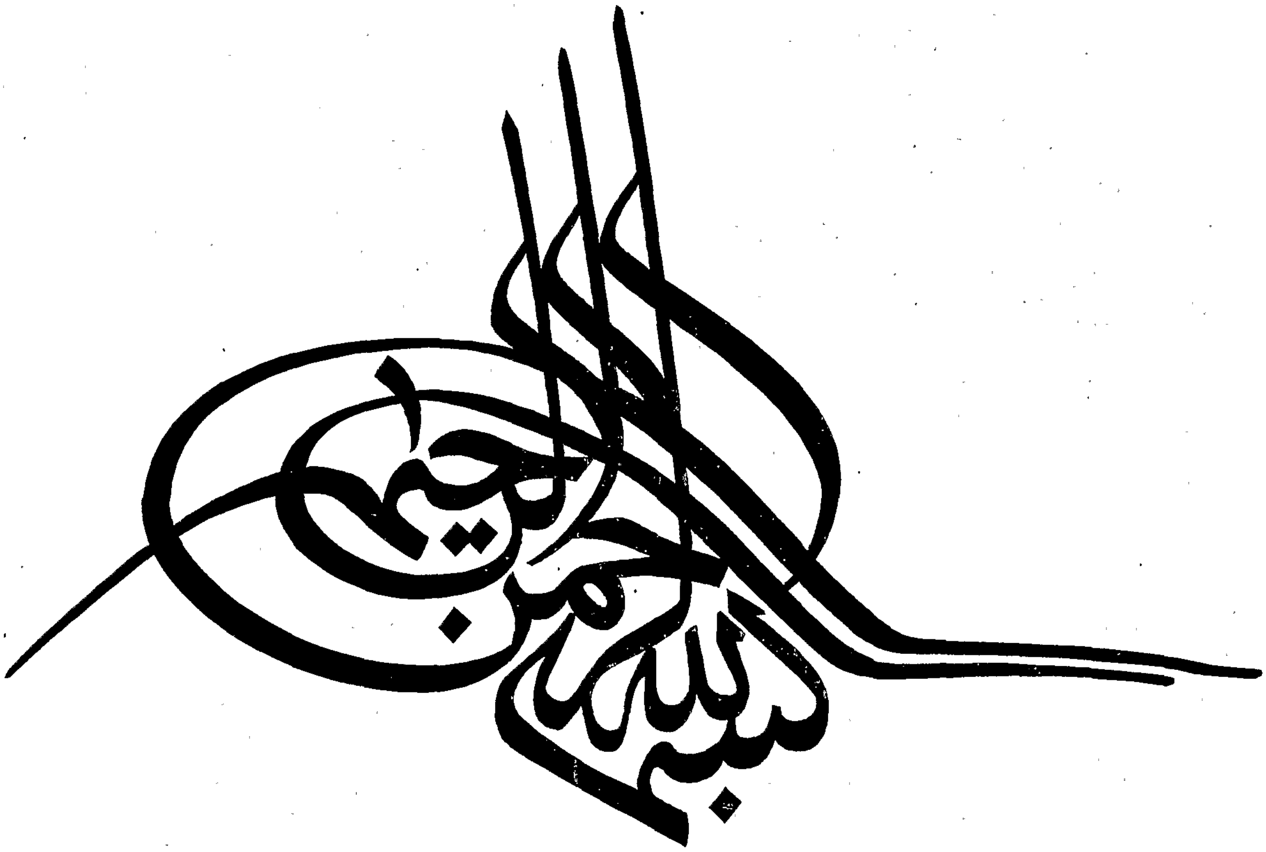
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

تعیین مرتبه زنجیر مارکوف

استاد راهنما:

دکتر عین اله پاشا

تدوین:

مهناز نبیل

بهمن ماه ۱۳۸۶

انگشتان تاریخ در صد برگ امروزش، حیات مرگ می‌جوید؛

بیا امروز همان روز است.

تقدیم به یکتا عدالت‌گستر گیتی

من برای زیستن در آگاهی، التماس دعا دارم.

