دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

کران‌های برنامه‌ریزی نیمه‌معین برای پهنای باند گراف

استاد راهنما

دکتر محمدرضا پیغامی

نگارش

مینا لطفی

آذر ماه ۱۳۹۱

به نام آن که کز همه دوست‌تر می‌دارمش،

سبزتر می‌دانمش

و خدا می‌خوانمش...

قدردانی

سپاس و ستایش خداوندی را که با لطف و عنایت او در این راه گام نهادم و هر آنچه انگیزش و پویش بوده و هست به خواست و یاری اوست و بی توفیق او نخواهد بود.

شایسته است از استاد فرهیخته و بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمدرضا پیغامی که با راهنمایی های ارزنده و بی دریغ، بنده را در تهیه و نگارش این پایان نامه یاری نموده اند، سپاسگزاری نمایم.

با آرزوی توفیق روزافزون برای ایشان

مینا لطفی

اگر شایسته باشد، تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که ترانه زندگی را دلسوزانه برایم زمزمه کردند.

چکیده

مسئله پهنای باند گراف یک مسئله NP-کامل است. اگر G را گرافی ساده و بدون جهت با مجموعه رئوس V شامل n عضو در نظر بگیریم هدف از مسئله پهنای باند گراف، یافتن نگاشتی به صورت $\phi : V \longrightarrow \{۱ \ldots n\}$ است که در آن بیشترین فاصله بین دو رأس مجاور مینیمم شود. هر چند برای خانواده خاصی از گراف ها الگوریتم های شناخته شده‌ای وجود دارد که می تواند مقدار دقیق این مسئله را در زمان چندجمله‌ای محاسبه کند، اما در حالت کلی بدست آوردن یک تقریب ثابت برای این مسئله کاری دشوار است. در این پایان نامه، دو کران جدید برای مسئله پهنای باند گراف که اخیراً در ادبیات موضوع ارائه شده است، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این کران ها بر اساس آزادسازی نیمه معین مسئله تخصیص درجه دوم بدست می آیند. بررسی‌های عددی نشان می‌دهند که این کران‌های پیشنهادی در مقایسه با کران‌های موجود نتایج بهتری را فراهم می‌کند.

کلمات کلیدی: پهنای باند گراف، پهنای باند دوری، برنامه ریزی نیمه معین، مسئله تخصیص درجه دوم.

فهرست مطالب

پیشگفتار یآ

۱ نمادگذاری‌ها و تعریف‌ها ۱

۱.۱ نمادگذاری‌ها ۱

۲.۱ تعاریف اولیه ۱

۳.۱ مسائل مخروطی اولیه و دوگان ۸

۴.۱ مسئله پهنای باند گراف ۱۰

۲ مسئله تخصیص درجه دوم ۱۱

۱.۲ مسئله تخصیص درجه دوم ۱۱

۲.۲ آزادسازی نیمه معین ژاو و همکاران ۱۴

۱.۲.۲ آزادسازی لاگرانژی ۱۶

۲.۲.۲ هندسه آزادسازی ۲۰

۳.۲.۲ آزادسازی SDP تصویر شده ۲۲

۴.۲.۲ عملگر گانگستر ۲۳

۵.۲.۲ عملگر گانگستر و قیود زائد ۲۵

۶.۲.۲ قیود نامعادله ۲۷

۳.۲ مسئله تخصیص درجه دوم به صورت یک مسئله هم‌مثبت ۲۸

۱.۳.۲ یک دنباله از آزادسازی‌های SDP برای مسئله QAP ۳۰

۴.۲ نتایج عددی ۳۲

۳ مسئله پهنای باند گراف ۳۳

۱.۰.۳ نتایج پهنای باند bw برای خانواده‌ای از گراف‌ها ۳۴

۱.۳ بیان مسئله پهنای باند به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی ۳۸

۱.۱.۳ بیان bw_{NLP} به صورت یک مسئله نیمه معین ۴۱

۲.۳ کران پایین برای مسئله پهنای باند گراف ۴۲

۱.۲.۳ مسئله مینیمم برش ۴۲
۲.۲.۳ بیان مسئله MCP به صورت یک مسئله مخروطی ۴۳
۳.۲.۳ آزادسازی طیفی به صورت یک مسئله نیمه معین ۴۶
۴.۲.۳ دنباله جدیدی از آزادسازی‌ها برای مسئله MCP ۴۷
۳.۳ کران پایین مسئله پهنای باند با استفاده از مسئله مینیمم برش ۴۹

