

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و  
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه  
متعلق به دانشگاه رازی است.



دانشگاه رازی

دانشکده فنی مهندسی

گروه برق - الکترونیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته برق

گرایش الکترونیک

**عنوان پایان نامه:**

**طراحی، شبیه‌سازی و ساخت فیلتر پایین‌گذر مایکرواستریپ با استفاده از**

**رزوناتورهایی با اتصالات نیم‌دایره‌ای بهبود یافته**

استاد راهنما:

دکتر محسن حیاتی

نگارش:

اکرم شیخی

آبان ماه ۱۳۸۹

## چکیده :

فیلتر یک شبکه دو پورته برای کنترل پاسخ فرکانسی در سیستم‌های میکروویو است و برای جدا کردن نویز و هارمونیک‌های ناخواسته از محیط اطراف در سیستم‌های مخابراتی استفاده می‌شود. برای مثال در فرستنده‌های رادیویی از فیلترهای پایین‌گذر برای حذف هارمونیک‌های ایجاد شده توسط دیگر اجزا مخابراتی استفاده می‌شود. تکنیک‌های مختلفی برای پیاده‌سازی انواع مختلفی از فیلترها (پسیو، اکتیو، موجبر، میکرواستریپ و ...) استفاده می‌شود، خیلی از تکنیک‌ها بستگی به رنج فرکانسی و توانایی انتقال توان و مرتبه فیلتر دارد. کار انجام شده در این پایان‌نامه طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از خطوط میکرواستریپ می‌باشد. ساختار میکرواستریپ به دلیل این که با استفاده از فرآیند لیتوگرافی ساخته می‌شود و به آسانی با مدارات میکروویو پسیو و اکتیو قابل مجتمع‌سازی است از محبوبیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. در این پایان‌نامه فیلتر پایین‌گذر با استفاده از رزوناتورهای پیچ پیاده‌سازی شده است. رزوناتورهای پیچ به دلیل داشتن سطح وسیع، توانایی انتقال توان بالایی را دارند و دارای تلفات رسانایی پایینی می‌باشند و در سنتز فیلترهای فرکانس بالا بسیار مورد توجه هستند. فیلتر طراحی شده دارای باند عبور و توقف گسترده و تلفات جایگذاری پایین در ناحیه عبور و سائز فشرده می‌باشد و به دلیل داشتن سطح تضعیف 20dB در ناحیه توقف دارای توانایی حذف هارمونیک‌های مزاحم در سطح بسیار خوبی می‌باشد. این فیلتر با استفاده از نرم‌افزار ADS پیاده‌سازی و در نهایت نتایج حاصل از ساخت با نتایج شبیه‌سازی مقایسه شده است.

## کلمات کلیدی :

- ۱- ساختار میکرواستریپ.
- ۲- رزوناتور پیچ.
- ۳- ساختار Delta-Stub.
- ۴- ساختار متوازی‌الاضلاع.
- ۵- خطوط باریک با امپدانس بالا.
- ۶- مدارات پسیو.
- ۷- روش ممان (Momentum).

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول : توابع تبدیل فیلتر
۲	مقدمه
۲	(۱-۱) تابع تبدیل
۴	(۲-۱) تقریب باترورث
۷	(۳-۱) تقریب چبی شف
۱۲	(۴-۱) تقریب الیپتیک
۱۶	فصل دوم: تئوری ها و مفاهیم اساسی فیلترهای مایکرواستریپ
۱۷	مقدمه
۱۷	(۱-۲) خطوط مایکرواستریپ
۱۷	(۱-۱-۲) ساختار مایکرواستریپ
۱۸	(۲-۱-۲) امواج در مایکرواستریپ
۱۸	(۳-۱-۲) تقریب شبه TEM
۱۸	(۳-۱-۲) ثابت دی الکتریک موثر و امپدانس مشخصه
۱۹	(۵-۱-۲) طول موج هدایت شده، ثابت انتشار، سرعت فازی و طول الکتریکی
۲۰	(۶-۱-۲) سنتز W/h
۲۰	(۷-۱-۲) تاثیر ضخامت نوار رسانا
۲۱	(۸-۱-۲) پراکندگی در مایکرواستریپ
۲۲	(۹-۱-۲) تلفات مایکرواستریپ
۲۲	(۱۰-۱-۲) تاثیر محفظه
۲۳	(۲-۲) خطوط کوپلاژ
۲۴	(۱-۲-۲) خازن های مد زوج و فرد
۲۵	(۲-۲-۲) امپدانس مشخصه و ثابت دی الکتریک مد زوج و فرد
۲۵	(۳-۲) قطعات و ناپیوستگی های مایکرواستریپ
۲۵	(۱-۳-۲) ناپیوستگی های مایکرواستریپ
۲۵	(۱-۱-۳-۲) اتصالات پله ای
۲۶	(۲-۱-۳-۲) اتصالات باز
۲۷	(۳-۱-۳-۲) شکاف