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

واحد ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه خانم **مهنا زنبیل** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی آمار تحت عنوان:

تعیین مرتبه زنجیر مارکوف

در روز سه شنبه مورخ ۸۶/۱۱/۳۰ در دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می گردد. نمره این آزمون ۱۸/۱ هیجده و ۱ می باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر عین اله پاشا	دکتر حمید پزشک	دکتر علی اکبر رحیم زاده

جواد لالی

رئیس دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

چکیده

ابتدا سه روش آزمون فرض چندگانه، روش AIC و روش BIC که پیش از این برای تعیین مرتبه زنجیر مارکوف استفاده می‌شد، ارائه می‌شود. سپس روشی که اخیراً مورد استفاده قرار گرفته، به نام معیار تعیین کارا EDC، معرفی می‌شود و دو قضیه در رابطه با خواص مرتبه زنجیر برآورد شده توسط این روش، بیان می گردد.

روش اخیر تحت شرایطی برآورد قویاً سازگار، و تحت شرایط ضعیف‌تر دیگری، برآورد سازگار برای مرتبه زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر و بازگشتی مثبت با فضای حالت متناهی، به دست می‌دهد.

در واقع روش EDC تعمیم دو روش AIC و BIC است که منجر به یک کلاس از برآوردگرهای سازگار مرتبه زنجیر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مرتبه زنجیر، زنجیر مارکوف، AIC، BIC، معیار تعیین کارا (EDC)، سازگاری.

فهرست مطالب

فصل ۲ روش‌های تعیین مرتبه زنجیر مارکوف

۱

پیش گفتار

در این پایان نامه هدف، معرفی روش‌هایی برای تعیین مرتبه زنجیر مارکوف است.

در زیر مروری اجمالی بر مباحث طرح شده در این پایان نامه خواهیم داشت:

فرض بر این است که زنجیر مارکوف مورد مطالعه، تحویل‌ناپذیر با فضای حالت متناهی باشد.

فصل اول: کلیات

در این فصل تعاریف و قضایای لازم برای استفاده در فصل دوم بیان می‌شوند. پس از تعریف مرتبه زنجیر مارکوف، مثال‌هایی نظری از زنجیر مارکوف با مراتب مختلف بیان می‌گردد.

در ادامه تاریخچه‌ای درباره روش‌های تعیین مرتبه آورده شده است.

فصل دوم: روش‌های تعیین مرتبه زنجیر مارکوف

در این فصل نخست روشی قدیمی برای تعیین مرتبه به نام آزمون فرض چندگانه مطرح و مثالی عددی در این رابطه بیان شده است. سپس چگونگی تعیین مرتبه توسط روشهای AIC و BIC، توضیح داده خواهند شد.

هسته اصلی این پایان نامه، معرفی روشی به نام EDC است که اخیراً مورد استفاده قرار گرفته است. همانطور که خواهیم دید این روش تعمیمی از دو روش AIC و BIC است.

در این قسمت، دو شرط بیان شده و طی قضایایی ملاحظه می‌شود، اگر شرط اول برقرار باشد برآوردگر مرتبه زنجیر به دست آمده توسط EDC یعنی $\hat{r}$ برای مرتبه درست زنجیر r قویاً سازگار است، یعنی $\hat{r}$ تقریباً مطمئن به r همگراست و چنان‌چه شرط دوم برقرار باشد، $\hat{r}$ در احتمال به r همگراست.

نکته‌ای نیز مطرح خواهد شد که بر اساس آن خواهیم دید AIC برآوردگری ناسازگار برای مرتبه درست زنجیر تولید می‌کند و BIC برآوردگری قویاً سازگار.

در پایان با مثالی، چگونگی تعیین مرتبه زنجیر توسط این روش‌ها با در نظر گرفتن دو c_n مختلف برای EDC (c_n ها عبارتند از: $\sqrt{n}$ و $\frac{n}{\log n}$)،

مشخص خواهد شد.

از آنجائی‌که تعیین مرتبه، برای پیش‌بینی مقدار آتی زنجیر مارکوف و استفاده از آن برای برنامه‌ریزی‌های آینده کاربرد دارد و با توجه به اینکه زنجیرهای مارکوف در بسیاری از پدیده‌ها از جمله: مطالعات هواسنجی، گفتار سنجی و بسیاری از مسائل اقتصادی و صنعتی که بتوان آن را به شکل یک زنجیر مشاهده کرد، به کار می‌روند، امید است این پایان نامه منبعی مفید و کاربردی جهت استفاده علاقمندان باشد.

