بسم الله الرّحمن الرّحيم

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

منیفلدهای ناوردای سیستم‌های هامیلتونی آشوبناک

پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

لیلا خیبرشکن اصل

استاد راهنما: دکتر میرعباس جلالی

خرداد ۱۳۸۱

تقدیم به آیهٔ مکرّر آرامش، مادر

قدردانی

در اینجا لازم است از استاد گرامی جناب آقای دکتر میرعباس جلالی که راهنمای من در به انجام رساندن این رساله بوده‌اند تشکر نمایم. همچنین بر خود وظیفه می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر بهمن مهری که همواره بر من محبت داشته‌اند و من درسی بالاتر از ریاضی از ایشان آموخته‌ام بی‌نهایت تشکر نمایم. از خانوادهٔ عزیزم و همچنین دوستان گرامیم به ویژه خانم راحلهٔ شرفی نیز سپاسگزارم.

در پایان صمیمانه‌ترین ارادت خود را تقدیم خانم شریف و آقای آزما اولین اساتید ریاضی خود می‌نمایم.

چکیده

دراین پژوهش الگوریتمی برای محاسبه منیفلدهای ناوردای سیستم‌های هامیلتونی آشوبناک ارائه می‌شود که توسط آن می‌توان، منیفلدهای پایدار و ناپایدار نقاط ثابت هذلولوی سیستم هامیلتونی را (در صورت وجود) برای مقادیر مختلف انرژی بدست آورد. برای این منظور برنامه کامپیوتری نوشته شد که با دقت مضاعف، پاسخ تناوبی ناپایدار معادلهٔ دافینگ واداشته و سیستم هنون ـ هایلس را بدست می‌دهد. همچنین منیفلدهای پایدار و ناپایدار سیستمهای یاد شده محاسبه می‌شوند. مبنای الگوریتم ارائه شده در این پژوهش استفاده از قضیهٔ فلوکه و خطی سازی حول پاسخ تناوبی و استفاده از روش نیوتن برای بدست آوردن مسیرهای فضای فاز، روی ابر رویه انرژی ثابت می‌باشد.

کلمات کلیدی:

نگاشت پوانکاره، منیفلدهای ناوردا، سیستمهای هامیلتونی، آشوب، نقاط هوموکلینیک و هتروکلینیک

فهرست مندرجات

مقدمه

منیفلدهای[1] ناوردا سطوحی در فضای فاز یک سیستم دینامیکی هستند که دارای این خاصیت می‌باشند که مدارهای متعلق به این مجموعه‌ها در طول حرکت، متعلق به همان مجموعه باقی می‌مانند.
اطلاعات مربوط به منیفلدهای ناوردای یک سیستم دینامیکی، همچنین رفتار متقابل منیفلدهای پایدار و ناپایدار، برای رسیدن به فهم کاملی از دینامیک عمومی از اهمیت خاصی برخوردارند. کارهای زیادی روی موضوع منیفلدهای ناوردا در ۵۰ سال گذشته صورت گرفته است و امروزه نیز با سرعت سریع ادامه دارد.
اولین نتایج مهم متمرکز منیفلدهای ناوردا توسط هادامارد[2] (۱۹۰۱) و پرون[3] (۱۹۲۸)، (۱۹۲۹) و (۱۹۳۰) بدست آمد. آنها وجود منیفلدهای پایدار و ناپایدار نقطهٔ سکون مربوط به سیستمهای ناپیوسته را اثبات کردند.
در سال ۱۹۵۰ لِوینسن[4] در مطالعاتش روی نوسانات جفت شده، دو چنبرهٔ ناوردا را رسم کرد. این کار توسط دیلیبرتو[5] (۱۹۶۰)، (۱۹۶۱) و همچنین با کوشش کاینر[6] (۱۹۵۵)، هافورد[7] (۱۹۵۶)، مارکوس[8] (۱۹۵۶)، هیل[9] (۱۹۶۱)، کرزویل[10] (۱۹۶۸)، مک کارتی[11] (۱۹۵۵) و کِلِی[12] (۱۹۶۷) توسعه داده شد.
وجود منیفلدهای پایدار و ناپایدار و پایداری آنها تحت اختلال برای هر منیفلد ناوردای دلخواه اولین بار توسط ساکر[13] (۱۹۶۴) اثبات شد. این کار بعداً توسط فِنیشِل[14] توسعه داده شد. همچنین کارهای مشابه دیگری مستقلاً توسط شاب[15] (۱۹۷۷)، پاگ[16]، هیش[17] انجام شد.
در سال ۱۹۶۳ ملنیکوف روشی برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین منیفلدهای پایدار و ناپایدار روی سطح پوانکاره ارائه کرد که ما در فصل اول این پایان نامه به آن اشاره کرده‌ایم. در این پایان نامه بطور کلی ما مطالعهٔ خود را معطوف به محاسبهٔ عددی دقیق منیفلدهای ناوردای نقاط ثابت هذلولوی می‌کنیم.
در فصل دوم و سوم به بررسی قضایایی می‌پردازیم که در طول کار از آنها استفاده کرده‌ایم. در فصل چهارم