صفحه	عنوان
۲۷	۲-۳-۱-۴) خم‌ها
۲۸	۲-۳-۲) قطعات مایکرواستریپ
۲۸	۲-۳-۱-۲) خازن‌ها و سلف‌های فشرده
۳۱	۲-۳-۲-۲) المان‌های شبه فشرده
۳۳	۲-۳-۲-۳) رزوناتورها
۳۶	۴-۲) نکاتی در مورد رزوناتورهای مایکرواستریپ
۳۸	<b>فصل سوم : طراحی فیلتر پایین‌گذر مایکرواستریپ</b>
۳۹	مقدمه
۴۰	۳-۱) تکنولوژی‌ها و مواد پیشرفته
۴۰	۳-۱-۱) فیلترهای مایکرواستریپ ابرسانا
۴۰	۳-۱-۲) فیلترهای ریزماشین‌کاری
۴۰	۳-۱-۳) فیلترهای مایکرواستریپ با مدارات مجتمع یکپارچه مایکروویو
۴۱	۳-۱-۴) فیلترهای مایکرواستریپ با ساختار شکاف باند فوتونیک
۴۱	۲-۳) طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از رزوناتورهای مختلف
۴۲	۳-۲-۱) طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از رزوناتورهای سنجاقی
۴۵	۳-۲-۲) طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از سلول رزونانس فشرده مایکرواستریپ حلزونی
۴۶	۳-۲-۳) طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از CMRC بهبود یافته
۴۷	۳-۲-۴) طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از ساختارهای چندلایه
۴۹	۳-۲-۵) طراحی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از رزوناتور پیچ نیم‌دایره‌ای
۵۱	۳-۳) طراحی فیلتر پایین‌گذر مایکرواستریپ با استفاده از رزوناتور پیچ نیم‌دایره‌ای بهبود یافته
۵۱	۳-۳-۱) رزوناتور پیچ
۵۱	۳-۳-۲) رزوناتور پیچ با استفاده از ساختارهای Delta stub و متوازی‌الاضلاع
۵۳	۳-۳-۳) شبیه‌سازی پارامترهای پراکندگی رزوناتور طراحی شده
۵۵	۳-۳-۴) اتصال دو رزوناتور به صورت متوالی
۵۶	۳-۳-۵) اضافه کردن یک رزوناتور دیگر
۶۰	نتیجه‌گیری و جمع‌بندی
۶۱	منابع

## فهرست شکلها

صفحه		عنوان
۳	مشخصه دامنه یکنواخت برای حالت <b>LP</b> نرمالیزه.	شکل ۱-۱
۳	مشخصه $H(\omega^2)$ در حالت ایده آل.	شکل ۲-۱
۴	تغییرات <b>H</b> به ازای سه مقدار <b>N</b> .	شکل ۳-۱
۵	مربع دامنه فیلتر به ازای سه مقدار <b>N</b> .	شکل ۴-۱
۶	محل ریشه‌ها در تقریب باترورث به ازای $N=4$ .	شکل ۵-۱
۷	تغییرات تابع <b>H</b> برای سه مقدار <b>N</b> .	شکل ۶-۱
۱۰	مشخصه مربع دامنه چبی شف درجه سوم و چهارم.	شکل ۷-۱
۱۲	مکان هندسی قطب‌های تابع چبی شف و باترورث.	شکل ۸-۱
۱۳	مشخصه مربع دامنه و تابع تبدیل <b>H</b> .	شکل ۹-۱
۱۷	ساختار مایکرواستریپ.	شکل ۱-۲
۲۳	برش عرضی خطوط مایکرواستریپ کوپل شده.	شکل ۲-۲
۲۳	مدهای شبه TEM جفت خطوط کوپلاژ شده: الف مد فرد ب مد زوج.	شکل ۳-۲
۲۶	ناپیوستگی‌های مایکرواستریپ الف- اتصال پله‌ای، ب- اتصال باز، پ- شکاف، ت- خم.	شکل ۴-۲
۲۹	سلف‌های فشرده الف- خط با امپدانس بالا، ب- خط Meander، پ- مارپیچی دایره‌ای، ت- مارپیچی مربعی، ث- مدار معادل.	شکل ۵-۲
۳۰	خازن‌های فشرده: الف- خازن اینتردیجیتال، ب- خازن MIM، پ- مدار معادل خازن.	شکل ۶-۲
۳۱	خط با امپدانس بالا و طول کوتاه.	شکل ۷-۲
۳۲	خط با امپدانس پایین و طول کوتاه.	شکل ۸-۲
۳۳	الف: استاب اتصال باز، ب- استاب اتصال کوتاه.	شکل ۹-۲
۳۴	الف- رزوناتور با المان‌های فشرده، ب- رزوناتور با المان‌های شبه‌فشرده، پ- رزوناتور با خط اتصال باز ربع- طول موج، ت- رزوناتور با خط اتصال کوتاه ربع- طول موج، ث- رزوناتور حلقوی، ج- رزوناتور پیچ دایره‌ای، چ- رزوناتور پیچ مثلثی.	شکل ۱۰-۲

