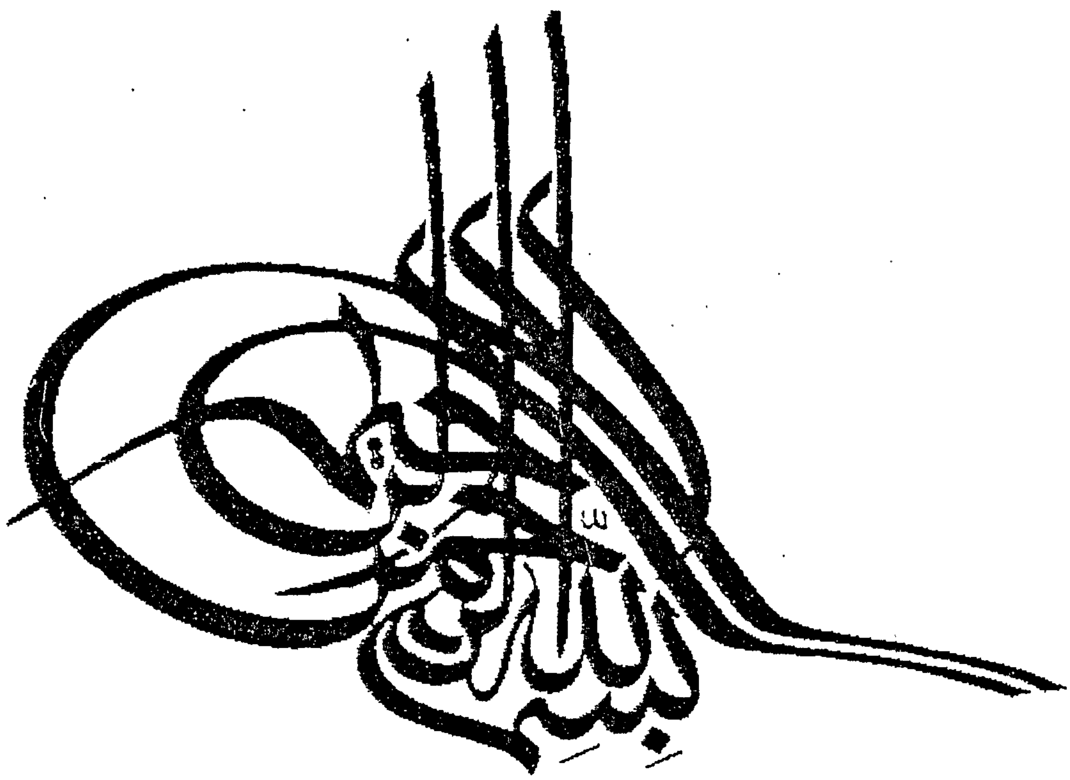
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان:

یک الگوریتم پایا برای حل مسائل مقدار مرزی انتگرال-دیفرانسیل مرتبه بالاومعادلات دیفرانسیل معمولی

استاد راهنما:
دکتر پرویز سرگلزایی

تحقیق و نگارش:
عبدالرحمان یعقوبی

دی ۱۳۸۶

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان یک الگوریتم پایا برای حل مسائل مقدار مرزی انتگرال-دیفرانسیل مرتبه بالا و معادلات دیفرانسیل معمولی قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی توسط دانشجو عبدالرحمان یعقوبی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر پرویز سرگلزایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

عبدالرحمان یعقوبی

این پایان نامه ۶ واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ **۸۶/۱۰/۲۳** توسط هیئت داوران بررسی و درجه عالی..... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
۱- استاد را هنما:	دکتر پرویز سرگلزایی		
۲- داور ۱:	دکتر علیرضا سهیلی		
۳- داور ۲:	دکتر مرتضی سنجرانی پور		
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر رحمت الله لشکری پور		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب عبدالرحمان یعقوبی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

