بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

مطالعه‌ی بیشتر نیم ابرگروه‌های سه‌تایی و سه‌تایی کامل

استاد راهنما ۱:
دکتر مرتضی جعفر پور

استاد راهنما ۲:
دکتر بیژن دواز

نگارنده:
وحید واحدی

شهریور ماه ۹۳

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبر

وحید واحدی

مطالعه بیشتر (نیم) ابرگروه‌های سه‌تایی و سه‌تایی کامل

در تاریخ ۹۳/۶/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه‌ی عالی **به تصویب نهایی رسید.**

۱- استاد راهنمای۱ پایان‌نامه دکتر مرتضی جعفرپور با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- استاد راهنمای۲ پایان‌نامه دکتر بیژن دواز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۳- استاد داور داخل گروه۱ دکتر غلامحسین آقابزرگی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور داخل گروه۲ دکتر سمیه کریم‌زاده با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۵- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دکتر محمد حشمتی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

سپاس‌گزاری

پس از حمد و سپاس خداوند منان، بدون شک جایگاه و منزلت معلم اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی ایشان با دست ناتوان چیزی بنگارم اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند بر حسب وظیفه از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند. از استادان فرهیخته آقایان دکتر جعفرپور و دکتر دواز که در کمال سعه صدر با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند. همچنین از استادان فرزانه آقای دکتر آقابزرگی و خانم دکتر کریم زاده که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم، باشد که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید. در پایان از برادرانم سعید و آرش و خواهرم سیما، واحدی و دوستان گرامی رضا و آیلا، هادوی که در لحظه لحظه‌های زندگی هم قدم و همراه من هستند قدردانی می‌کنم.

وحید واحدی
vahedivahid60@yahoo.com

چکیده

در پایان‌نامه‌ی حاضر ابتدا نیم ابرگروه‌های کامل مورد مطالعه قرار می‌گیرند. سپس یک شرط لازم وکافی برای کامل بودن نیم ابرگروه‌ها و مفهوم مجموعه‌ی نرم بیان شده و روشی برای تعیین ابرگروه‌های کامل در حد یکریختی روی یک مجموعه‌ی ناتهی بیان می‌گردد. همچنین مفهوم نیم‌گروه سه‌تایی پیش‌مرتب تعریف شده و نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از نیم‌گروه‌های سه‌تایی پیش‌مرتب معرفی و بعضی خواص نیم‌ابرگروه سه‌تایی گرفته شده از آنها بررسی می‌شود. در ادامه نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی کامل تعریف شده‌اند و نشان داده شده است که هر نیم‌ابرگروه سه‌تایی کامل، از یک نیم‌گروه سه‌تایی گرفته می‌شود. همچنین ثابت می‌شود اگر f یک همریختی سه‌تایی یکنوا بین دو نیم‌گروه سه‌تایی پیش‌مرتب باشد آنگاه f یک همریختی سه‌تایی بین نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از آنها القاء می‌کند. افزون بر این شرطی لازم و کافی برای کامل بودن نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی بیان گردیده و روابط دوتایی روی نیم ابرگروه‌های سه‌تایی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به ویژه برخی از خواص اساسی روابط سازگار روی آنها بررسی شده است. به علاوه پس از معرفی ابرگروه سه‌تایی گرفته شده از یک رابطه‌ی دوتایی، شرایطی هم‌ارز با ابرگروه بودن آن بیان می‌شود و در پایان دو مورد خاص از این ابرگروه‌های سه‌تایی به همراه مثال‌هایی در ارتباط با این موضوع ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی: نیم‌ابرگروه سه‌تایی، نیم‌ابرگروه سه‌تایی کامل، نیم‌گروه سه‌تایی پیش‌مرتب، همریختی، ۳-همریختی، همریختی سه‌تایی، ۳-همریختی سه‌تایی، رابطه‌ی دوتایی، رابطه‌ی سازگار(قوی)، رابطه‌ی منظم(قوی)، مجموعه‌ی نرم، مجموعه‌ی نرم خاص، مجموعه‌ی نرم متعدی.

پیش‌گفتار

نظریه ابرگروه‌ها اولین بار در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی در سال ۱۹۳۴ مطرح شد، مارتی[۱] [۳۷] مفهوم ابرگروه را به عنوان تعمیمی از گروه بیان نمود و نظریه ابرساختارها را پایه‌گزاری کرد. اگر چه مارتی در سن جوانی در جنگ جهانی دوم درگذشت اما در طول این زمان کوتاه بیش از دو یا سه مقاله در زمینه ابرساختارها ارائه داد و آن را به عنوان ابزاری در حل برخی از مسائل گروه و توابع جبری تثبیت کرد. پس از او بسیاری از محققین در شاخه‌های مختلف ریاضی در این زمینه کار کردند.