صفحه	عنوان
۴۲	رزوناتور hairpin [۴۸]. شکل ۱-۳
۴۳	رزوناتور Hairpin امپدانس پله‌ای [۴۹]. شکل ۲-۳
۴۳	پاسخ شبیه‌سازی و اندازه‌گیری فیلتر پایین‌گذر [۴۹]. شکل ۳-۳
۴۴	پارامترهای پراکندگی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از اتصال متوالی رزوناتورهای سنجاقی با امپدانس پله‌ای [۵۱]. شکل ۴-۳
۴۴	ساختار رزوناتور اینتردیجیتال. شکل ۵-۳
۴۵	الف : رزوناتور SCMRC و ب- مدار معادل رزوناتور مورد نظر [۵۳]. شکل ۶-۳
۴۶	شماتیک فیلتر پایین‌گذر پیشنهادی [۵۳]. شکل ۷-۳
۴۶	پاسخ شبیه‌سازی و اندازه‌گیری فیلتر مورد نظر [۵۳]. شکل ۸-۳
۴۷	رزوناتور CMRC بهبود یافته [۵۴]. شکل ۹-۳
۴۷	پارامترهای پراکندگی فیلتر پایین‌گذر با استفاده از CMRC بهبود یافته [۵۴]. شکل ۱۰-۳
۴۸	ساختار فیلتر پایین‌گذر، بخش سیاه و خاکستری به ترتیب میکرواستریپ و صفحه زمین را نشان می‌دهند [۵۵]. شکل ۱۱-۳ الف
۴۸	پارامترهای پراکندگی فیلتر با ساختار CSRR [۵۵]. شکل ۱۱-۳ ب
۴۹	رزوناتور پیچ نیم‌دایره‌ای [۵۷]. شکل ۱۲-۳
۵۰	عملکرد رزوناتور پیچ پیشنهادی [۵۷]. شکل ۱۳-۳
۵۰	عملکرد شبیه‌سازی و اندازه‌گیری فیلتر مورد نظر [۵۷]. شکل ۱۴-۳
۵۱	رزوناتور پیچ پیشنهادی. شکل ۱۵-۳
۵۲	شماتیک و مدار معادل ساختار Delta Stub. شکل ۱۶-۳
۵۳	رزوناتور اصلاح شده. شکل ۱۷-۳
۵۴	پارامترهای S رزوناتور پیشنهادی. شکل ۱۸-۳
۵۴	شکل رزوناتور پیشنهادی در محیط ADS. شکل ۱۹-۳
۵۵	فیلتر پایین‌گذر پیشنهادی. شکل ۲۰-۳
۵۵	پارامترهای پراکندگی فیلتر مورد نظر. شکل ۲۱-۳
۵۷	طرح فیلتر در محیط ADS. شکل ۲۲-۳
۵۸	فیلتر پایین‌گذر طراحی شده. شکل ۲۳-۳
۵۹	پاسخ فرکانسی فیلتر پایین‌گذر. شکل ۲۴-۳
۵۹	تاخیر گروهی فیلتر طراحی شده. شکل ۲۵-۳



# فصل اول

توابع تبدیل فیلتر

## مقدمه

در این فصل تقریب مشخصه دامنه را به عنوان اولین مسئله در طراحی یک فیلتر بررسی می‌کنیم. تقریب مشخصه دامنه عبارت است از مشخص کردن تابع تبدیلی<sup>۱</sup> که مشخصه آن به خوبی با مشخصه مورد نظر تطبیق داشته باشد. منظور از مشخصه دامنه یکنواخت، مشخصه‌ای است که در ناحیه‌ای از باند فرکانسی موسوم به باند عبور<sup>۲</sup> مقداری ثابت و در ناحیه دیگر موسوم به باند توقف<sup>۳</sup> مقدار صفر داشته باشد. فیلتری که چنین مشخصه‌ای دارد تمام مولفه‌های فرکانسی واقع در باند عبور را با دامنه یکسانی عبور می‌دهد و سیگنال‌های ناخواسته در خارج از باند عبور را حذف می‌کند. معمولاً برای سادگی ابتدا مسئله سنتز برای یک فیلتر پایین‌گذر<sup>۴</sup> به صورت نرمالیزه حل می‌گردد و سپس با تکنیک‌هایی آن را به فیلتر بالاگذر<sup>۵</sup> و میان‌حذف<sup>۶</sup> و ... تبدیل می‌کنند.

## ۱-۱) تابع تبدیل :

مشخصه دامنه یک تابع رادیکالی از  $\omega$  است و به همین دلیل در حالت کلی برای تقریب مشخصه دامنه، مربع دامنه که تابع کسری از  $\omega$  است در نظر گرفته می‌شود:

$$F(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} \quad (1-1)$$

بنابراین مشخصه دامنه یک تابع کسری زوج از  $\omega$  است. با یافتن  $|F(j\omega)|^2$  بسادگی می‌توان تابع تبدیل  $F(s)$  را بدست آورد [۱-۲].