منبع اصلی مورد استفاده عبارت است از:

Zhao,L.C., Dorea, C.C.Y., Goncalves,C.R. (2001) On determination of the order of a Markov Chain, Statist, Inference Stochastic Process, 4, 273-282.

فصل ۱

کلیات

۱.۱ تعاریف و قضایا

۱.۱.۱ تابع محدب

تعریف ۱.۱.۱.۱

تابع ϕ تعریف شده بر بازهٔ I را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in I$ و $0 < \alpha < 1$، داشته باشیم:

$$\alpha\phi(x_1) + (1-\alpha)\phi(x_2) \geq \phi(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$$

به استقراء برای تابع محدب داریم، به ازای هر $x_1, \ldots, x_m \in I$ و $\alpha_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi(x_i) \geq \phi(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i)$$

چنان‌چه ϕ دو بار مشتق پذیر باشد، آنگاه ϕ محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر x، $\frac{d^2\phi}{dx^2} \geq 0$.

۲.۱.۱ کرانداری یکنواخت

تعریف ۱.۲.۱.۱

می‌گوییم دنباله $\{X_k\}$ به طور یکنواخت کراندار است، هرگاه عددی حقیقی مانند A موجود باشد به قسمی که به ازاء هر $k \geq 1$، $|X_k| < A$.

۳.۱.۱ سازگاری

تعریف ۱.۳.۱.۱
برآوردگر U_n که بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی می‌باشد، یک برآوردگر سازگار برای پارامتر θ گوییم، هرگاه به ازاء هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} P(|U_n - \theta| > \epsilon) = 0$$

یعنی U_n در احتمال به θ همگراست.

۴.۱.۱ نسبت درستنمایی برای فرضهای مرکب

تعریف ۱.۴.۱.۱
چنان‌چه H_0 یا H_1 فرض مرکب باشند. ناحیه بحرانی برای

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in A_0 \\ H_1 : \theta \in A_1 \end{cases}$$

که در آن

$$A = A_0 \cup A_1 \quad , \quad A_0 \cap A_1 = \emptyset$$

و

$$L(\theta) = \prod_i f(x_i;\theta)$$

به وسیله

$$\lambda = \frac{\max_{\theta\in A_0} L(\theta)}{\max_{\theta\in A} L(\theta)} < K < 1$$

تعیین می‌شود، که K به α بستگی دارد.
λ را نسبت درستنمایی برای فرض‌های مرکب می‌نامیم. L نیز تابع درستنمایی است.
توزیع λ را در حالت کلی نمی‌توان پیدا کرد. در عمل اغلب به جای آماره λ، آماره $\log\lambda$ را به کار می‌برند.
تحت H_0، $-2\log\lambda$ وقتی $n\to\infty$، دارای توزیع χ^2 با r درجه آزادی است که

$$r = dimA - dimA_0 > 0$$

از تعاریف زیر در فصل ۲ استفاده خواهد شد.

۱.۱.۵ نماد لاندا

تعریف ۱.۱.۵.۱ (**O ی بزرگ**)
فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند. در این‌صورت

$$a_n = O(b_n) \quad , n \to \infty$$

یعنی عددی ثابت (مستقل از n) و مثبت مانند A و عددی طبیعی مانند N هست که اگر $n > N$ آنگاه

$$|a_n| \leq A|b_n|$$

مثال ۱.۱.۵.۱

$$n = O(n^{۲})$$

تعریف ۱.۱.۵.۲ (**o ی کوچک**)
فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند. در این‌صورت

$$a_n = o(b_n) \quad , n \to \infty$$

یعنی به ازاء هر عدد مثبت ϵ، عددی طبیعی مانند N هست که اگر $n > N$ آنگاه

$$|a_n| \leq \epsilon|b_n|$$

مثال ۱.۱.۵.۲

$$۳ = o(n)$$

تعریف ۳.۵.۱.۱
فرض کنیم $\{b_n\}$ دنباله‌ای باشد.
I. $O(b_n)$ یعنی تابعی مانند a_n که $a_n = O(b_n)$.
II. $o(b_n)$ یعنی تابعی مانند a_n که $a_n = o(b_n)$.
بالاخص،
III. $O(1)$ یعنی دنباله‌ای محدود،
IV. $o(1)$ یعنی دنباله‌ای که حدش صفر است.