از سال ۱۹۶۰ تحقیقات در این زمینه گسترش یافت. در فرانسه، کراسنر[۲] ، کوسکاس[۳] و سورآ[۴] تحقیقات خود را روی نظریه ابرساختارها به خصوص نیم‌ابرگروه‌ها شروع کردند. کوسکاس در فرانسه روی شرکت پذیری نیم‌ابرگروه‌ها بحث کرد. مک مولن[۵] در استرالیا نظریه‌ی ابرگروه‌ها را گسترش داده و در آنالیز هارمونیک مورد استفاده قرار داد. در یونان، میتاس[۶] ، کونستانتینیدو[۷] ، سرافیمیدیس[۸] و ماسوروس[۹] ابرگروه‌های کانونی، ابرحلقه‌ها و ابرمدول‌ها، ابرمشبکه‌ها و کاربرد ابرمیدان‌ها در نظریه اتوماتا را مورد مطالعه قرار دادند و در این زمینه تحقیقاتی به عمل آورده و قضایای مختلفی را در بیان کردند. همچنین ریاضیدانان آمریکایی مقالات ارزشمندی در زمینه ابرگروه‌ها به رشته تحریر درآورده‌اند که از آن جمله می‌توان به کامر[۱۰] و توشیاک[۱۱] اشاره کرد.

روزنبرگ[۱۲] در سال ۱۹۹۸ برای اولین بار رابطه بین ابرساختارها و روابط دوتایی را مورد مطالعه قرار داد و پس از او دی سالوو[۱۳] نتایج جدیدی را در این زمینه به دست آورد. مقالات باارزشی در زمینه ابرگروه‌های منظم، قلب ابرگروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه ترکیبیات و

[۱] Marty
[۲] Krasner
[۳] Koskas
[۴] Sureau
[۵] Mac Molen
[۶] Mittas
[۷] Konstantinidou
[۸] Serafimidis
[۹] Massourous
[۱۰] Comer
[۱۱] Tociak
[۱۲] Rosenberg
[۱۳] De Salvo

هندسه توسط گروهی از محققین ایتالیایی از جمله کرسینی[۱] ، دی سالوو، میگلیوراتو[۲] ، دی ماریا[۳] و فرنی[۴] به جهان ریاضیات ارائه شدند. در شروع دهه ۹۰ میلادی، ریاضیدانان رومانیایی در پنجمین کنفرانس ابرساختارهای جبری و کاربردهای آن در سال ۱۹۹۳ وارد این نظریه شدند که می‌توان به استفانسکو[۵] ، لئوریانو فوتآ[۶] ، پلِ آ[۷] و گوتان[۸] اشاره نمود، ایشان رساله‌های دکترای خود را در این زمینه نگارش نمودند. همچنین ریاضیدانان ایرانی نیز مطالعات و تحقیقات خود را در زمینه ابرساختارهای جبری از دهه ۹۰ شروع کردند که می‌توان به زاهدی، دواز، عامری، ایرانمنش، برزویی، اشرفی، موسوی، جعفرپور، آقابزرگی و برخی افراد دیگر اشاره کرد.