Manifolds[1]
Hadamard[2]
Perron[3]
Levinson[4]
Diliberto[5]
Kyner[6]
Hufford[7]
Marcus[8]
Hale[9]
Kurzweil[10]
Mccarthy[11]
Kelley[12]
Sacker[13]
Fenichel[14]
Shub[15]
Pugh[16]
Hisch[17]

سیستمهای دو بعدی را مطالعه خواهیم کرد و در فصل پنجم به سیستمهای هامیلتونی ۴ بعدی خواهیم پرداخت. هدف ما پیدا کردن منیفلدهای ناوردای یک سیستم هامیلتونی است که این کار با تشکیل نگاشت پوانکاره نزدیک مدار هموکلینیک (یا هتروکلینیک) انجام خواهد شد. ابتدا کار را با معادلهٔ دو بعدی دافینگ شروع کرده و منیفلدهای پایدار و ناپایدار آن را با رعایت ترتیب کار پیدا می‌کنیم. در فصل پنجم سیستمهایی را بررسی می‌کنیم که در مقالات کانتوپولوس[18] و آریولی[19] از آنها استفاده شده است. یکی از این سیستمها سیستم هامیلتونی هنون ـ هایلس[20] است که منیفلدهای ناوردای آن در فصل ۴ محاسبه شده و تقاطع عرضی آنها نشان داده شده است.

G.Contopoulos[18]
G.Arioli[19]
Henon-Heiles[20]

فصل ۱

قضیهٔ فلوکه

این فصل اختصاص به قضایا و تعاریفی دارد که در طول کار وهمچنین در مراجع استفاده شده در این پژوهش از آنها استفاده شده است. اصلی ترین تعریفی که در این قسمت موجود است، تعریف نگاشت پوانکاره می‌باشد. به منظور خودشمولی بودن این گزارش، اثبات بعضی از مفاهیم آورده شده است و اثبات برخی دیگر به مراجع موجود ارجاع داده شده است. این فصل را با تعریف نگاشت پوانکاره شروع می‌کنیم.

۱.۱ نگاشت پوانکاره [۲]

نگاشت پوانکاره یک ابزار اساسی برای کاهش مرتبه یا حذف پیچیدگی یک سیستم با بعد فضای حالت مساوی یا بیش از ۳ می‌باشد که توسط هنری پوانکاره[1] در سال ۱۸۸۱ مطرح گردید. مفهوم نگاشت پوانکاره بسیار ساده می‌باشد:

اگر Γ یک مدار تناوبی برای سیستم

$$\dot{x} = F(x) \ , \quad x \in E \subset R^n \tag{۱}$$

باشد و Σ اَبَررویه‌ای باشد که Γ را در نقطهٔ x_0 قطع کند، آنگاه برای هر $x \in \Sigma$ که کاملاً به x_0 نزدیک باشد، پاسخ (۱) در صورت شروع از x مجدداً صفحهٔ Σ را در $p(x)$ نزدیک x_0 قطع خواهد کرد. نگاشت $f : x \longrightarrow p(x)$ نگاشت پوانکاره نامیده می‌شود.