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{NUM(j\omega)NUM(j\omega)}{DEN(j\omega)DEN(j\omega)} = \frac{\varphi(\omega^2)}{P(\omega^2)} \quad (2-1)$$

در زیر مشخصه دامنه یکنواخت برای حالت LP نرمالیزه نشان داده شده است.

<sup>1</sup> - Transfer Function.

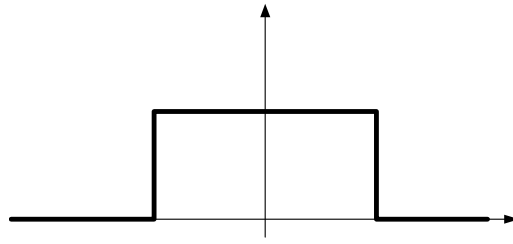
<sup>2</sup> - Pass Band.

<sup>3</sup> - Stop Band.

<sup>4</sup> - Lowpass Filter.

<sup>5</sup> - Highpass Filter.

<sup>6</sup> - Bandstop Filter.



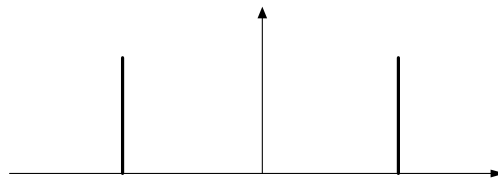
شکل ۱-۱: مشخصه دامنه یکنواخت برای حالت LP نرمالیزه.

روی محور فرکانس لبه باند عبور موسوم به فرکانس قطع<sup>۷</sup> برابر واحد فرض شده است. بعداً می توان برای دی نرمالیزه کردن تابع بجای  $\omega$  نسبت  $\frac{\omega}{\omega_c}$  را قرار داد. در روی محور دامنه مقدار ماکزیمم برای  $|F(j\omega)|^2$  برابر واحد در نظر گرفته شده است. در این مورد نیز می توان تابع بدست آمده را در یک ضریب ثابت مثبت ضرب نمود. در تقریب مشخصه دامنه یکنواخت همیشه ساده تر است که مربع دامنه را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$|F_{21}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 H(\omega^2)} \quad (3-1)$$

$-\omega_c$

در رابطه ی فوق  $\varepsilon$  ثابت ریبیل<sup>۸</sup> نامیده می شود، تابع مشخصه و یا فیلترینگ است و با حل مسئله تقریب بدست می آید. علت استفاده از رابطه (۳-۱) این می باشد که شرایطی که باید روی  $H(\omega^2)$  اعمال شود از نظر ریاضی خیلی راحت تر از شرایط  $|F(j\omega)|^2$  است. در حقیقت  $|F(j\omega)|^2$  بطور ایده آل باید در باند عبور مقدار صفر و در باند حذف مقدار بی نهایت داشته باشد. شکل (۲-۱) مشخصه  $H(\omega^2)$  را در حالت ایده آل نشان می دهد.



شکل ۲-۱: مشخصه  $H(\omega^2)$  در حالت ایده آل.

ضریب ثابت  $\varepsilon^2$  که در رابطه بین مربع دامنه و  $H$  منظور شده است، به ما اجازه می دهد که تابع  $H$  را از نظر دامنه در حالت نرمالیزه در نظر بگیریم و این نرمالیزاسیون را به صورت  $H(1) = 1$  در نظر خواهیم گرفت. بطور خلاصه شرایطی که در پیدا کردن تابع  $H$  باید در نظر گرفت را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

الف- در حالت کلی  $H$  نسبت دو چند جمله ای از  $\omega$  (زوج) است. صفرهای  $H$  فرکانس هایی است که بدون

<sup>7</sup> - Cutoff Frequency.

<sup>8</sup> - Ripple Constant.

افت از فیلتر عبور می‌کنند، چون  $|F|^2 = 1$  می‌گردد. قطب‌های  $H$  صفرهای انتقال<sup>9</sup> هستند زیرا در این فرکانس‌ها  $|F|^2 = 0$  است.

ب- برای فیلتر تمام قطب درجه  $N$ ، تابع  $H$  یک چند جمله‌ای زوج از درجه  $2N$  است.

ج- با توجه به اینکه  $|F|^2 \leq 1$  فرض شده بود لذا باید  $H(\omega^2) \geq 0$  باشد.

د-  $H(1) = 1$  است و چیزی جز نرمالیزه کردن دامنه  $H$  نیست.