۴ آزادسازی تخصیص درجه دوم مسئله پهنای باند ۵۲
۱.۴ بیان مسئله پهنای باند به صورت یک مسئله تخصیص درجه دوم ۵۲
۲.۴ کران $\mathrm{bw_{ZKRW}}$ برای مسئله پهنای باند گراف ۵۶
۳.۴ بهره‌برداری از تقارن در مسئله SDP ۵۶
۴.۴ نتایج کلی ۵۸
۵.۴ تقارن آزادسازی نیمه معین مسئله QAP ۶۰
۶.۴ آزادسازی $\mathrm{bw_{dKS}}$ برای مسئله پهنای باند گراف ۶۱
۷.۴ مسئله تخصیص درجه دوم با یک بعد کمتر ۶۲
۸.۴ کران مسئله نیمه معین QAP با یک بعد کمتر ۶۵
۹.۴ معادل بودن $\gamma_{r,s}$ با آزادسازی نیمه معین QAP با یک بعد کم تر ۶۶
۱۰.۴ آزادسازی نیمه معین مسئله تخصیص درجه دوم با استفاده از اسکیم‌های شرکت‌پذیر . ۶۹
۱.۱۰.۴ اسکیم‌های شرکت‌پذیر ۶۹
۲.۱۰.۴ گراف و اسکیم شرکت‌پذیر ۷۰
۳.۱۰.۴ بردارهای ویژه یک اسکیم شرکت‌پذیر ۷۱
۴.۱۰.۴ آزادسازی نیمه معین اسکیم شرکت‌پذیر ۷۲
۵.۱۰.۴ آزادسازی نیمه معین از مسائل ترکیبیاتی ۷۲
۶.۱۰.۴ آزادسازی نیمه معین پیکربندی‌های مرتبط ۷۴
۷.۱۰.۴ آزادسازی مسئله تخصیص درجه‌ی دوم از طریق پیکربندی‌های مرتبط . . . ۷۸
۱۱.۴ تنگی کران $\mathrm{bw_{ZKRW}}$ ۸۲
۱.۱۱.۴ مسیرها ۸۲
۲.۱۱.۴ دورها ۸۲
۳.۱۱.۴ گراف کامل دوبخشی ۸۳

۵ نتایج عددی ۸۹
۱.۵ پهنای باند دوری گراف ۹۰
۱.۱.۵ کاهش آزادسازی نیمه معین γ_{ZKRW} برای مسئله پهنای باند دوری گراف . ۹۱
۲.۵ نتایج محاسباتی ۹۲

مراجع ۹۵
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۹
چکیده انگلیسی ۱۰۱

فهرست تصاویر

۱.۳ گراف مسیر ۳۴
۲.۳ برچسب‌گذاری دور C_n ۳۵
۳.۳ برچسب‌گذاری دور C_n ۳۵
۴.۳ گراف‌های کاترپیلر با طول رشته یک و طول رشته دو ۳۷

فهرست جداول

۱.۳ MCP و آزادسازی روی خانواده‌ای از گراف‌ها ۴۸

۱.۴ جواب بهینه مسائل esc ۶۹

۱.۵ وضعیت کران ها در گراف های مختلف ۸۹
۲.۵ کران‌های پهنای باند درخت kـسطحtـتایی کامل ۹۲
۳.۵ زمان‌های محاسباتی کران‌ها برای درخت kـسطح tـتایی کامل ۹۳
۴.۵ کران‌های پهنای باند شبکه مستطیلی $P_n \times P_m$ ۹۳
۵.۵ زمان محاسباتی کران‌ها برای شبکه مستطیلی $P_n \times P_m$ ۹۳
۶.۵ کران‌های پهنای باند گراف مکعب Q_n ۹۴
۷.۵ زمان محاسباتی کران‌ها برای گراف مکعب Q_n ۹۴