قضیه ۱.۵.۱.۱
فرض کنیم $\alpha > 0$
I. اگر $a_n = O(b_n)$ آنگاه $|a_n|^\alpha = O(|b_n|^\alpha)$.
II. اگر $a_n = o(b_n)$ آنگاه $|a_n|^\alpha = o(|b_n|^\alpha)$.

از لم زیر بعداً استفاده می‌شود.

۶.۱.۱ لم کرونکر

بفرض دو دنباله $\{x_k\}$ و $\{a_n\}$ وجود دارند، به طوری که $x_k \in R$ و $0 < a_n \uparrow \infty$.
اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{a_k}$$

همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

۲.۱ فرایندهای تصادفی

فرض کنید T مجموعه‌ای دلخواه و به ازای هر $t \in T$ ، X_t متغیری تصادفی باشد. فرض کنید $E \subset R$ مجموعهٔ ثابتی باشد و مقادیر متغیرهای تصادفی X_t در داخل این مجموعه باشد. در این صورت تعریف زیر را داریم:

تعریف ۱.۲.۱

مجموعهٔ $\{X_t : t \in T\}$ را فرایند تصادفی با مجموعهٔ اندیسگذار T و فضای حالت E می‌گوییم. اگر $A \subset E$ یا $(x \in E)$ و $X_t \in A$ (یا $X_t = x$) می‌گوییم فرایند در زمان (یا مرحلهٔ) t در مجموعهٔ A (یا در حالت x) قرار دارد. اگر T مجموعه‌ای شمارا باشد، فرایند را گسسته‌ـزمان (با زمان گسسته) و اگر مجموعه‌هایی به صورت $(\circ, \infty)$ یا $(-\infty, \infty)$ باشد آن را پیوسته‌ـزمان (با زمان پیوسته) می‌گوییم. برای هر ω از فضای نمونه‌ای مجموعهٔ $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ را که زیر مجموعه‌ای از E است، تحقق یا مسیر نمونه‌ای فرایند می‌گوییم.

۳.۱ زنجیرهای مارکوف

یکی از مسأله‌های مهم در فرایندهای تصادفی مسأله پیش‌بینی است. فرایند تصادفی $\{X_n : n = \circ, ۱, ۲, \ldots\}$ با زمان گسسته و فضای حالت شمارای $L = \{a_\circ, a_۱, \ldots\}$ را در نظر می‌گیریم.

منظور از پیش‌بینی آن است که فرایند، مثلاً تا زمان m مشاهده شده است، می‌خواهیم مقدار متغیر X_n $(n > m)$ را برآورد کنیم. به عبارت دیگر مقدار متغیرهای $X_\circ, X_۱, \ldots, X_m$ معلوم است، می‌خواهیم توزیع X_n را بدست آوریم. در اصل منظور محاسبهٔ احتمال

$$P\{X_n = y | X_\circ = x_\circ, \ldots, X_m = x_m\}$$

است.

میزان موفقیت ما در یافتن این توزیع شرطی تا حد زیادی بستگی به نوع رابطه‌ای دارد که از نظر احتمالاتی بین متغیرها برقرار است. مثلاً، اگر متغیرهای تصادفی $X_\circ, X_۱, \ldots$ با هم برابر باشند، یعنی $X_۱ = X_۲ = \ldots$ در این صورت پیش‌بینی بطور کامل انجام می‌شود. زیرا در این حالت فقط با مشاهدهٔ $X_\circ = x_\circ$ بی‌درنگ مقدار تمام متغیرها معلوم می‌شود، یعنی به ازای هر $n \geq ۱$، $X_n = x_\circ$. بالعکس اگر X_n ها مستقل باشند، آن‌گاه اطلاعات $X_\circ = x_\circ$، ...، $X_m = x_m$ هیچ‌گونه کمکی در یافتن توزیع شرطی بالا نخواهد کرد.

در این بین سیستم‌هایی وجود دارند که مدل فرایند آنها نه از بستگی کامل مثال اول و نه از عدم وابستگی کامل مثال دوم پیروی می‌کنند، بلکه

اطلاعات گذشته تا حدودی و به صورتی در رفتار آیندهٔ فرایند مؤثرند. از جمله ساده‌ترین این وابستگی‌ها، ویژگی مارکوف است.