اگرابر رویهٔ Σ را از بعد $n-1$ بگیریم که بصورت $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ تعریف گردد، آنگاه بردار عمود بر این

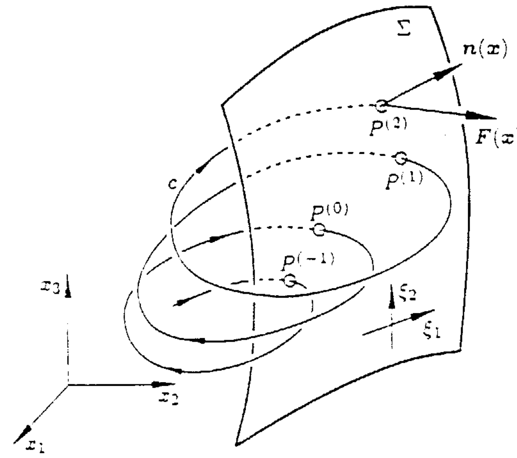
Henri Poincaré[1]

بُردار نرمال بر رویه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = |\nabla g|^{-1}.\nabla g$$

که در آن $\nabla g = \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_1} , \frac{\partial g}{\partial x_2} , \ldots , \frac{\partial g}{\partial x_n} \right\}$ می‌باشد.

اگر $F.N \neq 0$ باشد، دراین صورت F، ابر رویهٔ g را به طور عرضی قطع می‌کند. نقاط فصل مشترک جریانهای فضای حالت با صفحهٔ Σ را به نامهای $\ldots , p^{(2)} , p^{(1)} , p^{(0)} , p^{(-1)} , p^{(-2)} , p^{(-3)} , \ldots$ نشان می‌دهیم. شکل زیر نمونه‌ای از نگاشت پوانکاره را برای سیستمی با بعد فضای فاز سه، نشان می‌دهد.



شکل ۱: سطح پوانکارهٔ سیستمی با فضای فاز ۳ بعدی

از آنجائیکه هر نقطهٔ $p^{(i+1)}$ روی Σ تصویر نقطهٔ ما قبل آن، $p^{(i)}$، به واسطهٔ معادله $\dot{x} = F(x)$ است، می‌توان در حالت کلی نوشت:

$$p^{(i+1)} = f(p^{(i)})$$

f یک نگاشت غیرخطی است که ازابررویهٔ Σ بروی خودش تعریف می‌شود. این نگاشت غیرخطی همان نگاشت پوانکاره می‌باشد و یک به یک است. (چون جواب معادله دیفرانسیل $\dot{x} = F(x)$ یکتا است). همچنین

$$p^{(i)} = f^{-1}(p^{(i+1)})$$

$$f : R^{n-1} \longrightarrow R^{n-1}$$

بعلاوه، داریم:

$$p^{(1)} = f(p^{(0)}) \ , \ p^{(2)} = f(p^{(1)}) \ , \ \cdots \ , \ p^{(m)} = f(p^{(m-1)}) \Longrightarrow p^{(m)} = \underbrace{fof\cdots of}_{m \text{ تا}}(p^{(0)})$$