پیشگفتار

مسئله پهنای باند گراف در سال ۱۹۵۰ هنگامی که پژوهشگران قصد داشتند زمان و حافظه لازم برای حل یک دستگاه معادلات خطی تنک $(Ax = b)$ با اندازه بزرگ را کاهش دهند، بیان شد. آن‌ها در جستجوی یک ماتریس جایگشت A' از A بودند که همه عناصر غیرصفر آن تا حد امکان به قطر اصلی نزدیک باشد. این نتایج منجر به فرموله شدن مسئله‌ای گردید که آن را پهنای باند گراف می‌نامند. فرض کنید G یک گراف ساده و بدون جهت با مجموعه رئوس V با $|n| = V$ و مجموعه یال‌های E است. یک نگاشت دو سویی $\varphi : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ یک برچسب برای رأس‌های گراف نامیده می‌شود. پهنای باند این برچسب $\mathrm{bw}(G, \varphi) = \max_{uv \in E} |\varphi(u) - \varphi(v)|$ تعریف می‌شود. مسئله پهنای باند یک گراف بدست آوردن مینیمم $\mathrm{bw}(G, \varphi)$ روی همه برچسب‌های گراف است به عبارت دیگر، پهنای باند گراف G برابر است با:

$$\mathrm{bw}(G) = \min_{\varphi}\{\mathrm{bw}(G, \varphi) | \text{باشد } G \text{ یک برچسب برای گراف } \varphi\}$$

مسئله پهنای باند گراف دارای کاربردهای فراوانی است که از آن جمله می‌توان به حل دستگاه‌های خطی بزرگ،طراحی VLSI[1] و محاسبات موازی اشاره کرد(برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مرجع [۲۶] مراجعه کنید).

اگر چه مسئله پهنای باند گراف را می‌توان برای خانواده‌ی خاصی از گراف‌ها در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد، امّا پاپا دیمتریو[2] در [۱] نشان داد این مسئله از رده مسائل NP_کامل می‌باشد. با توجه به اهمیّت مسئله پهنای باند، الگوریتم‌های فراوانی توسط افراد مختلف برای حل این مسئله ارائه شده‌اند که تقریباً در همه‌ی آن‌ها یافتن یک کران تنگ در زمان چندجمله‌ای برای این مسئله مورد نظر است. یک کران برای مسئله پهنای باند توسط بلوم[3] و همکاران در [۲۷] معرفی گردید.آن‌ها با نشاندن رأس های گراف در فضای $\mathbb{R}^n$ یک کران پایین برای این مسئله بدست آوردند. رندل[4] و همکاران در [۲۲] نیز نشان دادند اگر مقدار بهینه مسئله مینیمم برش مثبت باشد آن‌گاه می‌توان یک کران پایین برای مسئله پهنای باند بدست آورد. دیگر کران ارائه شده برای مسئله پهنای باند توسط دکلرک[5]و همکاران در [۱۹] معرفی شد. آن‌ها با استفاده از این حقیقت که هر ماتریس مجاورت، یک برچسب برای رئوس گراف ارائه می‌کند، دو کران جدید بر اساس آزادسازی نیمه معین مسئله تخصیص درجه دوم برای مسئله پهنای باند گراف ارائه کردند و نشان دادند این کران‌ها در مقایسه با دو کران قبلی نتایج عددی

[1] Very-large-scale integration

[2] Papadimitriou

[3] Blum

[4] Rendl

[5] de Klerk

بهتری را فراهم می‌کند.
دراین پایان‌نامه به بررسی ویژگی‌های آزادسازی نیمه معین صورت گرفته در [۱۹] برای مسئله پهنای باند گراف می‌پردازیم. برای این منظور ، ساختار فصل های پایان نامه را به ترتیب زیر داریم:
در فصل اول، مفاهیم پایه‌ای و تعاریف مورد نیاز شرح داده می‌شود.
در فصل دوم به بیان مسئله تخصیص درجه دوم و آزادسازی‌های نیمه معین صورت گرفته برای این مسئله پرداخته می‌شود.
در فصل سوم، ابتدا خلاصه ای از کارهای انجام شده بر روی مسئله پهنای باند گراف را ارائه می‌کنیم، سپس دو کران معرفی شده توسط بلوم و همکاران و رندل و همکاران بیان می‌شود.
در فصل چهارم، مسئله پهنای باند گراف به صورت یک مسئله تخصیص درجه دوم فرمول‌بندی می شود. سپس با استفاده از آزادسازی نیمه معین مسئله تخصیص، دو کران جدید برای مسئله پهنای باند گراف معرفی می‌شود. نشان داده می‌شود که دو کران جدید برای گراف‌های دوبخشی کامل و دورها و مسیرها کران‌های تنگ می‌باشند.
در فصل پنجم نیز نتایج عددی را برای نشان دادن برتری کران‌های [۱۹] در مقایسه با کران‌های ارائه شده در [۲۲]و [۲۷] ، برای درخت k ـسطح t ـتایی کامل ، شبکه مستطیلی و مکعب‌ها ارائه می‌کنیم.