۴.۱ احتمال‌های انتقال یک مرحله‌ای

تعریف ۱.۴.۱

فرض کنید $\{X_n : n = ۰, ۱, ۲, \ldots\}$ فرایندی تصادفی با زمان گسسته و فضای حالت شمارای L باشد. گوییم این فرایند یک زنجیر مارکوف است اگر به ازای هر $n \geq ۱$ و هر $x_۰$، $x_۱$، $\ldots$، $x_{n-۱}$ و x و y از حالت‌ها، برابری

$$P\{X_{n+۱} = y | X_۰ = x_۰, X_۱ = x_۱, \ldots, X_{n-۱} = x_{n-۱}, X_n = x\} =$$

$$= P\{X_{n+۱} = y | X_n = x\}$$

برقرار باشد.

یعنی فقط اطلاع از حالت فرایند در مرحلهٔ n برای تعیین توزیع حالت فرایند در مرحلهٔ $n + ۱$ کفایت می‌کند و اطلاعات قبل از آن مؤثر نخواهند بود.

احتمال شرطی $P\{X_{n+۱} = y | X_n = x\}$ را احتمال انتقال یک مرحله‌ای (از x در مرحله n ام به y در مرحله $n + ۱$ ام) می‌نامیم. همان‌طور که از ظاهر این احتمال برمی‌آید این احتمال بستگی به x و y و n دارد. اگر این احتمال به n بستگی نداشته باشد، چنین زنجیر مارکوفی را زنجیر مارکوف همگن می‌نامیم.

در مورد زنجیر مارکوف همگن، احتمال‌های انتقال را با p_{xy} نشان می‌دهیم.

$$p_{xy} = P\{X_{n+۱} = y | X_n = x\}, n \geq ۰, x, y \in L$$

احتمال‌های انتقال دارای دو ویژگی زیر هستند:

الف) به ازای هر $x, y \in L$ ‏$p_{xy} \geq ۰$.

ب) به ازای هر $x \in L$ ‏$\sum_{y \in L} p_{xy} = ۱$.

این احتمالات را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت. مثلاً اگر L به صورت $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ باشد ماتریس P به صورت زیر خواهد بود:

$$P = \begin{pmatrix} p_{۰۰} & p_{۰۱} & p_{۰۲} & \cdots \\ p_{۱۰} & p_{۱۱} & p_{۱۲} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i۰} & p_{i۱} & p_{i۲} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

ماتریس P را که درایه‌های آن احتمال‌های انتقال یک مرحله‌ای است، ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای می‌نامیم. این احتمالات اساس مطالعه ساختار زنجیر مارکوف هستند.

۱.۵ احتمال‌های انتقال چند مرحله‌ای و برابری چپمن—کولموگروف

تعریف ۱.۵.۱

فرض کنید $\{X_n : n = ۰, ۱, ۲, \ldots\}$ زنجیر مارکوفی با فضای حالت L و ماتریس احتمال $P = (p_{xy})$ باشد. به ازای $m, n \geq ۱$ احتمالهای $P\{X_{n+m} = y | X_m = x\} x, y \in L$ را احتمال‌های انتقال n مرحله‌ای می‌نامیم و با علامت $p_{xy}^{(n)}$ نشان می‌دهیم.

ماتریس این احتمال‌ها را ماتریس احتمال انتقال n مرحله‌ای می‌نامیم و با علامت P^n نشان می‌دهیم.

$p_{xy}^{(n)}$ در شرط‌های $p_{xy}^{(n)} \geq ۰$ و $\sum_y p_{xy}^{(n)} = ۱$ صدق می‌کند. علاوه بر این احتمال‌های انتقال مراتب بالا در برابری چپمن—کولموگروف صدق می‌کنند.

قضیه ۱.۵.۱ (برابری چپمن — کولموگروف[۱])

اگر m و n دو عدد طبیعی باشد، آن‌گاه به ازای هر x و y از حالت‌ها:

$$p_{xy}^{(m+n)} = \sum_{z \in L} p_{xz}^{(m)} p_{zy}^{(n)}$$

نتیجه: اگر P ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای و P^n ماتریس احتمال انتقال n مرحله‌ای باشد، داریم:

[۱] $Chapman - Kolmogorov$

$$P^n = P \times P \times \ldots \times P \ (\text{مرتبه } n)$$

یعنی P^n در اصل توان n ام P است.