یک انگیزه‌ی پژوهش در مجموعه‌های با یک عمل nتایی یا به اصطلاح nتایی‌های جبری به سخنرانی کاسنر[۹]، [۲۸] در پنجاه و سومین نشست تحقیقاتی سالیانه انجمن پیشرفت علم آمریکا در سال ۱۹۰۴ برمی‌گردد، اما اولین مقاله در ارتباط با نظریه‌ی گروه‌های nتایی در سال ۱۹۲۸ توسط دارنت[۱۰] [۱۵] تحت تأثیر آموزه‌های امی نوتر[۱۱] نوشته شد. به پیرو آن مقالات زیادی در رابطه با جبرهای nتایی مختلف در مجلات ظاهر گردیدند که نمونه‌هایی از آنها را می‌توان در [۸، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۴۶، ۴۹] دید. مجموعه‌های با یک عمل nتایی خواص مختلفی دارند که توسط افرادی مورد پژوهش قرار گرفته‌اند این ساختارها کاربردهای زیادی در شاخه‌های گوناگون دارند. برای مثال در نظریه‌ی اتوماتا [۲۳] یک ساختار nتایی که بعضی از خواص شرکت‌پذیری را دارد به کار گرفته شده است بعضی دیگر از ساختارهای nتایی در نظریه گروه‌های کوانتومی [۴۴] و ترکیبیات [۵۱] به کار برده شده‌اند. کاربردهای مختلفی از ساختارهای سه‌تایی در فیزیک توسط کرنر[۱۲] [۲۹] شرح داده شده است در فیزیک این قبیل ساختارها تحت عنوان جبرهای فایلی‌پاو nتایی[۱۳] [۴۵] و n-لی جبرها[۱۴] [۵۲] به کار گرفته شده است. برخی از ساختارهای nتایی گرفته شده از ابرسه‌تایی‌ها دارای کاربردهایی درخطایابی نظریه‌ی کدها و رمزنگاری به خوبی کاربردهای نظریه‌ی (t,m,s)-تورها هستند که نمونه‌هایی از آنها را می‌توان در [۳۱] دید. دواز و ویوکلیس[۱۵] در [۱۳] مفهوم ابرگروه‌های nتایی را به عنوان تعمیمی از ابرگروه‌ها در مفهوم مارتی[۱۶] [۳۷] و تعمیمی از گروه‌های nتایی معرفی کردند. دواز و همکارانش در [۱۰] رده‌ای از ابرساختارهای جبری را بررسی کردند

[۱] Corsini
[۲] Migliorato
[۳] De Maria
[۴] Freni
[۵] Stefanescu
[۶] Leoreanu Fotea
[۷] Pelea
[۸] Gutan
[۹] Kasner
[۱۰] Dornte
[۱۱] Emmy Noether
[۱۲] Kerner
[۱۳] n-ary Filippov algebras
[۱۴] n-Lie algebras
[۱۵] Vougiouklis
[۱۶] Marty

که منجر به تعمیمی از نیم‌گروه‌ها، نیم‌ابرگروه‌ها و نیم‌گروه‌های nتایی شد. همچنین دواز و دوستانش در [۹] عضوهای بی‌اثر در نیم‌ابرگروه‌های nتایی را معرفی کرده و یک رابطه‌ی سازگار قوی جدید روی آنها بیان نمودند. لئوریانو و دواز در [۳۳] مفهوم ابرگروه‌های nتایی جزیی گرفته شده از یک رابطه‌ی دوتایی را مطرح کرده و مورد مطالعه قرار دادند. برای بررسی جزییات بیشتر درباره‌ی نیم‌ابرگروه‌های nتایی می‌توان [۲، ۳، ۱۰، ۳۸، ۳۹، ۵۴] را دید. نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی ساختارهای جبری با یک ابرعمل شرکت‌پذیر هستند. یک نیم‌ابرگروه سه‌تایی، نیم‌ابرگروهی nتایی و یک نیم‌گروه سه‌تایی، نیم‌گروهی nتایی، برای $n = ۳$ می‌باشند [۴، ۵، ۱۴، ۳۲، ۳۴، ۴۱]. لئوریانو و دواز در [۱۱] روابط دوتایی روی نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی و برخی از خواص اساسی روابط سازگار روی آنها را مورد مطالعه قرار دادند. هیلا[۱] و ناکا[۲] در [۴۲، ۴۳] روی نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی کار کردند و بعضی از خواص ابرایده‌آل‌ها در نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی چنان که در [۲۴] دیده می‌شود را پیدا کردند.

ابرساختارها توسیع‌های طبیعی‌ای از ساختارهای کلاسیک جبری هستند که توسط ریاضیدان فرانسوی، مارتی [۳۷] همان طور که قبلا ذکر شد، معرفی شدند. ابرساختارها تعمیم‌های مناسبی را از ساختارهای جبری کلاسیک ارائه می‌دهند صدها مقاله و کتاب را می‌توان در این موضوع دید [۶، ۷، ۱۲، ۵۳]. یک کتاب در مورد ابرساختارها [۷] است که کاربردهایی از ابرساختارها در رمزنگاری، نظریه‌ی کدها، اتوماتا، احتمالات، مشبکه‌ها، روابط دوتایی، گراف‌ها، ابرگراف‌ها و هندسه بیان می‌کند. کتابی دیگر در این مورد [۱۲] است که بطور خاص به ابرحلقه‌ها اختصاص داده شده است.