که به منظور خلاصه نویسی می‌توان از نوشتار زیر استفاده کرد،

$$p^{(m)} = f^{[m]}(p) = \underbrace{fof\cdots of}_{m \text{ تا}}(p)$$

اگر جواب صریح معادلهٔ (۱) موجود باشد، می‌توان f را بدست آورد، ولی در حالت کلی این امر غیرممکن است. واضح است که هر مدار تناوبی، یک نقطهٔ ثابت نگاشت f است. مثلاً فرض کنیم که p_s، نقطهٔ ثابت نگاشت f باشد، پس:

$$f(p_s) = p_s$$

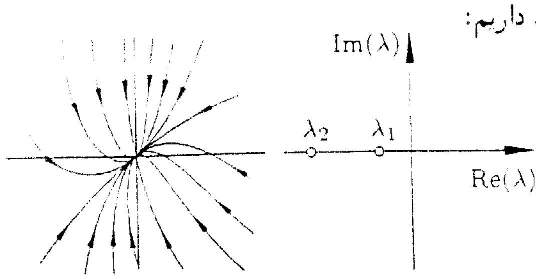
به عبارت دیگر اگر p_s بعنوان شرط اولیه سیستم (۱) انتخاب گردد پاسخ تناوبی بدست می‌آید که همواره در سطح مقطع پوانکاره یک نقطه باقی می‌ماند.
حال اگر $f^{[m]}(p_s) = p_s$، دراین صورت p_s نقطهٔ ثابت نگاشت $f^{[m]}$ است که در این حالت یک m − دوری داریم.
حال فرض کنیم:

$$z = p_s + \Delta \qquad |\Delta| \ll 1$$

خواهیم داشت :

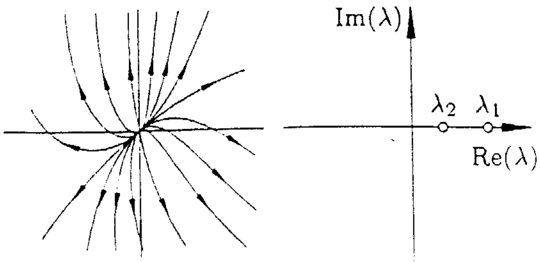
$$\begin{aligned} z^{(n+1)} = f(z^{(n)}) \quad &\Longrightarrow \quad p_s + \Delta_{n+1} = f(p_s + \Delta_n) \\ &\Longrightarrow \quad p_s + \Delta_{n+1} = f(p_s) + \frac{\partial f}{\partial z}|_{p_s}\Delta_n + O(\Delta^2{}_n) \end{aligned}$$

و چون داریم : $f(p_s) = p_s$؛ بدست می‌آوریم: $\Delta_{n+1} = J\Delta_n$ که $J = \frac{\partial f}{\partial z}|_{p_s}$ ماتریس ژاکوبی f می باشد.
برای سادگی کار و بدست آوردن یک حس اولیه از رفتار حول نقاط ثابت، حالتهای ممکن در یک سیستم دو بعدی را بررسی می‌کنیم که البته گسترش نتایج به فضای دلخواه n بعدی مشکل نخواهد بود.
اگرفرض کنیم که مقادیر ویژهٔ سیستم دو بعدی مورد نظر متفاوت باشند داریم:

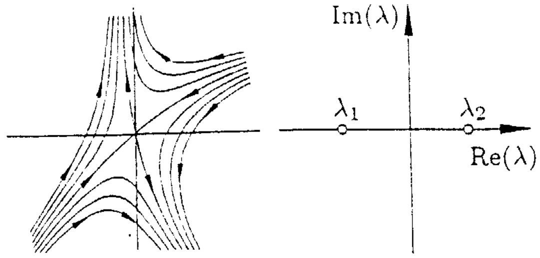


۱) اگر هر دو مقدار ویژه حقیقی باشند و برای $i = 1,2$ ، $|\lambda_i| < 1$ آنگاه نقطهٔ ثابت، گره پایدار[2] می‌باشد.