عبدالرحمان یعقوبی

امضاء

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

همسر فداکارم

و همه دوستداران علم و دانش

سپاسگزاری

با حمد وسپاس فراوان به درگاه خداوند متعال که به بنده حقیر سعادت تلاش و کوشش در راه کسب علم ودانش را عنایت فرمود. امیدوارم با یاری حق تعالی آنچه را فرا گرفته ام در راه رضای او و پیشرفت کشورم بکارگیرم. جا دارد که دراینجااز تمامی افرادی که در تهیه و تکمیل این پایان نامه مرا یاری نمودند نهایت تشکر و قدردانی را بنمایم، از استاد راهنمای بزرگوار خود جناب آقای دکتر پرویز سرگلزایی و اساتید بزرگوارم جناب آقای دکترعلیرضا سهیلی و جناب آقای دکتر مرتضی سنجرانی پور که زحمت داوری این پایان نامه را قبول نمودند وجناب آقای دکتررحمت الله لشکری پور کمال تشکر را دارم. همچنین از همسرفداکارم که مشوق من بودند بسیار متشکرم.

از دوست عزیزم آقای باقر مرادی و مسئولین محترم سایت دانشکده ریاضی آقایان مصطفی ریگی و حسینعلی ریگی و تمام دوستانی که در تهیه این پایان نامه به نوعی مرا یاری نمودند نیز تشکر و قدردانی می نمایم.

چکیده:

اصولا"هر پدیده فیزیکی پس از مدلسازی به یک معادله دیفرانسیل و یا به یک معادله انتگرال- دیفرانسیل غالبا" غیرخطی تبدیل می شود که حل آن با روشهای کلاسیک بسیار مشکل و یا حتی غیر ممکن است. بنابراین باید بدنبال روشهایی برای حل اینگونه مسائل باشیم. یکی از روشهای عددی که قادر است معادلات خطی وغیرخطی پیچیده را به راحتی حل نماید روش تجزیه آدومیان می باشد. در این پایان نامه طریقه کاربرد این روش برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل معمولی را شرح خواهیم داد و پیرامون همگرایی و مقایسه آن با روشهای عددی دیگر بحث خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: چندجمله ایهای آدومیان - معادلات انتگرال-دیفرانسیل – معادلات دیفرانسیل معمولی – همگرایی.

فهرست مندرجات

فصل ۱

چند جمله‌ایهای آدومیان

مقدمه

روش تجزیه آدومیان از لحاظ محاسباتی یک روش ساده می‌باشد تنها مشکل آن محاسبه چندجمله‌ایهای آدومیان برای فرمهای غیرخطی است. برای محاسبه این چندجمله‌ایها مقالات زیادی ارائه شده است. [۵]، [۷]، [۱۱]، [۱۹]، [۲۲]، [۲۴]. چندجمله‌ایهای آدومیان به روشهای متعددی محاسبه می‌شوند دراین فصل روش ارائه شده در[۲۲] را بطور مفصل شرح خواهیم داد و همچنین یک فرمول که از لحاظ محاسباتی ساده‌تر است و در[۱۹] و [۲۴] ارائه شده است را خواهیم آورد.

۱−۱ ساختار روش تجزیه آدومیان

معادله زیر را در نظر بگیرید

$$Fy = g(x) \qquad 0 \leq x \leq X \qquad (۱.۱.۱)$$

که در آن g یک تابع به اندازه کافی هموار و F یک عملگر غیرخطی است که هم شامل عبارات خطی و هم شامل عبارات غیرخطی است. بخش غیرخطی Fy را با Ny وبخش خطی را با $Ly + Ry$ که Ly قسمت معکوس پذیر و Ry جملات باقیمانده بخش خطی است نشان می‌دهیم. معمولاً برای سادگی در محاسبات Ly را بزرگترین مرتبه مشتق موجود در معادله درنظر می‌گیریم. بنابراین معادله (۱.۱.۱) بصورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$Ly + Ry + Ny = g \qquad (۲.۱.۱)$$

یا بطور معادل داریم:

$$Ly = g - Ry - Ny \qquad (۳.۱.۱)$$

چون L معکوس پذیر است می‌توانیم طرفین (۳.۱.۱) را در L^{-1} ضرب کنیم

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \qquad (۴.۱.۱)$$

توجه کنید که اگر بزرگترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل n باشد آنگاه

$$L = \frac{d^n}{dx^n} \qquad \Longrightarrow \qquad L^{-1} = \int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x (.)\ dx\ dx \ldots dx$$

یعنی معکوس L یک انتگرال n—گانه خواهد بود.

بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض می‌کنیم

$$L = \frac{d^{۲}}{dx^{۲}} \qquad \Longrightarrow \qquad L^{-۱} = \int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x} (.)\ dx\ dx$$

بنابراین از (۴.۱.۱) خواهیم داشت:

$$y(x) = y(۰) + xy'(۰) + L^{-۱}g - L^{-۱}Ry - L^{-۱}Ny \qquad (۵.۱.۱)$$

در روش تجزیه آدومیان جواب معادله فوق را بصورت سری نامتناهی زیر درنظر می‌گیریم

$$y(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} y_n(x) \qquad (۶.۱.۱)$$

همچنین قسمت غیرخطی را برابر با سری

$$Ny = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n(x) \qquad (۷.۱.۱)$$

درنظر می‌گیریم که A_n ها چندجمله‌ایهای آدومیان برای عبارت غیرخطی Ny می‌باشند که در این فصل نحوهٔ محاسبه آنها را شرح خواهیم داد. حال با جایگزاری سری (۶.۱.۱) و (۷.۱.۱) در رابطه(۵.۱.۱) داریم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} y_n(x) = y(۰) + xy'(۰) + L^{-۱}g - L^{-۱}R(\sum_{n=۰}^{\infty} y_n(x)) - L^{-۱}(\sum_{n=۰}^{\infty} A_n(x)) \qquad (۹.۱.۱)$$

اکنون کافیست مولفه‌های $y_۰$، $y_۱$، ...، y_n، ... را تعیین کنیم و در رابطه (۶.۱.۱) قرار دهیم جواب معادله (۱.۱.۱) بدست می‌آید. اما با توجه به رابطه (۹.۱.۱) مؤلفه‌های جواب از روابط بازگشتی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} y_۰(x) = y(۰) + xy'(۰) + L^{-۱}g(x) \\ y_{k+۱}(x) = -L^{-۱}R(y_k)(x) - L^{-۱}(A_k)(x) \qquad k \geq ۰ \end{cases}$$

۱—۲ . محاسبه چندجمله‌ایهای آدومیان

همانطور که مشاهده کردید روش تجزیه آدومیان جواب مسئله یعنی $y(x)$ را به یک سری نامتناهی از مولفه‌های $y_n(x)$ بصورت

$$y(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} y_n(x)$$

و عبارت غیرخطی $F(y(x))$ را به

$$F(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

تجزیه می‌کند. برای محاسبه A_n ها ابتدا قضیه زیر را ارائه می‌نماییم.

قضیه ۱.۲.۱ : اگرعبارت غیرخطی $N(y(x)) = F(y(x))$ و نمایش پارامتری y(x) بصورت $y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k$ باشد که در آن λ یک پارامتر است آنگاه داریم

$$[\frac{\partial^n F(y(\lambda))}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0}$$

برهان

داریم:

$$y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k y_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k y_k$$

بنابراین

$$\begin{aligned}[\frac{\partial^n F(y(\lambda))}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} &= [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k y_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} \\ &= [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0}\end{aligned}$$

لذا

$$[\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0}$$

و لذا برهان کامل است.

اکنون فرض کنید

$$N(y(\lambda)) = F(y(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k$$

داریم:

$$F(y(\lambda)) = F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k \qquad (۱.۲.۱)$$

برای بدست آوردن A_n از طرفین (۱.۲.۱) n بار نسبت به λ مشتق می گیریم و قرار می‌دهیم $\lambda = 0$ یعنی

$$[\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k)}{\partial \lambda^n}]_{\lambda=0}$$

بنا به قضیه (۱.۲.۱) داریم:

$$[\frac{\partial^n F(y(\lambda))}{\partial\lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k y_k)}{\partial\lambda^n}]_{\lambda=0}$$

و

$$[\frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k)}{\partial\lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A_k)}{\partial\lambda^n}]_{\lambda=0}$$

لذا خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial^n F(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k y_k)}{\partial\lambda^n}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^n (\sum_{k=0}^{n}\lambda^k A_k)}{\partial\lambda^n}]_{\lambda=0} \qquad (۲.۲.۱)$$

بنابراین اگر قرار دهیم: $n = 0, 1, ..., k$ آنگاه A_0، A_1، ...، A_k بدست می‌آید.