در سال ۱۹۳۲ لمر[۳] [۳۲] مفهوم ساختارهای جبری سه‌تایی را معرفی کرد و سه‌تایی‌هایی را کشف کرد که گروه سه‌تایی بودند. باناخ[۴] نشان داد که لزوما یک نیم‌گروه سه‌تایی به یک نیم‌گروه معمولی کاهش پیدا نمی‌کند، اما می‌توان از یک نیم‌گروه معمولی به یک نیم‌گروه سه‌تایی رسید. سایاسون[۵] [۵۰] در سال ۱۹۸۶ مفهوم نیم‌گروه‌های سه‌تایی منظم را معرفی کرد و آنها را با استفاده از مفهوم شبه ایده‌آل‌ها رده‌بندی نمود. در سال ۲۰۰۷ مفهوم همنهشتی روی نیم‌گروه‌های سه‌تایی به وسیله‌ی کار[۶] و مایتی[۷] [۲۷] معرفی شد و ایشان مفاهیم همنهشتی حذفی، گروه‌های همنهشتی و همنهشتی‌های ریس[۸] را بیان کرده و آنها را در نیم‌گروه‌های سه‌تایی رده‌بندی کردند. مولدستاو[۹] [۴۰] مفهوم مجموعه‌های نرم را در

[۱] Hila
[۲] Naka
[۳] Lehmer
[۴] Banach
[۵] Sioson
[۶] Kar
[۷] Maity
[۸] Rees
[۹] Molodstov

برخورد با مسائلی مانند احتمالات، و مجموعه‌های سخت که از نظر تئوری عاری از مشکل بودند معرفی کرد که نمونه‌ای از کاربردهای آن را می‌توان در [۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۳۶] دید. در این پایان‌نامه فصل اول به کلیاتی از نظریه‌ی ابرگروه‌ها اختصاص دارد. در فصل دوم نیم ابرگروه‌های کامل معرفی و برخی از تعاریف و قضایای مهم در این رابطه بیان شده‌اند و در ادامه شرطی معادل با کامل بودن یک نیم ابرگروه، مفهوم مجموعه نرم و دو مورد خاص از آنها بیان گردیده و روشی برای تعیین ابرگروه‌های کامل در حد یکریختی روی یک مجموعه‌ی ناتهی بیان شده است. فصل سوم مربوط به نیم ابرگروه‌های سه‌تایی است. در این فصل مفهوم نیم‌گروه‌های سه‌تایی پیش‌مرتب بیان شده و نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین نیم ابرگروه‌های سه‌تایی کامل معرفی شده و مشخص گردیده‌اند و نشان داده شده که هر نیم‌ابرگروه سه‌تایی کامل از یک نیم‌گروه سه‌تایی پیش‌مرتب گرفته می‌شود و هر همریختی سه‌تایی یکنوا بین دو نیم‌گروه سه‌تایی پیش‌مرتب یک همریختی سه‌تایی بین نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از آنها القاء می‌کند و در آخر ابرگروه‌های کامل سه‌تایی در حد یکریختی مشخص شده‌اند. فصل چهارم به روابط دوتایی روی نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی اختصاص داده شده است و برخی از خواص اساسی روابط دوتایی سازگار روی نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند به ویژه ابرگروه‌وارهای سه‌تایی گرفته شده از روابط دوتایی مورد بررسی قرار گرفته و دو رابطه‌ی دوتایی خاص که منجر به ساخت ابرگروه‌های سه‌تایی می‌شوند معرفی گردیده است، به علاوه رابطه‌ی β روی نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی معرفی شده و شرطی معادل برای کامل بودن یک نیم‌ابرگروه سه‌تایی بیان شده است و در پایان مثال‌هایی از ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از برخی روابط دوتایی بیان می‌شود.

فهرست مطالب

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ نیم‌ابرگروه‌ها و ابرگروه‌ها ۱

۲.۱ رابطه روی نیم‌ابرگروه‌ها ۴

۳.۱ همریختی‌ها ۹

۴.۱ حاصل ضرب نیم‌مستقیم راست و حاصل ضرب نیم‌مستقیم چپ نیم‌ابرگروه‌ها ۱۲

۲ مجموعه‌های کامل و مجموعه‌های نرم ۱۷

۱.۲ نیم‌ابرگروه‌های کامل و مجموعه‌های نرم ۱۷

۲.۲ رده‌بندی ابرگروه‌های کامل ۲۴

۳ نیم گروه‌های سه‌تایی و نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی ۳۱

۱.۳ عمل سه‌تایی و ابرعمل سه‌تایی ۳۱

۲.۳ نیم‌گروه‌های سه‌تایی پیش‌مرتب و نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی کامل ۵۳