فصل ۱

نمادگذاری‌ها و تعریف‌ها

در این فصل، نمادگذاری‌ها، تعاریف و قضایای اولیه را که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم.

۱.۱ نمادگذاری‌ها

فضای ماتریس‌های حقیقی از مرتبه $n \times m$ را با $\mathbb{R}^{n\times m}$ و فضای ماتریس‌های متقارن را با S_n نمایش می‌دهیم. بردارها، اسکالرها و اندیس‌ها را با حروف کوچک و ماتریس‌ها با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند. iامین درایه بردار $x \in R^n$ را با x_i نشان می‌دهیم و به طور مشابه (i,j)امین درایه ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ را با a_{ij} نمایش می‌دهیم. از نماد $A_{:,t:j}$ برای بیان ستون های tام تا jام ماتریس A و $A_{i:s,:}$ را برای بیان سطرهای iام تا sام ماتریس A استفاده می‌کنیم. اگر همه درایه‌های یک ماتریس مربعی از مرتبه n یک باشد آن را با J_n و اگر همه درایه‌ای آن صفر باشد آن را با O_n نمایش می‌دهیم. هم‌چنین نمادگذاری اخیر را برای ماتریس‌های از مرتبه $n \times m$ نیز به کار می‌بریم. در این صورت، $J_{n\times m}$ به ماتریس از مرتبه $n \times m$ اشاره می‌کند که در آن همه درایه ها یک است و $O_{n\times m}$ نشان دهنده ماتریس صفر از مرتبه $n \times m$ است. از نماد u_n برای نمایش بردار با مؤلفه‌های یک استفاده می‌کنیم و o_n را برای بیان بردار صفر از مرتبه n به کار می‌بریم. e_i را بردار یکه استاندارد با درایه iام برابر یک در نظر می گیریم. هم‌چنین، $E_{ij} = e_i e_j$.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. (**عملگر قطری** [۱۹]) عملگر $\mathrm{Diag}(x)$ یک بردار x از مرتبه n را به یک ماتریس قطری از مرتبه $n\times n$ می‌نگارد. عملگر $\mathrm{diag}(A)$ برداری است که از عناصر قطری ماتریس A ، بدست می آید.

به عبارت دیگر برای بردار $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ عملگر Diag به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Diag}(x) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

و برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ داریم

$$\mathrm{diag} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$
$$\mathrm{diag}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

تعریف ۲.۲.۱. (**قطر گراف** [۳۱]) اگر $G(V,E)$ یک گراف با مجموعه رأس‌های V باشد، آن‌گاه برای هر دو رأس دلخواه $u, v \in V$ طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس v و u فاصله دو رأس نامیده شده و با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود. بیشترین فاصله بین رأس‌های گراف را قطر گراف می‌نامند و با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۲.۱. (**ماتریس مجاورت** [۲۹]) فرض کنید G یک گراف غیر جهت دار و بدون وزن با مجموعه رأس‌های V با $|V| = n$ است. در این صورت، ماتریس مجاورت این گراف را با $A_{n\times n}$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر بین رأس } i\text{ام و رأس } j\text{ام یالی وجود داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۴.۲.۱. (**ماتریس لاپلاسی گراف** [۲۰]) فرض کنید G گراف با مجموعه رأس‌های V با $|V| = n$ و ماتریس مجاورت A است. در این صورت، ماتریس لاپلاسی گراف G به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$L(G) = \mathrm{Diag}(r(A)) - A$$