دراین قسمت با چند مثال چندجمله‌ایهای آدومیان را برای فرمهای غیرخطی مختلف محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۱ : فرض کنید $F(y) = y^2$ چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با $F(y)$ را بدست آورید.

داریم:

$$y(\lambda) = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4 + \lambda^5 y_5 + \ldots$$

از (۱.۲.۱) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k = (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4 + \lambda^5 y_5 + \ldots)^2 \qquad (۳.۲.۱)$$

با قرار دادن $\lambda = 0$ بدست می‌آوریم: $A_0 = y_0^2$

اگراز طرفین (۳.۲.۱) یک بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه با استفاده از (۲.۲.۱) خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial(A_0 + \lambda A_1)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial(y_0 + \lambda y_1)^2}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل این معادله نسبت به A_1 بدست می‌آوریم: $A_1 = 2y_0 y_1$

اگراز طرفین (۳.۲.۱) دو بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial^2(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^2(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)^2}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0}$$

با حل معادله فوق نسبت به A_2 بدست می‌آوریم: $\quad A_2 = 2y_1^2 + 4y_0y_2$

به همین صورت A_3، A_4 و A_5 را بدست می‌آوریم:

$$[\frac{\partial^3(A_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2+\lambda^3A_3)}{\partial^3\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^3(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\lambda^3y_3)^2}{\partial^3\lambda}]_{\lambda=0}$$

با حل نسبت به A_3 خواهیم داشت : $\quad A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$

$$[\frac{\partial^4(A_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2+\lambda^3A_3+\lambda^4A_4)}{\partial^4\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial^4(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\lambda^3y_3+\lambda^4y_4)^2}{\partial^4\lambda}]_{\lambda=0}$$

لذا $\quad A_4 = 2y_0y_4 + y_2^2 + 2y_1y_3$

$$[\frac{\partial^5(A_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2+\lambda^3A_3+\lambda^4A_4+\lambda^5A_5)}{\partial^5\lambda}]_{\lambda=0} =$$
$$[\frac{\partial^5(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\lambda^3y_3+\lambda^4y_4+\lambda^5y_5)^2}{\partial^5\lambda}]_{\lambda=0}$$

در نتیجه $\quad A_5 = 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3$

با ادامه این روند می‌توانیم A_6، A_7 و ... را بدست آوریم.

بنابراین چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با $F(y) = y^2$ بصورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} A_0 = y_0^2 \\ A_1 = 2y_0y_1 \\ A_2 = 2y_1^2 + 4y_0y_2 \\ A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2 \\ A_4 = 2y_0y_4 + y_2^2 + 2y_1y_3 \\ A_5 = 2y_0y_5 + 2y_1y_4 + 2y_2y_3 \\ \vdots \end{cases}$$

مثال ۲.۲.۱ : فرض کنید $F(y) = sin\ y + sin^2y\ cos^2y$ چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با آنرا بدست آورید.

داریم:

$$y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k$$

با توجه به رابطه (۱.۲.۱) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^kA_k = sin(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^ky_k) + sin^2(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^ky_k)cos^2(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^ky_k) \qquad (۴.۲.۱)$$

با قرار دادن $\lambda = 0$ بدست می‌آوریم:

$$A_0 = \sin y_0 + \sin^2 y_0 \cos y_0$$

اگراز طرفین (۴.۲.۱) یک بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه با استفاده از (۲.۲.۱) خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial(A_0 + \lambda A_1)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial(\sin(y_0 + \lambda y_1) + \sin^2(y_0 + \lambda y_1)\cos^2(y_0 + \lambda y_1))}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}$$