۳.۳ همریختی‌های سه‌تایی ۶۶

۴ روابط بر نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی ۷۷

۱.۴ روابط سازگار و روابط سازگار قوی ۷۷

۲.۴ روابط منظم و منظم قوی روی نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی ۸۹

۳.۴ ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از روابط دوتایی ۱۰۵

۴.۴ مثال‌هایی از نیم‌ابرگروه‌های سه‌تایی گرفته شده از روابط دوتایی . . . ۱۱۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۲۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۳۱

فهرست منابع ۱۳۵

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف، نمادها و نتایج مهم در رابطه با نظریه ابرگروه‌ها مطرح می شوند. تعاریف این فصل مربوط به مرجع [۶] می‌باشند. برای مطالعه و تحقیق بیشتر می‌توان به منابع [۱۲، ۴۸] مراجعه کرد. کاربردهایی از نظریه ابرگروه‌ها در مرجع [۷] بیان شده اند.

۱.۱ نیم‌ابرگروه‌ها و ابرگروه‌ها

فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد برای عدد طبیعی n، تعریف می‌کنیم:

$$H^n = \{(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) | x_i \in H,\ ۱ \leq i \leq n,\ i \in \mathbb{N}\}.$$

همچنین خانواده همه زیرمجموعه‌های ناتهی H را با $\mathcal{P}^*(H)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید H یک مجموعه ناتهی باشد، نگاشت $\circ : H^۲ \longrightarrow \mathcal{P}^*(H)$ یک ابرعمل دوتایی و زوج مرتب $(H, \circ)$ ابرگروه‌وار نامیده می‌شود. ابرگروه‌واری را که دارای دو خاصیت زیر باشد، ابرگروه می‌نامند:

i) برای هر $(x, y, z) \in H^۳$، $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. (خاصیت شرکت پذیری)

ii) برای هر $x \in H$، $x \circ H = H = H \circ x$. (اصل تکثیر)

به خصوص ابرگروه‌وار شرکت پذیر، نیم‌ابرگروه و ابرگروه‌واری که در اصل تکثیر صدق می‌کند، شبه ابرگروه نامیده می‌شود.

اگر A و B زیرمجموعه‌های ناتهی H باشند آنگاه $A \circ B = \bigcup\limits_{\substack{a\in A\\ b\in B}} a \circ b$. هرگاه جای هیچ گونه ابهامی نباشد $A \circ \{b\}$، $\{a\} \circ B$، $\{a\} \circ \{b\}$، $A \circ B$ و $(H, \circ)$ را به ترتیب با Ab، aB، ab، AB و H نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان هر (نیم)گروه را با عنوان یک (نیم)ابرگروه در نظر گرفت، افزون بر این اگر $(A, \circ)$ یک (نیم)ابرگروه باشد آن را زیر(نیم)ابرگروه $(H, \circ)$ می‌نامند.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $H = \{a, b, c\}$ یک مجموعه و $\circ$ ابرعمل تعریف شده روی H به صورت زیر باشد:

$\circ$	a	b	c
a	a	H	H
b	H	b	b
c	H	b	c

آنگاه $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌وار است.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $(S, .)$ یک نیم‌گروه و P یک زیرمجموعه ناتهی از S باشد تعریف می‌کنیم:

$$\forall (x, y) \in S^{۲}, \quad x \circ y = xPy.$$

در این صورت $(S, \circ)$ یک نیم‌ابرگروه است. هم چنین اگر $(S, \cdot)$ یک گروه باشد آنگاه $(S, \circ)$ ابرگروه خواهد بود.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ ، ابرعمل $*$ را به این صورت در نظر می‌گیریم که $x * x = x$ و $x * y$ بازه باز بین دو عدد حقیقی x و y است در این صورت $(\mathbb{R}, *)$ یک ابرگروه می‌باشد.