که در آن $r(A) = Au_n$ می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۱. (**عملگر برداری** [۳۸]) برای یک ماتریس X، عملگر برداری این ماتریس را با $\mathrm{vec}(X)$ نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{vec}(X) \ : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n}$$
$$\mathrm{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_{۱۱} \\ x_{۲۱} \\ \vdots \\ x_{n۱} \\ x_{۱۲} \\ \vdots \\ x_{n۲} \\ \vdots \\ x_{۱n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

تعریف ۶.۲.۱. (**ماتریس ذوزنقه** [۲۸]) هر ماتریس مربعی به فرم کلی زیر ماتریس ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{۰} & a_{-۱} & a_{-۲} & \dots & a_{-n+۱} \\ a_{۱} & a_{۰} & a_{-۱} & \ddots & \vdots \\ a_{۲} & a_{۱} & a_{۰} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & & \vdots & \\ a_{n-۱} & \dots & a_{۲} & a_{۱} & a_{۰} \end{bmatrix}$$

اگر عناصر ماتریس ذوزنقه را با A_{ij} نمایش دهیم، آن‌گاه داریم:

$$A_{ij} = A_{i+۱,j+۱} = a_{i-j}$$

تعریف ۷.۲.۱. (**اسکیم های شرکت‌پذیر** [۱۸]) مجموعه ماتریس‌های دودویی $\{A_0, ..., A_d\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند را یک اسکیم شرکت‌پذیر می‌نامند.

۱. $A_0 = I,\ A_0 + \cdots A_d = J$

۲. $A_i^T \in \{A_0, ..., A_d\},\ i = 1, 2, ..., d$

۳. $A_iA_j = A_jA_i,\ i, j = 0, 1, ..., d$

۴. $A_iA_j \in \text{span}\{A_0, ..., A_d\},\ \ i, j = 0, ..., d$

اسکیم شرکت‌پذیر $\{A_0, \ldots, A_d\}$ ، d کلاس دارد. اگر در اسکیم شرکت‌پذیر همه‌ی ماتریس‌های A_i متقارن باشند به آن اسکیم شرکت پذیر متقارن می‌گویند.
لازم به ذکر است در سراسر این پایان نامه اسکیم‌های شرکت پذیر متقارن مورد نظر هستند.

تعریف ۸.۲.۱. (**حامل**) [۳۹] حامل بردار $x \in \mathbb{R}^n$، مجموعه‌ی اندیس‌های درایه‌های غیر صفر این بردار تعریف می‌کنند و با $\text{supp}\,(x)$ نمایش می‌دهند. پس

$$\text{supp}\,(x) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_i \neq 0\}$$

برای ماتریس $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$، این مفهوم به‌صورت زیر تعمیم داده می‌شود:

$$\text{supp}\,(X) = \cup_j \,\text{supp}\,(X_{:,j})$$

تعریف ۹.۲.۱ (**عملگر اثر** [۱۳]). مجموع درایه‌های قطری یک ماتریس مربعی مانند $A_{n\times n}$ اثر یک ماتریس نامیده می‌شود و با نماد $\text{tr}\,(A)$ نشان داده می‌شود. پس

$$\text{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. (**ضرب داخلی ماتریس‌ها** [۱۳]) دو ماتریس حقیقی A, B از مرتبه $n \times m$ را در نظر بگیرید، ضرب داخلی این دو ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}\,(A^TB) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$$

تعریف ۱۱.۲.۱. (**ضرب مؤلفه‌ای ماتریس‌ها** [۳۸]) ضرب هادامارد یا مؤلفه‌به‌مؤلفه دو ماتریس

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \circ B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}$$

تعریف ۱۲.۲.۱ **(ضرب کرونکر** [۱۳]). برای دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$ ضرب کرونکر این دو ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{rn\times sm}$$

ضرب کرونکر دارای ویژگی‌های زیر است که در این پایان نامه از آن به دفعات استفاده شده است.