با حل این معادله نسبت به A_1 بدست می‌آوریم:

$$A_1 = y_1 \cos y_0 + 2y_1 \sin y_0 \cos^2 y_0 - 2y_1 \sin^3 y_0 \cos y_0$$

برای محاسبه A_2 داریم:

$$[\frac{\partial^2(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0} =$$
$$[\frac{\partial^2(\sin(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2) + \sin^2(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)\cos^2(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2))}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل آن نسبت به A_2 بدست می‌آوریم:

$$A_2 = -\frac{1}{2}y_1^2 \sin y_0 + y_2 \cos y_0 + y_1^2 \cos^4 y_0 - 6y_1^2 \sin^2 y_0 \cos^2 y_0$$
$$+2y_2 \sin y_0 \cos^3 y_0 + y_1^2 \sin^4 y_0 - 2y_2 \sin^3 y_0 \cos y_0$$

بطور مشابه A_3 نیز بدست می‌آید.

$$A_3 = -\frac{1}{6}y_1^3 \cos y_0 - y_1 y_2 \sin y_0 + y_3 \cos y_0 - \frac{16}{3}y_1^3 \cos^3 y_0 \sin y_0$$
$$+2y_1 y_2 \cos^4 y_0 + \frac{16}{3}y_1^3 \sin^3 y_0 \cos y_0 - 12y_1 y_2 \sin^2 y_0 \cos^2 y_0$$
$$+2y_3 \sin y_0 \cos^3 y_0 + 2y_1 y_2 \sin^4 y_0 - 2u_3 \sin^3 y_0 \cos y_0$$

با ادامه این روند می‌توانیم A_4، A_5 و ... را بدست آوریم.

بنابراین چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با $F(y) = \sin y + \sin^2 y \cos^2 y$ بصورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} A_0 = \sin y_0 + \sin^2 y_0 \cos y_0 \\ A_1 = y_1 \cos y_0 + 2y_1 \sin y_0 \cos^3 y_0 - 2y_1 \sin^3 y_0 \cos y_0 \\ A_2 = -\frac{1}{2}y_1^2 \sin y_0 + y_2 \cos y_0 + y_1^2 \cos^4 y_0 - 6y_1^2 \sin^2 y_0 \cos^2 y_0 \\ \quad +2y_2 \sin y_0 \cos^3 y_0 + y_1^2 \sin^4 y_0 - 2y_2 \sin^3 y_0 \cos y_0 \\ A_3 = -\frac{1}{6}y_1^3 \cos y_0 - y_1 y_2 \sin y_0 + y_3 \cos y_0 - \frac{16}{3}y_1^3 \cos^3 y_0 \sin y_0 \\ \quad +2y_1 y_2 \cos^4 y_0 + \frac{16}{3}y_1^3 \sin^3 y_0 \cos y_0 - 12y_1 y_2 \sin^2 y_0 \cos^2 y_0 \\ \quad +2y_3 \sin y_0 \cos^3 y_0 + 2y_1 y_2 \sin^4 y_0 - 2y_3 \sin^3 y_0 \cos y_0 \\ \vdots \end{cases}$$

مثال ۳.۲.۱ : فرض کنید $F(y)=e^{-sin^2\frac{y}{2}}$ چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با آنرا بدست آورید.

داریم:

$$y(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k$$

با توجه به رابطه (۱.۲.۱) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k A_k=e^{-sin^2(\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_k}{2})} \qquad (۵.۲.۱)$$

با قرار دادن $\lambda=0$ بدست می‌آوریم:

$$A_0=e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}$$

اگراز طرفین (۵.۲.۱) یک بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda=0$ آنگاه با استفاده از (۲.۲.۱) خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial(A_0+\lambda A_1)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}=[\frac{\partial e^{-sin^2(\frac{y_0+\lambda y_1}{2})}}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل آن نسبت به A_1 بدست می‌آوریم:

$$A_1=-y_1e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}sin(\frac{y_0}{2})cos(\frac{y_0}{2})$$