مثال ۵.۱.۱. اگر $\circ$ بر گروه G با $| G |\geq ۳$ به صورت زیر تعریف شود در این صورت$(G, \circ)$ یک ابرگروه است.

$$\forall (a, b) \in G^{۲}, a \circ b = G \setminus \{ab\}.$$

$$\forall (a, b, c) \in G^{۳}, (a \circ b) \circ c = \bigcup_{x \neq ab} G \setminus \{xc\} = G \setminus \bigcap_{x \neq ab} \{xc\} = G \setminus \{\} = G$$

به طور مشابه $G = (b \circ c) \circ a$ درنتیجه$(b \circ c) \circ a = c \circ (a \circ b)$ و$\circ$ شرکت‌پذیر است.

$$\forall a \in G, a \circ G = \bigcup_{x \in G} G \setminus \{ax\} = G \setminus \bigcap_{x \in G} \{ax\} = G \setminus \{\} = G$$

درنتیجه اصل تکثیر نیز برای$\circ$ برقرار است و $(G, \circ)$ ابرگروه می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱. ابرگروه $(H, *)$ را جابجایی می‌نامند هرگاه:

$$\forall (x, y) \in H^{۲}, \quad x * y = y * x.$$

توجه کنید ابرگروه‌وار بیان شده در مثال ۲.۱.۱ یک ابرگروه‌وار جابجایی است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید $(H, \circ)$ یک ابرگروه‌وار باشد.

i) عضو $e \in H$ همانی راست (چپ) نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in H$ داشته باشیم:

$$y \in y \circ e \ (y \in e \circ y).$$

ii) عضو $e \in H$ همانی نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in H$ داشته باشیم:

$$y \in y \circ e \cap e \circ y.$$

iii) عضو $x' \in H$، وارون $x \in H$ نامیده می‌شود اگر برای عنصر همانی e از H رابطه زیر برقرار باشد:

$$e \in x \circ x' \cap x' \circ x.$$

iv) عضو $x \in H$ اسکالر راست (چپ) نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in H$ داشته باشیم:

$$|y \circ x| = ۱ \qquad (|x \circ y| = ۱),$$

و عضو $x \in H$ اسکالر نامیده می‌شود اگر اسکالر چپ و اسکالر راست باشد.

قضیه ۸.۱.۱. اگر $(H, \circ)$ ابرگروهی، دارای اسکالر باشد آنگاه مجموعه‌ی اسکالرها در H تشکیل یک گروه با همانی e می‌دهند که e اسکالر همانی یکتای ابرگروه $(H, \circ)$ است.

مثال ۹.۱.۱. فرض کنید ابرگروه $(H,*)$ به صورت زیر داده شده باشد:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	e,a	a,b	e,b
b	e,a,b	e,a,b	e,a,b

در این صورت e همانی راست و عناصر e,a,b همگی همانی چپ هستند. هم چنین عنصر a دارای وارون راست e,b و وارون چپ e,a,b می‌باشد، به علاوه e اسکالر چپ ابرگروه $(H,*)$ است.

مثال ۱۰.۱.۱. ابرعمل زیر را روی مجموعه ناتهی H در نظر بگیرید:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c,d	d
b	b	a,b	c,d	c,d
c	c	c,d	a,b	a,b
d	c,d	c,d	a,b	a,b

$(H,*)$ ابرگروهی است که دارای عنصر همانی a بوده و عناصر a، b، c و d به ترتیب وارون های a، b، $\{c,d\}$ و $\{c,d\}$ می‌باشند ابرگروهی که حداقل یک همانی و هر عنصرش دارای حداقل یک وارون باشد، ابرگروه منظم نامیده می‌شود.

۲.۱ رابطه روی نیم‌ابرگروه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید هر زیرمجموعه از حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ مانند R یک رابطه دوتایی از A به B تشکیل می‌دهد اگر $(a,b)\in R$ آنگاه a و b تحت R در رابطه‌اند و می‌نویسیم $a\ R\ b$.

تعریف ۲.۲.۱. اگر در تعریف قبل $A=B$ باشد می‌گوییم R یک رابطه روی A است. این رابطه ممکن است دارای ویژگی‌های زیر باشد:

i) R بازتابی است اگر برای هر $a\in A$ داشته باشیم $a\ R\ a$.

ii) R تقارنی است اگر $a\ R\ b$ آنگاه $b\ R\ a$.

iii) R پادتقارنی است اگر $a\ R\ b$ و $b\ R\ a$ آنگاه $a = b$.

iv) R متعدی است اگر $a\ R\ b$ و $b\ R\ c$ آنگاه $a\ R\ c$.

رابطه‌ای که دارای خاصیت‌های بازتابی، تقارنی و تعدی باشد، رابطه هم‌ارزی و رابطه‌ای که دارای خاصیت های بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد، رابطه ترتیب جزئی نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. اگر R یک رابطه روی A باشد آنگاه

i) بستار تقارنی R عبارت است از: کوچکترین رابطه تقارنی شامل R.

ii) بستار متعدی R عبارت است از: کوچکترین رابطه متعدی شامل R.