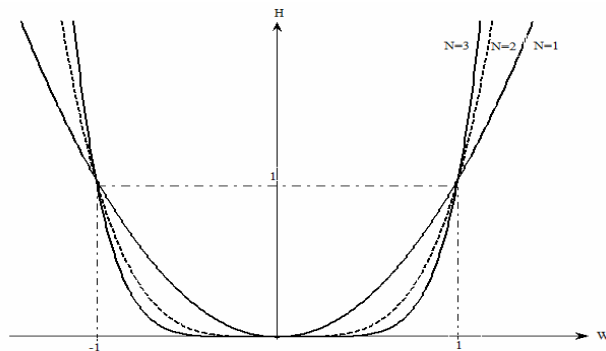
مشخصه دامنه یکنواخت در عمل کاربردهای زیادی دارد و بدلیل شکل ساده‌ای که دارد تقریب‌های کلاسیک متعددی برای آن ارائه شده است که مهمترین آنها در زیر مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲-۱) تقریب باترورث<sup>۱۰</sup>:

تقریب باترورث ساده‌ترین تقریب مشخصه دامنه یکنواخت است و برای فیلتر تمام قطب بکار می‌رود. در فیلتر تمام قطب تابع  $H$  یک چند جمله‌ای درجه  $2N$  از  $\omega$  است. در حالت کلی چنین چند جمله‌ای فقط در  $2N$  نقطه از محور  $\omega$  می‌تواند صفر شود. با توجه به شکل ایده‌آل (۲-۱) بهتر است این نقاط در طول باند عبور قرار گیرند. در تقریب باترورث تمام این نقاط در مبدا قرار می‌گیرند، یعنی:

$$H(\omega^2) = K\omega^{2N} \quad (۴-۱)$$

در رابطه فوق  $k$  ضریب ثابتی است. با اینکار علاوه بر اینکه  $H$  در مبدا صفر است کلیه مشتقات در مبدا صفر می‌گردند. بدین ترتیب مشخصه آن در حول مبدا تا حد ممکن تخت شده و بهترین دقت در حوالی این نقطه حاصل خواهد شد. ضریب  $K$  را می‌توان با توجه به  $H(1) = 1$  مساوی با ۱ فرض کرد.



شکل ۳-۱: تغییرات  $H$  به ازای سه مقدار  $N$

تقریب باترورث را تقریب تا حد ممکن تخت<sup>۱۱</sup> هم می‌گویند. در شکل (۳-۱) ملاحظه می‌گردد که با زیاد شدن  $N$  مشخصه  $H$  به شکل ایده‌آل نزدیک می‌شود. بعنوان معیاری از کیفیت مشخصه در باند حذف می‌توان شیب آن را در فرکانس قطع حساب نمود:

<sup>9</sup> - Transmission Zero.

<sup>10</sup> - Butterworth.

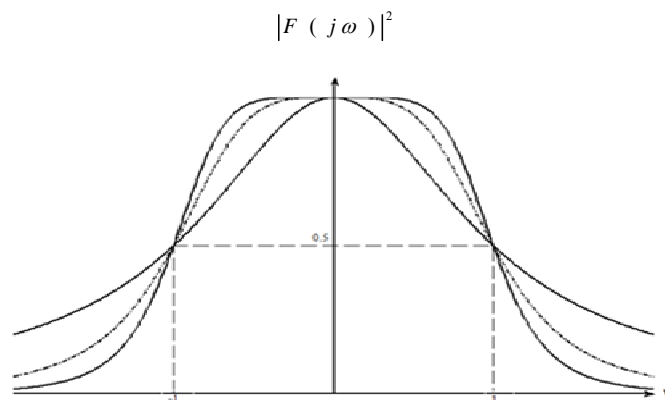
$$H'(1) = 2N\omega^{2N-1}|_{\omega=1} = 2N \quad (5-1)$$

با افزایش  $N$  شیب به طور خطی و متناسب با آن افزایش می‌یابد. توابع مربع دامنه و افت فیلتر را می‌توان از روابط کلی زیر بدست آورد:

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{2N}} \quad (6-1)$$

$$\alpha(j\omega) = 10 \log(1 + \varepsilon^2\omega^{2N}) \quad (\text{dB}) \quad (7-1)$$

پارامتر  $\alpha$  مقدار افت فیلتر را در فرکانس قطع کنترل می‌کند. در فیلتر باترورث معمولاً  $\varepsilon = 1$  فرض می‌شود که در فرکانس قطع، مقدار مربع دامنه  $0.5$  و مقدار افت  $3$  دسی‌بل خواهد بود. در دنباله مطالب  $\varepsilon$  برابر با  $1$  فرض می‌شود ولی تعمیم آن به حالت  $\varepsilon \neq 1$  ساده است.



شکل ۱-۴: مربع دامنه فیلتر به ازای سه مقدار  $N$ .

این مشخصه نیز نظیر  $H$  در حول مبدا تا حد ممکن تخت است. همانطور که قبلاً گفته شده هدف نهایی پیدا کردن تابع تبدیل  $F(s)$  است.