اگراز طرفین (۵.۲.۱) دو بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda=0$ آنگاه خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial^2(A_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2)}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0}=[\frac{\partial^2 e^{-sin^2(\frac{y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2}{2})}}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل آن نسبت به A_2 بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}A_2=&\frac{y_1^2}{2}e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}sin^2(\frac{y_0}{2})cos^2(\frac{y_0}{2})-\frac{y_1^2}{4}e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}cos^2(\frac{y_0}{2})\\&+\frac{y_1^2}{4}e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}sin^2(\frac{y_0}{2})-y_2e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}sin(\frac{y_0}{2})cos(\frac{y_0}{2})\end{aligned}$$

اگراز طرفین (۵.۲.۱) سه بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda=0$ آنگاه خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial^3(A_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2+\lambda^3A_3)}{\partial^3\lambda}]_{\lambda=0}=[\frac{\partial^3 e^{-sin^2(\frac{y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\lambda^3y_3}{2})}}{\partial^3\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل آن نسبت به A_3 بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}A_3=&\frac{1}{6}y_1^3cos(\frac{y_0}{2})sin(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}-\frac{1}{2}y_1y_2cos^2(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}\\&+\frac{1}{4}y_1^3sin(\frac{y_0}{2})cos^3(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}+\frac{1}{2}y_1y_2sin^2(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}\\&-\frac{1}{4}y_1^3sin^3(\frac{y_0}{2})cos(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}-y_3cos(\frac{y_0}{2})sin(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}\\&+y_1y_2cos^2(\frac{y_0}{2})sin^2(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}-\frac{1}{6}y_1^3cos^3(\frac{y_0}{2})sin^3(\frac{y_0}{2})e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})}\end{aligned}$$

با ادامه این روند می‌توانیم A_4، A_5 و ... را بدست آوریم.

بنابراین چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با $F(y) = e^{-sin^2\frac{y}{2}}$ بصورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} A_0 = e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} \\ A_1 = -y_1 e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} sin(\frac{y_0}{2}) cos(\frac{y_0}{2}) \\ A_2 = \frac{y_1^2}{2} e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} sin^2(\frac{y_0}{2}) cos^2(\frac{y_0}{2}) - \frac{y_1^2}{4} e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} cos^2(\frac{y_0}{2}) \\ \quad + \frac{y_1^2}{4} e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} sin^2(\frac{y_0}{2}) - y_2 e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} sin(\frac{y_0}{2}) cos(\frac{y_0}{2}) \\ A_3 = \frac{1}{6} y_1^3 cos(\frac{y_0}{2}) sin(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} - \frac{1}{2} y_1 y_2 cos^2(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} \\ \quad + \frac{1}{4} y_1^3 sin(\frac{y_0}{2}) cos^3(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} + \frac{1}{2} y_1 y_2 sin^2(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} \\ \quad - \frac{1}{4} y_1^3 sin^3(\frac{y_0}{2}) cos(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} - y_3 cos(\frac{y_0}{2}) sin(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} \\ \quad + y_1 y_2 cos^2(\frac{y_0}{2}) sin^2(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} - \frac{1}{6} y_1^3 cos^3(\frac{y_0}{2}) sin^3(\frac{y_0}{2}) e^{-sin^2(\frac{y_0}{2})} \\ \vdots \end{cases}$$

مثال ۴.۲.۱ : فرض کنید $F(y) = y^2 \; e^{sin\; y} + cosh\; y \;\; ln\; y$ چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با آنرا بدست آورید.

قرار می‌دهیم $y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k$

با توجه به رابطه (۱.۲.۱) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)^2 e^{sin(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)} + cosh(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k) ln(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k) \qquad (۶.۲.۱)$$

با قرار دادن $\lambda = 0$ بدست می‌آوریم: $A_0 = y_0^2 e^{sin(y_0)} + coshy_0 \; lny_0$

اگر از طرفین (۶.۲.۱) یک بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه با استفاده از (۲.۲.۱) خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial(A_0 + \lambda A_1)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial((y_0 + \lambda y_1)^2 e^{sin(y_0+\lambda y_1)} + cosh(y_0 + \lambda y_1) \; ln(y_0 + \lambda y_1))}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل آن نسبت به A_1 بدست می‌آوریم:

$$A_1 = 2y_1 y_0 e^{sin(y_0)} + y_1 y_0^2 cosy_0 e^{sin(y_0)} + \frac{1}{2} y_1 e^{y_0} lny_0 - \frac{1}{2} y_1 e^{-y_0} lny_0 + \frac{y_1}{2y_0} e^{y_0} + \frac{y_1}{2y_0} e^{-y_0}$$