گزاره ۴.۲.۱. [۱] اگر بستار متعدی رابطه R را با R^* نشان دهیم آنگاه $R^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ که R^n ترکیب n نسخه از R می‌باشد یعنی $R^n = R \circ R \ldots \circ R$.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ یک مجموعه باشد رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (c,a), (a,c)\},$$

R_1 بازتابی و تقارنی است ولی متعدی نیست زیرا $\{(b,a),(a,c)\} \subseteq R_1$ اما $(b,c) \notin R_1$ با اضافه کردن دو عضو (b,c) و (c,b) به رابطه R_1، رابطه R_2 حاصل می‌شود که متعدی است لذا R_2 بستار متعدی R_1 می‌باشد.

$$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (c,a), (a,c), (b,c), (c,b)\},$$

به طور مشابه رابطه R_3 تعریف شده در زیر بازتابی و متعدی است ولی تقارنی نیست زیرا $(a,b) \in R_3$ ولی $(b,a) \notin R_3$.

$$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b)\},$$

حال اگر (b,a) را به رابطه R_3 اضافه کنیم بستار تقارنی R_3 یعنی R_4 حاصل می‌شود که به صورت زیر است:

$$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}.$$

تعریف ۶.۲.۱. اگر $(H,\circ)$ نیم‌ابرگروه و $R \subseteq H \times H$ رابطه‌ای هم‌ارزی باشد، آنگاه

i) رابطه R را منظم از چپ (راست) می‌نامیم هرگاه برای هر $(a,x,y) \in H^{۳}$ استلزام زیر برقرار باشد:

$$x\ R\ y \implies a\circ x\ \overline{R}\ a\circ y \quad (x\ R\ y \implies x\circ a\ \overline{R}\ y\circ a).$$

منظور از $a\circ x\ \overline{R}\ a\circ y$ این است که برای هر t از $a\circ x$، u ی از $a\circ y$ وجود داشته باشد که $t\ R\ u$ ($x\circ a\ \overline{R}\ y\circ a$ مفهومی مشابه دارد). R منظم است اگر منظم از چپ و راست باشد.

ii) رابطه R منظم قوی از چپ (راست) نامیده می‌شود اگر برای هر $(a,x,y) \in H^{۳}$ استلزام زیر برقرار باشد:

$$x\ R\ y \implies a\circ x\ \overline{\overline{R}}\ a\circ y \quad (x\ R\ y \implies x\circ a\ \overline{\overline{R}}\ y\circ a).$$

منظور از $a\circ x\ \overline{\overline{R}}\ a\circ y$ این است که برای هر t از $a\circ x$ و هر u از $a\circ y$ داریم $t\ R\ u$ ($x\circ a\ \overline{\overline{R}}\ y\circ a$ مفهومی مشابه دارد). R منظم قوی است اگر منظم قوی از چپ و راست باشد.

مثال ۷.۲.۱. فرض کنید H نیم‌ابرگروهی به صورت زیر باشد:

$\circ$	x	y	z
x	x	x	x
y	x	y	y
z	x	y	y

هم چنین فرض کنید $R = \{(x,x),(y,y),(z,z),(y,z),(z,y)\}$.
رابطه R منظم قوی از چپ است زیرا رابطه هم‌ارزی بوده و استلزام های زیر برای هر $a \in H$ همواره برقرارند.

$$x\ R\ x \implies a\circ x\ \overline{\overline{R}}\ a\circ x,$$

$$y\ R\ y \implies a\circ y\ \overline{\overline{R}}\ a\circ y,$$

$$z\,R\,z \implies a\circ z\,\overline{\overline{R}}\,a\circ z,$$
$$y\,R\,z \implies a\circ y\,\overline{\overline{R}}\,a\circ z,$$
$$z\,R\,y \implies a\circ z\,\overline{\overline{R}}\,a\circ y.$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که R منظم قوی از راست، نیزمی باشد لذا R منظم قوی است.

قضیه ۸.۲.۱. [۶] اگر $(H,\circ)$ (نیم)ابرگروه و ρ یک رابطه هم ارزی روی H باشد، خارج قسمت $\dfrac{H}{\rho}$ را تحت ابرعمل زیر در نظر بگیرید:

$$\rho(x)\otimes\rho(y)=\{\rho(z)\ :\ z\in x\circ y\},$$

در این صورت

i) $(\dfrac{H}{\rho},\otimes)$ (نیم)ابرگروه است اگر و فقط اگر ρ منظم باشد.

ii) $(\dfrac{H}{\rho},\otimes)$ (نیم)گروه است اگر و فقط اگر ρ منظم قوی باشد.