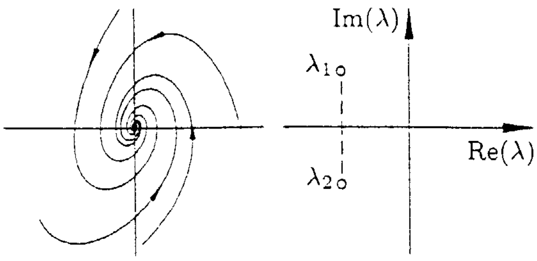
stable node[2]



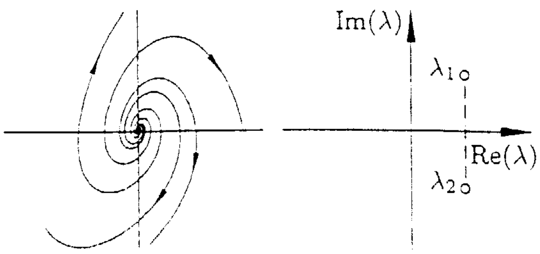
۲) اگر هر دو مقدار ویژه حقیقی باشند و برای $i = 1, 2$، $|\lambda_i| > 1$؛ آنگاه نقطهٔ ثابت، گره ناپایدار[3] خواهد بود.



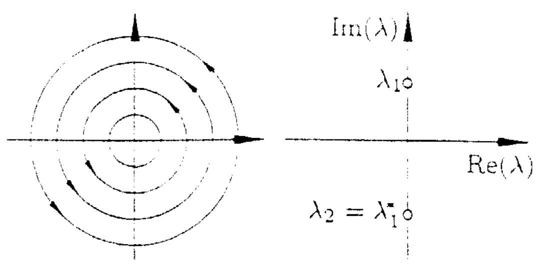
۳) اگر هر دو مقدار ویژه حقیقی باشند و $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_1| > 1$، آنگاه نقطهٔ ثابت، هذلولوی[4] خواهد بود.



۴) اگر هر دو مقدار ویژه مزدوج موهومی باشند و برای $i = 1, 2$ $|\lambda_i| < 1$ آنگاه نقطهٔ ثابت، کانون پایدار[5] خواهد بود.



۵) اگر هر دو مقدار ویژه مزدوج موهومی باشند و برای $i = 1, 2$، $|\lambda_i| > 1$ آنگاه نقطهٔ ثابت، کانون ناپایدار[6] خواهد بود.



۶) اگر هر دو مقدار ویژه مزدوج موهومی باشند و برای $i = 1, 2$، $|\lambda_i| = 1$ آنگاه نقطهٔ ثابت، مرکز[7] خواهد بود.

بطور کلی در صورت حقیقی بودن مقادیر ویژه اگر $|\lambda| \neq 1$ نقطهٔ ثابت، هذلولوی، واگر $|\lambda| = 1$ نقطهٔ ثابت غیرهذلولوی نامیده می‌شود. نقطهٔ ثابت مرکز نیز نقطهٔ ثابت بیضوی نامیده می‌شود. درسیستم‌های هامیلتونی، ساختار فضای حالت یا نگاشت پوانکارهٔ حاصل ازآن دارای نقاط ثابت از نوع هذلولوی (زینی) و مرکز است. ساختار دیگری مشاهده نمی‌شود.

[3] unstable node
[4] saddle point
[5] stable focus
[6] unstable focus
[7] center

۲.۱ قضیهٔ فلوکه [۳]

خطی سازی یک سیستم دینامیکی از نوع $\dot{X} = F(X,t)$ حول پاسخ تناوبی $X_p(t)$ به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌انجامد

$$\dot{x} = p(t)x \qquad (۲)$$

که در آن p یک ماتریس $n \times n$، متناوب با دورهٔ تناوب T است. این معادلهٔ خطی حداقل یک جواب غیربدیهی $(x(t))$ دارد بطوریکه

$$x(t+T) = \mu\, x(t) \qquad -\infty < t < \infty.$$

دو قضیهٔ زیر در اثبات قضیهٔ اصلی فلوکه [8] به ما کمک می‌کنند که آنها را بدون اثبات قبول می‌کنیم.