بطور مشابه

$$A_2 = y_1^2 e^{sin(y_0)} + 2y_0 y_1^2 cosy_0 e^{sin(y_0)} + 2y_0 y_2 e^{sin(y_0)} - \frac{1}{2} y_0^2 y_1^2 siny_0 e^{sin(y_0)} \\ + y_0^2 y_2 cosy_0 e^{sin(y_0)} + \frac{1}{2} y_0^2 y_1^2 e^{sin(y_0)} - \frac{1}{2} y_0^2 y_1^2 sin^2 y_0 e^{sin(y_0)} + \frac{1}{4} y_1^2 lny_0 e^{y_0} \\ + \frac{1}{4} y_1^2 lny_0 e^{-y_0} + \frac{1}{2} y_2 lny_0 e^{y_0} - \frac{1}{2} y_2 lny_0 e^{-y_0} + \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0} e^{y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{y_0} e^{-y_0} \\ + \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_0} e^{y_0} + \frac{1}{2} \frac{y_2}{y_0} e^{-y_0} - \frac{1}{4} \frac{y_1^2}{y_0^2} e^{y_0} - \frac{1}{4} \frac{y_1^2}{y_0^2} e^{-y_0}$$

با ادامه این روند می‌توانیم A_3، A_4 و ... را بدست آوریم.

بنابراین چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با $F(y) = y^2 e^{siny} + cosh\ y\ \ lny$ بصورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} A_0 = y_0^2 e^{sin(y_0)} + coshy_0\ lny_0 \\ A_1 = 2y_1 y_0 e^{sin(y_0)} + y_1 y_0^2 cosy_0 e^{sin(y_0)} + \frac{1}{2} y_1 e^{y_0} lny_0 - \frac{1}{2} y_1 e^{-y_0} lny_0 + \frac{y_1}{2y_0} e^{y_0} + \frac{y_1}{2y_0} e^{-y_0} \\ A_2 = y_1^2 e^{sin(y_0)} + 2y_0 y_1^2 cosy_0 e^{sin(y_0)} + 2y_0 y_2 e^{sin(y_0)} - \frac{1}{2} y_0^2 y_1^2 siny_0 e^{sin(y_0)} \\ \quad + y_0^2 y_2 cosy_0 e^{sin(y_0)} + \frac{1}{2} y_0^2 y_1^2 e^{sin(y_0)} - \frac{1}{2} y_0^2 y_1^2 sin^2 y_0 e^{sin(y_0)} + \frac{1}{4} y_1^2 lny_0 e^{y_0} \\ \quad + \frac{1}{4} y_1^2 lny_0 e^{-y_0} + \frac{1}{2} y_2 lny_0 e^{y_0} - \frac{1}{2} y_2 lny_0 e^{-y_0} + \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{y_0} e^{y_0} - \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{y_0} e^{-y_0} \\ \quad + \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_0} e^{y_0} + \frac{1}{2}\frac{y_2}{y_0} e^{-y_0} - \frac{1}{4}\frac{y_1^2}{y_0^2} e^{y_0} - \frac{1}{4}\frac{y_1^2}{y_0^2} e^{-y_0} \\ \vdots \end{cases}$$

مثال ۵.۲.۱ : فرض کنید $F(y) = yy_x y_{xx}$ چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با آنرا بدست آورید.