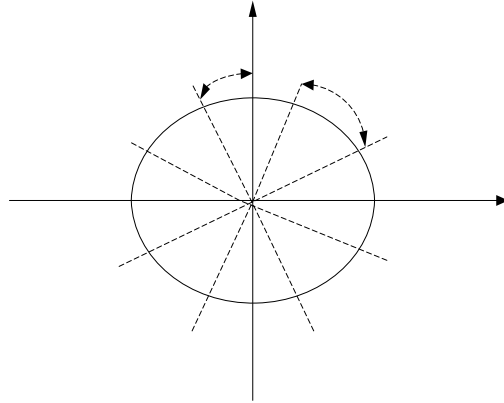
در قسمت زیر روش پیدا کردن آن را از تابع مربع دامنه در مورد فیلتر باترورث خواهیم دید. با گذاشتن  $s = j\omega$  در تابع مربع دامنه باترورث خواهیم داشت:

$$F(s)F(-s) = \frac{1}{1+(-s)^{2N}} \quad (8-1)$$

ریشه‌های مخرج که قطب‌های  $F(s)$  و  $F(-s)$  هستند را بدست می‌آوریم:

$$1 + (-s^{2N}) = 0 \rightarrow -s^2 = e^{j\frac{(2k-1)\pi}{N}} \rightarrow \begin{cases} s = \mp e^{j(\frac{\pi}{2} + (2k-1)\frac{\pi}{2N})} \\ k = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (9-1)$$

این ریشه‌ها به صورت اعداد مختلط بوده و همگی دارای ریشه واحد هستند یعنی مکان آنها در صفحه دایره‌ای به شعاع واحد است. شکل زیر مکان ریشه‌ها را به ازای  $N = 4$  نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱: محل ریشه‌ها در تقریب باترورث به ازای  $N=4$ .

نیمی از ریشه‌ها در سمت چپ صفحه  $S$  واقعند، بقیه ریشه‌ها قرینه آنها بوده و در سمت راست صفحه قرار دارند. با توجه به شرط پایداری ریشه‌ها در سمت چپ داریم:

$$\begin{cases} P_k = -\sin \left[ (2k-1) \frac{\pi}{2N} \right] + j \cos \left[ (2k-1) \frac{\pi}{2N} \right] \\ k = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (10-1)$$

این ریشه‌ها متعلق به  $F(s)$  و ریشه‌های سمت راست متعلق به  $F(-s)$  هستند. چون صورت  $F(s)$  مقداری ثابت است، لذا می‌توان این تابع را بر حسب محل قطب‌ها بصورت زیر نوشت [۱-۲]:

$$F(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^N (s - P_k)} \quad (11-1)$$

ضریب ثابت  $K$  را می‌توان با توجه به یک فرکانس مشخص و یا ضریب بزرگترین توان  $s$  تعیین کرد.

$$\begin{cases} B_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k \\ a_0 = 1 \\ a_{k+1} = a_k \frac{\cos \left( K \frac{\pi}{2N} \right)}{\sin \left[ (K+1) \frac{\pi}{2N} \right]} \end{cases} \quad (12-1)$$

ضرایب این چندجمله‌ای متقارن است و لذا محاسبه نیمی از آنها کفایت می‌کند. با توجه به رابطه (۱۱-۱) و شکل (۵-۱) داریم:

$$|P_k|^2 = \sin^2 \left[ (2k-1) \frac{\pi}{2N} \right] + \cos^2 \left[ (2k-1) \frac{\pi}{2N} \right] = 1 \quad (13-1)$$

لذا تمام قطب‌های  $F(s)$  روی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه  $s$  قرار دارند. حال اگر  $P_k$  یک قطب حقیقی باشد می‌توان نوشت:

$$\cos \left[ (2K-1) \frac{\pi}{2N} \right] = 0 \rightarrow \sin \left[ (2K-1) \frac{\pi}{2N} \right] = 1 \rightarrow P_k = -1 \quad (14-1)$$

اگر  $P_k$  یک قطب مختلط باشد، چون ضرایب  $F(s)$  حقیقی هستند  $\bar{P}_k$  نیز یک قطب مختلط خواهد بود بطوریکه می‌توان نوشت:

$$(s - P_k)(s - \bar{P}_k) = s^2 + 2 \sin \left[ (2K-1) \frac{\pi}{2N} \right] s + 1 \quad (15-1)$$

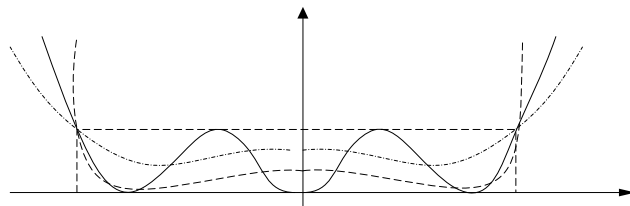
اگر  $N$  فرد باشد، یکی از قطب‌های  $F(s)$  حقیقی است و قطب‌های دیگر دو به دو زوج هستند. در صورتیکه  $N$  زوج باشد، قطب حقیقی وجود ندارد و بنابر رابطه‌های (۱۴-۱) و (۱۵-۱) می‌توان نوشت:

$$F(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{1}{s^2 + 2 \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]s + 1} \quad \text{زوج } N \quad (16-1 \text{ الف})$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2 \sin\left[\frac{2k\pi}{2N}\right]s + 1} \quad \text{فرد } N \quad (16-1 \text{ ب})$$