۶.۱ مرتبه زنجیر مارکوف

تعریف ۱.۶.۱

زنجیر مارکوف $\{X_n\}$ را از مرتبه s گوییم $(s = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ هرگاه برای هر n

$$P\{X_n = k | X_{n-۱} = j, X_{n-۲} = j_۱, \ldots, X_{n-s} = j_{s-۱}, \ldots\}$$
$$= P\{X_n = k | X_{n-۱} = j, \ldots, X_{n-s} = j_{s-۱}\} \qquad (۱.۶.۱)$$

در واقع کوچکترین s ای که در این رابطه صدق کند، مرتبه زنجیر مارکوف تلقی می‌شود.

از آنجائی‌که این رابطه به ازای هر n برقرار است، زنجیر همگن می‌باشد.

گوییم $\{X_n\}$ زنجیر مارکوف از مرتبه یک است (یا به اختصار «زنجیر مارکوف» است.) هرگاه

$$P\{X_n = k | X_{n-۱} = j, X_{n-۲} = j_۱, \ldots\} = P\{X_n = k | X_{n-۱} = j\} = p_{jk}$$

زنجیر از مرتبه ۰ گفته می‌شود هرگاه برای تمام j ها $p_{jk} = p_k$، که این نشانگر استقلال X_n و $X_{n-۱}$ است. یعنی در ماتریس P تمام سطرها با هم برابر باشند.

۷.۱ مثال‌هایی از زنجیر مارکوف با مراتب مختلف

مثال ۱.۷.۱

آزمایش ساده پرتاب سکه که چندین بار تکرار می‌شود را در نظر می‌گیریم. نتیجه آزمایش، شیر یا خط هر کدام به ترتیب با احتمالات p و q است که $p + q = ۱$. اگر آمدن شیر را با ۱ و خط را با ۰ و متغیر تصادفی را که بیانگر نتیجه پرتاب دفعه n ام سکه است با X_n نشان دهیم در این‌صورت برای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ خواهیم داشت:

$$P\{X_n = ۱\} = p$$

و

$$P\{X_n = ۰\} = q$$

به این ترتیب دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... را داریم. آزمایش‌ها مستقل هستند و نتیجه آزمایش n ام بستگی به آزمایش‌های $۱, ۲, \ldots, (n-۱)$ ندارد.

این مثالی از زنجیر مارکوف مرتبه صفر است.

مثال ۲.۷.۱

حال متغیر تصادفی $S_n = X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n$ که مجموع شیرها در n آزمایش اول است را در نظر می‌گیریم. مقادیر ممکن S_n عبارتند از $۰, ۱, \ldots, n$. در اینصورت $S_{n+۱} = S_n + X_{n+۱}$ خواهد بود.

اگر $S_n = j$ و $(j = ۰, ۱, \ldots, n)$ باشد، متغیر تصادفی $S_{n+۱}$ به ترتیب $S_{n+۱} = j$ با احتمال q و $S_{n+۱} = j + ۱$ با احتمال p خواهد بود. این احتمالات به هیچ وجه تحت تأثیر مقادیر متغیرهای $S_۱, \ldots, S_{n-۱}$ نیست. بنابراین

$$P\{S_{n+۱} = j + ۱ | S_n = j\} = p$$

$$P\{S_{n+۱} = j | S_n = j\} = q$$

این مثالی از زنجیر مارکوف مرتبه یک است. در این مثال نتیجه آزمایش $(n+۱)$ ام فقط به نتیجه آزمایش n ام بستگی دارد. احتمال شرطی $S_{n+۱}$ به شرط S_n به مقدار S_n بستگی دارد و چگونگی رسیدن به مقدار S_n فاقد اهمیت است.

مثال ۳.۷.۱

چنان‌چه حالت روز بارانی را با ۱ و روز غیر بارانی را با ۰ نشان داده و فرض نماییم که رابطهٔ (۱.٦.۱) به ازای $s = ۲$ برقرار باشد یعنی

$p_{ijk} = P\{$روز قبل از دیروز در حالت i بوده ، دیروز در حالت j بوده | امروز در حالت k است.$\}$

$i, j, k = ۰, ۱$

در این صورت زنجیر مارکوف از مرتبه ۲ است.