داریم:

$$y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k$$

با توجه به رابطه (۱.۲.۱) داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_k = (\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)_x(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k)_{xx} \qquad (7.2.1)$$

با قرار دادن $\lambda = 0$ بدست می‌آوریم: $A_0 = y_0 y_{0_x} y_{0_{xx}}$

اگراز طرفین (۷.۲.۱) یک بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه با استفاده از (۲.۲.۱) خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial(A_0 + \lambda A_1)}{\partial\lambda}]_{\lambda=0} = [\frac{\partial((y_0 + \lambda y_1)(y_{0_x} + \lambda y_{1_x})(y_{0_{xx}} + \lambda y_{1_{xx}}))}{\partial\lambda}]_{\lambda=0}$$

با حل این معادله نسبت به A_1 بدست می‌آوریم: $A_1 = y_1 y_{0_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{1_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{0_x} y_{1_{xx}}$

اگراز طرفین (۷.۲.۱) دو بار نسبت به λ مشتق بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ آنگاه خواهیم داشت:

$$[\frac{\partial^2(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0} = \\ [\frac{\partial^2((y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)(y_{0_x} + \lambda y_{1_x} + \lambda^2 y_{2_x})(y_{0_{xx}} + \lambda y_{1_{xx}} + \lambda^2 y_{2_{xx}}))}{\partial^2\lambda}]_{\lambda=0}$$

که با حل آن نسبت به A_2 بدست می‌آوریم:

$$A_2 = y_2 y_{0_x} y_{0_{xx}} + y_1 y_{1_x} y_{0_{xx}} + y_1 y_{0_x} y_{1_{xx}} + y_0 y_{2_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{1_x} y_{1_{xx}} + y_0 y_{0_x} y_{2_{xx}}$$

بطور مشابه A_3 نیز بدست می آید.

$$A_3 = y_3 y_{0_x} y_{0_{xx}} + y_2 y_{1_x} y_{0_{xx}} + y_2 y_{0_x} y_{1_{xx}} + y_1 y_{2_x} y_{0_{xx}} + y_1 y_{1_x} y_{1_{xx}} + y_1 y_{0_x} y_{2_{xx}} + y_0 y_{3_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{2_x} y_{1_{xx}} + y_0 y_{1_x} y_{2_{xx}} + y_0 y_{0_x} y_{3_{xx}}$$

با ادامه این روند می‌توانیم A_4، A_5 و ... را بدست آوریم.

بنابراین چندجمله‌ایهای آدومیان متناظر با $F(y) = y y_x y_{xx}$ بصورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} A_0 = y_0 y_{0_x} y_{0_{xx}} \\ A_1 = y_1 y_{0_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{1_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{0_x} y_{1_{xx}} \\ A_2 = y_2 y_{0_x} y_{0_{xx}} + y_1 y_{1_x} y_{0_{xx}} + y_1 y_{0_x} y_{1_{xx}} + y_0 y_{2_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{1_x} y_{1_{xx}} + y_0 y_{0_x} y_{2_{xx}} \\ A_3 = y_3 y_{0_x} y_{0_{xx}} + y_2 y_{1_x} y_{0_{xx}} + y_2 y_{0_x} y_{1_{xx}} + y_1 y_{2_x} y_{0_{xx}} + y_1 y_{1_x} y_{1_{xx}} + y_1 y_{0_x} y_{2_{xx}} + \\ \quad y_0 y_{3_x} y_{0_{xx}} + y_0 y_{2_x} y_{1_{xx}} + y_0 y_{1_x} y_{2_{xx}} + y_0 y_{0_x} y_{3_{xx}} \\ \vdots \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه‌کردیدچندجمله‌ایهای آدومیان برای فرمهای مختلف غیرخطی به‌راحتی محاسبه می‌شود. البته در[۷] و [۳۰] فرمولهای بسته زیر برای محاسبه چندجمله‌ایهای اولیه برای عبارت غیرخطی $Ny = F(y)$ ارائه شده است و ما برای حل مسائل این پایان نامه از این فرمولها استفاده خواهیم کرد.

$$\begin{cases} A_0 = F(y_0) \\ A_1 = y_1 F'(y_0) \\ A_2 = y_2 F'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} F''(y_0) \\ A_3 = y_3 F'(y_0) + y_1 y_2 F''(y_0) + \frac{y_1^3}{3!} F'''(y_0) \\ A_4 = y_4 F'(y_0) + (\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3) F''(y_0) + \frac{y_1^2 y_2}{2!} F'''(y_0) + \frac{y_1^4}{4!} F^{(4)}(y_0) \\ \vdots \end{cases} \tag{۸.۲.۱}$$