### ۳-۱) تقریب چبی شف<sup>۱۲</sup>:

در این تقریب نیز فیلتر تمام قطب در نظر گرفته می‌شود و لذا تابع  $H(\omega^2)$  یک چند جمله‌ای درجه  $2N$  می‌باشد. برخلاف تقریب باترورث که بهترین دقت را در حوالی باند عبور ایجاد می‌کند، در اینجا تمایزی بین نقاط مختلف باند عبور قائل نمی‌شویم. بدین ترتیب که برای باند عبور یک ماکزیمم خطای مجاز قائل می‌شویم و چند جمله‌ای  $H$  را چنان پیدا می‌کنیم که در باند عبور بین ماکزیمم خطا و می‌نیم خطا نوسان کند. بطوریکه خواهیم دید این چند جمله‌ای در باند حذف خیلی سریعتر از هر چند جمله‌ای که محدود به همین مقدار خطای باند عبور باشد به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.



شکل ۱-۶: تغییرات تابع  $H$  برای سه مقدار  $N$ .

در این مثال  $H$  از درجه  $2N = 6$  بوده و لذا برای آن ۶ صفر و بصورت سه صفر مضاعف (محل‌های تماس منحنی با محور  $\omega$ ) در نظر گرفته شده است. ابتدا ثابت می‌کنیم که در فرکانس قطع شیب این چند جمله‌ای از شیب هر چند جمله‌ای درجه ۶ دیگری بیشتر است. برای این منظور فرض می‌کنیم منحنی (۲) مربوط به یک چند جمله‌ای درجه ۶ با شیبی بیشتر باشد، بطوریکه در شکل مشاهده می‌شود لازمه آن این خواهد بود که دو منحنی (۱) و (۲) یکدیگر را در هشت نقطه قطع کنند و این ممکن نیست. زیرا اگر دو چند جمله‌ای آنها را مساوی قرار دهیم یک چند جمله‌ای درجه ۶ بدست می‌آید که ۶ ریشه خواهد داشت. حالا با استفاده از این مطلب برای اینکه ثابت کنیم منحنی (۱) از هر منحنی درجه ۶ دیگری سریعتر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، فرض می‌کنیم منحنی (۳) یک منحنی درجه ۶ باشد که گرچه در فرکانس قطع دارای شیب کمتری نسبت به منحنی (۱) می‌باشد ولی در باند حذف از آن سبقت گرفته و زودتر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و این

<sup>12</sup>-Chebyshev.

H

$$H(\omega^2) = T_2^2(\omega)$$

اکنون توان ریشه‌های چندجمله‌ای درجه دوازدهم  $T_3^2(\omega)[T_3^2(\omega) - 1]$  را در نظر بگیرید. ریشه‌های مربوط به  $T_3^2(\omega)$  همان سه ریشه مضاعف در محل می‌نیم‌های آن هستند. ریشه‌های مربوط به  $[T_3^2(\omega) - 1]$ ، یعنی محل تلاقی خط  $H = 1$  با  $T_3^2$ ، عبارت است از دو ریشه ساده در  $\omega = \pm 1$  و دو ریشه مضاعف در محل ماکزیم‌های  $T_3^2$ . پس اگر این چندجمله‌ای را بر  $\omega^2 - 1$  تقسیم کنیم ریشه‌های ساده آن حذف شده و حاصل یک چندجمله‌ای درجه ۱۰ خواهد بود که ریشه‌های مضاعف در محل سه نقطه می‌نیم و دو نقطه ماکزیم دارد. پس می‌توان تساوی زیر را بین این دو تابع برقرار کرد:

$$\sqrt{\frac{T_3^2(\omega)[T_3^2(\omega) - 1]}{\omega^2 - 1}} = K \frac{d}{d\omega} (T_3^2) = 2KT_3 \frac{dT_3}{d\omega}$$

در روابط فوق  $K$  مقدار ثابتی است که بعداً آن را خواهیم یافت. از تساوی فوق معادله دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dT_3}{\sqrt{T_3^2 - 1}} = \frac{1}{2K} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}}$$

همین استدلال را برای فیلتر درجه  $N$  نیز می‌توان انجام داد و به نتیجه کلی زیر رسید:

$$\frac{dT_N}{\sqrt{T_N^2 - 1}} = \frac{1}{2K} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \quad (17-1)$$

با معلوم بودن ضریب ثابت  $K$  می‌توان این معادله دیفرانسیل را حل کرده و  $T_N(\omega)$  را پیدا نمود. برای پیدا کردن  $K$  چندجمله‌ای  $T_N(\omega)$  را بصورت زیر فرض می‌کنیم:

$$T_N(\omega) = a_N \omega^{N+...}$$

و آن را در معادله دیفرانسیل جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{(Na_N \omega^{N+...})}{\sqrt{(a_N \omega^{N+...})^2 - 1}} = \frac{1}{2K} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}}$$

با در نظر گرفتن این رابطه بازای  $\omega \rightarrow \infty$  ضریب  $K$  به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{Na_N \omega^{N-2}}{a_N \omega^N} = \frac{1}{2K} \cdot \frac{1}{\omega} \rightarrow N = \frac{1}{2K} \quad (18-1)$$