۱) $(A\otimes B)(U\otimes V) = AU \otimes BV$

۲) $\mathrm{vec}(AYB) = (B^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(Y)$

۳) $(A\otimes B)^T = A^T \otimes B^T$

تعریف ۱۳.۲.۱. **(مقادیر ویژه و بردارهای ویژه** [۳۳]) برای ماتریس مربعی $A_{n\times n}$، هرگاه متناظر بردار غیر صفر x عددی مانند λ موجود باشد به طوری که $Ax = \lambda x$ در این صورت x را بردار ویژه ماتریس A و λ را مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه x می‌نامند.

تعریف ۱۴.۲.۱. **(مجموعه محدب** [۳۴]) مجموعه C محدب است هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \lambda \in [0, 1], (1-\lambda)x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$$

تعریف ۱۵.۲.۱. **(پوسته آفینی** [۳۴]) فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$ باشد در این صورت، مجموعه همه ترکیبات آفینی متناهی نقاط در S را پوسته آفینی S می نامند و با $\mathrm{aff}(S)$ نمایش می‌دهند. پس

$$\mathrm{aff}(S) = \{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i : x_i \in S \quad \text{for} \quad i \in \{1, \ldots, d\}, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1, d \geq 1\}$$

تعریف ۱۶.۲.۱ **(پوسته محدب** [۳۴]). برای $S \subset \mathbb{R}^n$، کوچکترین مجموعه محدب شامل S را پوسته محدب S می‌نامند. در واقع، پوسته محدبS، اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل S است. نشان

داده می‌شود که پوسته محدب S، یعنی $conv(S)$، عبارت است از:

$$conv\,(S) = \{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i : x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \quad \text{for} \quad i \in \{1, \dots, d\}, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1, d \geq 1\}$$

تعریف ۱.۲.۱۷ (**درون نسبی**[1] [۴۰]). درون نسبی مجموعه S با $relint(S)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{relint}(S) = \{x \in S \quad | \quad \exists \ \epsilon > 0, N_\epsilon(x) \cap \text{aff}(S) \subseteq S\}$$

که در آن $N_\epsilon(x)$ یک گوی به شعاع ϵ به مرکز x است.

تعاریف ومطالبی که در ادامه ارائه می‌شوند از مراجع [۱۳، ۴۲] آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱۸ (**ماتریس معین مثبت**). اگر ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ به ازای همه‌ی بردارهای غیر صفر $x \in \mathbb{R}^n$ در رابطه $x^T Ax \geq 0$ صدق کند آن‌گاه این ماتریس را یک ماتریس نیمه معین مثبت می نامند. حال، اگر در رابطه اخیر نامساوی اکید باشد، یعنی $x^T Ax > 0$ برای هر $x > 0$، آن‌گاه ماتریس A را ماتریس معین مثبت می‌نامند. در ادامه، اگر A نیمه معین مثبت باشد از نماد $A \succeq 0$ و اگر معین مثبت باشد از نماد $A \succ 0$ استفاده می‌نماییم.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنید K یک زیرمجموعه ناتهی از فضای برداری V با ضرب داخلی است. گوییم K یک مخروط است هرگاه برای هر $x \in K$ و هر $\lambda \geq 0$، داشته باشیم $\lambda x \in K$. مخروط K محدب نامیده می‌شود هرگاه تحت عمل جمع بسته باشد، یعنی

$$x, y \in K \Rightarrow x + y \in K$$

همچنین،مخروط K را نوک‌دار می‌نامیم هرگاه $K \cap -K = \{0\}$. اگر درون مخروط K ناتهی باشد، یعنی $intK \neq \emptyset$، در این صورت گوییم K یک مخروط توپر است.
دوگان مخروط K نیز یک مخروط است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K^* = \{x^* \in V : \langle x, x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$$

اگر $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مخروط محدب، بسته، نوک‌دار و توپر باشد آن‌گاه $K^* \subset \mathbb{R}^n$ نیز یک مخروط محدب بسته ، نوک‌دار و توپر است و داریم $(K^*)^* = K$.

---

[1] Interior Relative

تعریف ۲۰.۲.۱ (مخروط نامنفی). مخروط نامنفی متقارن دارای فرم کلی زیر است:

$$N_n = \{X \in S_n \mid x_{ij} \geq 0, \forall i, j\}$$

$\mathbb{R}_n^+$ مثالی از مخروط‌های نامنفی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad x \geq 0\}$$

که در آن، رابطه $x \geq 0$ بدین معنی است که برای هر $1 \leq i \leq n$ ،$x_i \geq 0$.