مثال ۹.۲.۱. نگاشت $f:H\longrightarrow H'$ را در نظر گرفته و رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ را روی H به صورت $\sim=\bigcup\limits_{x\in H}(f^{-۱}(f(x)))^{۲}$ تعریف کنید به عبارت بهتر

$$\forall(x,y)\in H^{۲},\quad x\sim y\Longleftrightarrow f(x)=f(y),\quad \overline{x}=f^{-۱}(f(x)),$$

رابطه‌ی $\sim$ را رابطه‌ی هم‌ارزی هسته‌ای نگاشت f گویند و مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی آن را با $\dfrac{H}{f}$ نشان می‌دهند. چنانچه $f:H\longrightarrow H'$ نگاشتی پوشا باشد در این صورت f نگاشتی دو سویی از $\dfrac{H}{f}$ به H' القاء می‌کند. همچنین اگر $(H,\circ)$ و $(H',\circ')$ دو (نیم)ابرگروه باشند بطوری که $f(x\circ y)=f(x)\circ' f(y)$، در این صورت رابطه‌ی $\sim$ منظم بوده و بنا به قضیه فوق $(\dfrac{H}{f},\otimes)$ یک (نیم)ابرگروه است. برای $(a,b,x)\in H^{۳}$،

$$\begin{aligned}a\sim b &\Longrightarrow f(a)=f(b)\Longrightarrow f(a)\circ' f(x)=f(b)\circ' f(x)\\ &\Longrightarrow f(a\circ x)=f(b\circ x)\Longrightarrow ax\,\overline{\sim}\,bx.\end{aligned}$$

تعریف ۱.۲.۱۰. برای هر $n > ۱$ رابطه β_n روی نیم‌ابرگروه H به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a\ \beta_n\ b \iff \exists(x_۱, \cdots, x_n) \in H^n\ ,\ \{a, b\} \subseteq \prod_{i=۱}^{n} x_i,$$

و $\beta = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \beta_n$، جایی که $\beta_۱ = \{(x, x) | x \in H\}$ رابطه قطری روی H است.

این رابطه توسط کوسکاس [۳۰] معرفی شد و توسط کرسینی [۶] مورد مطالعه بیشتر قرار گرفت. بستار متعدی β را با β^* نشان داده، و علاوه بر این بنا به [۶] β^* رابطه‌ای منظم قوی روی نیم‌ابرگروه H می‌باشد و همچنین داریم:

قضیه ۱.۲.۱۱. [۶] اگر $(H, \circ)$ ابرگروه باشد، آنگاه $\beta = \beta^*$.

مثال زیر نشان می‌دهد، در یک نیم‌ابرگروه ممکن است $\beta \neq \beta^*$.

مثال ۱.۲.۱۲. فرض کنید $(H, \circ)$ نیم‌ابرگروه تعریف شده به صورت زیر باشد:

$\circ$	a	b	c	d
a	b, c	b, d	b, d	b, d
b	b, d	b, d	b, d	b, d
c	b, d	b, d	b, d	b, d
d	b, d	b, d	b, d	b, d

به سادگی دیده می شود که هیچ ضرب متناهی از اعضای H شامل $\{c, d\}$ نیست لذا $(c, d) \notin \beta$. از طرفی چون $(c, b) \in \beta$ و $(b, d) \in \beta$ پس $(c, d) \in \beta^*$ بنابراین $\beta \neq \beta^*$.

گزاره زیر شرط لازم و کافی برای تساوی β و β^* در نیم‌ابرگروه‌ها را بیان می‌کند:

گزاره ۱.۲.۱۳. اگر H نیم‌ابرگروه و $\mathcal{U} = \left\{\prod_{i=۱}^{n} x_i : n \in \mathbb{N}, (x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \in H^n\right\}$ باشد آنگاه $\beta = \beta^*$ اگر و فقط اگر برای هر U و V از $\mathcal{U}$ استلزام زیر برقرار باشد:

$$U \cap V \neq \emptyset \Longrightarrow U \times V \subseteq \beta.$$

برهان. اگر $\beta = \beta^*$ بوده، U و V دو عنصر غیر مجزای دلخواه از $\mathcal{U}$ باشند:

$$U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in U \cap V \Rightarrow U \cup V \subseteq \beta^*(y) \Rightarrow U \times V \subseteq \beta^* \Rightarrow U \times V \subseteq \beta$$