اگر رابطه (۱.٦.۱) به ازای $s = ۱$ برقرار باشد یعنی

$$p_{jk} = P\{\text{امروز در حالت } k \text{ است} \mid \text{دیروز در حالت } j \text{ بوده}\}, j, k = ۰, ۱$$

آنگاه زنجیر مارکوف از مرتبه یک است با ماتریس احتمال انتقال $P = (p_{jk}) \quad j, k = ۰, ۱$.

اهمیت زنجیرهای مارکوف در تعداد زیادی از پدیده‌های طبیعی، فیزیکی، زیست‌شناسی و اقتصاد که به وسیله این زنجیرها قابل توصیف هستند، نهفته است.

۸.۱ مارتینگل‌ها و دو قضیه مهم

تعریف ۱.۸.۱ (مارتینگل)
گوییم دنباله $\{X_n\}$ نسبت به دنباله $\{F_n\}$ از σ — میدان‌های صعودی، مارتینگل است، هرگاه:
الف) به ازاء هر $i \geq ۰$، X_i نسبت به F_i اندازه‌پذیر باشد. (به ازاء هر مجموعه بورل B در R داشته باشیم، $X_i^{-۱}(B) \in F_i$) و $E(|X_i|) < \infty$.
ب) به ازاء هر $i \geq ۰$ داشته باشیم، $E(X_{i+۱}|F_i) = X_i$.

تعریف ۲.۸.۱ (تحت مارتینگل)
گوییم دنباله $\{X_n\}$ نسبت به دنباله $\{F_n\}$ از σ — میدان‌های صعودی، تحت مارتینگل است، هرگاه:
الف) به ازاء هر $i \geq ۰$، X_i نسبت به F_i اندازه‌پذیر باشد و $E(|X_i|) < \infty$.
ب) به ازاء هر $i \geq ۰$ داشته باشیم، $E(X_{i+۱}|F_i) \geq X_i$.

تعریف ۳.۸.۱ (مارتینگل تفاضلی)
گوییم دنباله $\{X_n\}$ نسبت به دنباله $\{F_n\}$ از σ — میدان‌های صعودی، مارتینگل تفاضلی است، هرگاه:
الف) برای $i \geq ۰$ ، X_i نسبت به F_i اندازه‌پذیر باشد و $E(|X_i|) < \infty$.
ب) برای $i \geq ۰$ ، $E(X_{i+۱}|F_i) = ۰$.

نتیجه ۱.۸.۱
اگر دنباله $\{X_n\}$ نسبت به دنباله $\{F_n\}$ از σ — میدان‌های صعودی، مارتینگل تفاضلی باشد، آنگاه: $V_n = \sum_{j=0}^{n} X_j$ نسبت به $\{F_n\}$ مارتینگل است.

قضیه زیر از [۳۱] است.
قضیه ۱.۸.۱ (قضیه همگرایی مارتینگل)
اگر دنباله $\{X_n\}$ تحت مارتینگل صادق در

$$\sup_{i\geq 0} E|X_i| < \infty$$

باشد، آنگاه متغیری تصادفی مانند X وجود دارد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad a.s.$$

حال با تعاریف زیر دو قضیه از [۱۸] بیان می‌کنیم.

فرض کنیم $\{W_n\}$ دنباله‌ای صعودی $(a.s.)$ و نامنفی از متغیرهای تصادفی باشند. همچنین فرض کنیم $\{S_n\}$ نسبت به دنباله σ–میدان‌های $F_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$ مارتینگلی با میانگین ۰ باشد و به ازاء هر $n \geq 1$ ،$E|X_n|^2 < \infty$.
حال توابع پیوسته ζ_n را بر $[0, 1]$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$\zeta_n(t) = [\phi(W_n^2)]^{-1}\{S_i + (W_{i+1}^2 - W_i^2)^{-1}(tW_n^2 - W_i^2)X_{i+1}\}$$

که در آن t و i در نابرابری زیر صدق می‌کنند:

$$W_i^2 \leq tW_n^2 < W_{i+1}^2, \quad i \leq n-1$$

و تابع $\phi(t)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(t) = (2t \log\log t)^{\frac{1}{2}}$$

مجموعه K را مجموعه حدی $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ تعریف می‌کنیم .
همچنین در قضایای بعد X_i ها نیز متغیرهایی تصادفی‌اند.