۳.۱ قضیه: فرض کنیم $\phi(t)$ جواب $\dot{x} = A(t)x$ باشد، در این صورت:
اگر جوابهای $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t))$ وابستهٔ خطی باشند، خواهیم داشت $\det(\phi(t)) = 0$. همچنین $\det(\phi(t)) \neq 0$ می‌شود اگر و فقط اگر $\phi(t)$ ماتریس اساسی سیستم باشد.

۴.۱ قضیه: اگر ستونهای $\phi(t)$ مستقل خطی باشند هرجواب دیگر ترکیب خطی ازستونهای $\phi(t)$ خواهد بود.

اثبات قضیهٔ فلوکه: فرض کنید $\phi(t) = [\phi_{ij}(t)]$ یک ماتریس اساسی برای سیستم (۲) باشد بنابراین خواهیم داشت:

$$\dot{\phi}(t) = p(t)\phi(t) \qquad (۳)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۳) و تناوبی بودن جواب ϕ داریم:

$$\dot{\phi}(t+T) = p(t+T)\phi(t+T) \qquad (۴)$$

از آنجائیکه p یک ماتریس متناوب می‌باشد داریم:

$$\dot{\phi}(t+T) = p(t)\phi(t+T) \qquad (۵)$$

Floquet (1883)[8]

پس $\phi(t+T)$ نیز جواب دیگری برای سیستم (۲) می‌باشد.
بنا به قضیهٔ ۴.۱ ستونهای $\phi(t+T)$ ترکیب خطی از ستونهای $\phi(t)$ هستند، پس:

$$\phi_{ij}(t+T)=\sum_{k=1}^{n}\phi_{ik}(t)e_{kj} \tag{٦}$$

که e_{kj} ثابت می‌باشد. رابطهٔ (٦) را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\phi(t+T)=\phi(t).E \quad , \quad E=[e_{kj}] \tag{٧}$$

بنابراین،

$$\det\phi(t+T)=\det\phi(t).\det(E)$$

از آنجائیکه $\phi(t)$ ماتریس اساسی سیستم (۲) می‌باشد پس، $\det\phi(t)\neq 0$ و همچنین، $\det(E)\neq 0$ پس:

$$\det\phi(t+T)\neq 0 \tag{٨}$$

حال با توجه به رابطه (۸) و قضیهٔ ۳.۱ نتیجه می‌گیریم که $\phi(t+T)$ یک ماتریس اساسی دیگری است.
حال اگر t_0 یک مقدار مناسب از t باشد با استفاده از رابطهٔ (۷) داریم:

$$\phi(t_0+T)=\phi(t_0).E \quad\Rightarrow\quad E=\phi^{-1}(t_0).\phi(t_0+T)$$

فرض کنید که μ مقدار ویژهٔ E و S بردار ویژهٔ نظیر μ باشد، خواهیم داشت:

$$\det(E-\mu\, I)=0 \tag{٩}$$

$$(E-\mu\, I)S=0 \tag{١٠}$$

از طرفی چون $\phi(t)$ ماتریس اساسی سیستم (۲) است داریم:

$$\dot{\phi}(t)=p(t)\phi(t)$$

پس،

$$\dot{\phi}(t)S=p(t)\phi(t)S \tag{١١}$$

بنابراین $x(t)=\phi(t)S$ یک جواب دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل (۲) خواهد بود.
با استفاده از روابط (۷)، (۱۰) و نیز $x(t)=\phi(t)S$ داریم:

$$x(t+T)=\phi(t+T)S=\phi(t)E\,S=\phi(t)\mu\,S=\mu\,x(t)$$

مقدار ویژهٔ μ از E عدد مشخصهٔ معادلهٔ $\dot{x}=p(t)\,x$ نامیده می‌شود. (با مقدار ویژهٔ p اشتباه نشود که معمولاً به t وابسته است)، آنچه مهم است این است که موجود بودن عدد مشخصه $\mu=1$ نتیجه می‌دهد که سیستم یک