تعریف ۲۱.۲.۱ (مخروط معین مثبت). مجموعه همه ماتریس‌های نیمه معین مثبت یک مخروط را به وجود می‌آورند که آن را مخروط نیمه معین مثبت می‌نامند و با نماد S_n^+ نشان می‌دهند:

$$S_n^+ := \{A \in S_n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; x^T A x \geq 0\}$$

اگر در مجموعه فوق ماتریس‌های نیمه معین مثبت با ماتریس‌های معین مثبت جایگزین گردد آن‌گاه مجموعه حاصل مخروط معین مثبت است و با نماد S_n^{++} نمایش داده می‌شود.

$$S_n^{++} = \{A \in S_n \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; x^T A x > 0\}$$

قضیه ۲۲.۲.۱. برای $A \in S_n$ ، روابط زیر معادلند:

۱. $A \in S_n^+$

۲. $\lambda_{\min}(A) \geq 0$

۳. یک ماتریس B وجود دارد به طوری که $A = B^T B$

۴. برای هر زیرماتریس اصلی $(A_{II} = ([a_{ij}]_{i,j \in I}, I \subseteq \{1, \ldots, n\})$ ، داریم $\det A_{II} \geq 0$.

لم ۲۳.۲.۱. برای هر ماتریس $A \in S_n^+$ ، روابط زیر برقرارند:

۱. $i \in \{1, \ldots, n\}$ وجود دارد به طوری که $a_{ii} = \max\{|a_{ij}|, i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$.

۲. اگر برای یک اندیس i داشته باشیم $a_{ii} = 0$، آن‌گاه $A_{i,:} = A_{:,i} = 0$.

لم ۲۴.۲.۱. اگر برای هر ماتریس نیمه معین مثبت B داشته باشیم $\langle A, B \rangle \geq 0$ ، آن‌گاه A نیز یک ماتریس نیمه‌معین مثبت است.

تعریف ۲۵.۲.۱ (ماتریس‌های هم‌مثبت). ماتریس متقارن $A \in S_n$ هم‌مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \geq 0$، داشته باشیم $x^T Ax \geq 0$. ماتریس A هم‌مثبت اکید است هرگاه برای هر $x > 0$، داشته باشیم: $x^T Ax > 0$.

تعریف ۲۶.۲.۱ (مخروط هم‌مثبت). مخروط ماتریس‌های هم‌مثبت با نماد C_n نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C_n := \{A \in S^n \mid x^T Ax \geq 0,\ \forall x \geq 0\}$$

تعریف ۲۷.۲.۱ (مخروط کاملاً مثبت). مخروط ماتریس‌های کاملاً مثبت را با C_n^* نشان می‌دهند و به صورت زیر است :

$$C_n^\star = \left\{ X = \sum_{i=1}^{k} y_i y_i^T \ \ k \geq 1\ ,\ y_i \in \mathbb{R}_+^n\ ,\ \forall i = 1, \ldots, k \right\}$$

نشان داده می‌شود مخروط ماتریس‌های کاملاً مثبت، دوگان مخروط ماتریس‌های هم‌مثبت است.

۳.۱ مسائل مخروطی اولیه و دوگان

فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و $K \subset V$ یک مخروط نوک‌دار، محدب، بسته و توپر است. مسئله بهینه‌سازی مخروطی اولیه برابر است با:

$$(\mathrm{PCP}) \qquad \begin{array}{ll} \inf & \langle C, X\rangle \\ s.t & A(X) = b \\ & X \in K \end{array}$$

که در آن $C \in V$ و $b \in \mathbb{R}^m$ و $A : V \to \mathbb{R}^m$ یک عملگر خطی است که برای $1 \leq i \leq m$ و $A_i \in V$ به وسیله‌ی $A(X)_i = \langle A_i, X\rangle$ تعریف می‌شود.
دوگان لاگرانژی مسئله PCP نیز خود یک مسئله بهینه‌سازی مخروطی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(\mathrm{DCP}) \qquad \begin{array}{ll} \sup & b^T y \\ s.t & A^T(y) + S = C \\ & S \in K^* \end{array}$$