بنابراین فرم کلی معادله دیفرانسیل بصورت زیر است:



$$\frac{dT_N}{\sqrt{T_N^2-1}} = N \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2-1}} \quad (19-1)$$

با انتگرالگیری از فرمول فوق داریم:

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(T_N) &= N \cos^{-1}(\omega) \\ T_N(\omega) &= \cos [N \cos^{-1}(\omega)] \end{aligned} \quad (20-1)$$

این عبارت علاوه بر فرم مثلثاتی در حقیقت یک چندجمله‌ای درجه  $N$  است و آن را چندجمله‌ای چبی شف می‌گویند. بازای ۳ و ۲ و ۱  $N=$  نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$T_1(\omega) = \cos [\cos^{-1}(\omega)] = \omega$$

$$T_2(\omega) = \cos [2 \cos^{-1}(\omega)] = 2 \cos^2 [\cos^{-1}(\omega)] - 1 = 2\omega^2 - 1$$

$$T_3(\omega) = \cos [3 \cos^{-1}(\omega)] = 4 \cos^3 [\cos^{-1}(\omega)] - 3 \cos [\cos^{-1}(\omega)] = 4\omega^3 - 3\omega$$

با استفاده از دو رابطه مثلثاتی  $\cos 2Nx = 2 \cos^2 Nx - 1$

و  $\cos(N+1)x + \cos(N-1)x = 2 \cos x \cdot \cos Nx$  می‌توان روابط زیر را برای محاسبه چندجمله‌های

چبی شف بدست آورد:

$$T_{2N}(\omega) = 2T_N^2(\omega) \quad (21-1)$$

$$T_{N+1}(\omega) = 2\omega T_N(\omega) - T_{N-1}(\omega) \quad (22-1)$$

تابع  $H$  برابر مربع چندجمله‌ای چبی شف است. می‌توان با استفاده از فرم مثلثاتی (۲۰-۱) نشان داد که شیب این تابع در فرکانس قطع برابر است با:

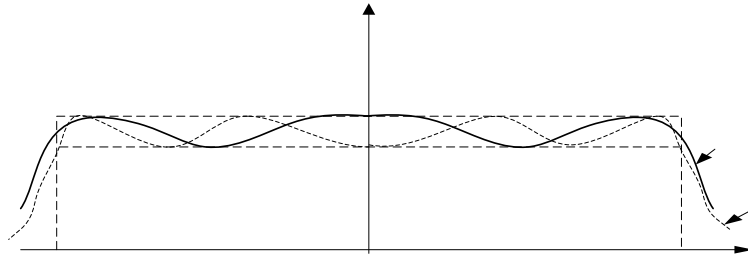
$$H'(1) = 2N^2 \quad (23-1)$$

بطوریکه ملاحظه می‌شود شیب تابع  $H$  با مجذور تابع  $N$  افزایش می‌یابد، در حالیکه در تقریب باترورث شیب متناسب با  $N$  بود. توابع مربع دامنه و افت فیلتر نیز به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2} \quad (24-1)$$

$$\alpha(\omega) = 10 \log(1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega)) \quad dB \quad (25-1)$$

در محاسبه این توابع احتیاجی به  $T$  در فرم چندجمله‌ای نیست، بلکه می‌توان از همان فرم مثلثاتی استفاده نمود. با استفاده از رابطه  $\cos^{-1}(\omega) = j \cosh^{-1}(\omega)$ ، فرم مثلثاتی را می‌توان به یک فرم هیپربولیک برای محاسبه باند حذف تبدیل کرد. در شکل زیر مشخصه مربع دامنه چبی شف درجه سوم و چهارم رسم شده است.



شکل ۷-۱. مشخصه مربع دامنه چبی شف درجه سوم و چهارم.

این مشخصه مانند تابع  $H$  در باند عبور بین دو مقدار نوسان می کند و به همین دلیل فیلتر چبی شف را اصطلاحاً فیلتر با ریپل مساوی نیز می گویند. پارامتر  $\epsilon$  مقدار افت فیلتر در فرکانس قطع که همان ماکزیمم افت فیلتر در طول باند عبور است را نشان می دهد.

$$\alpha(1) = a_{\max} = 10 \log(1 + \epsilon^2) \quad (26-1)$$

به  $a_{\max}$  در اصطلاح ریپل می گویند. چندجمله ای چبی شف دارای خواص زیر است:

الف: برای همه مقادیر  $H$  داریم:

$$0 \leq |T_N| \leq 1; \quad 0 \leq |\omega| \leq 1 \quad -1 \quad (27-1)$$

$$|T_N(\omega)| > 1; \quad |\omega| > 1$$

ب:  $T_N(\omega)$  یک چندجمله ای فرد یا زوج است اگر  $N$  یک عدد صحیح فرد یا زوج باشد.

پ:

اگر  $N$  فرد باشد:

$$\begin{cases} |T_N(0)| = 0 \\ |T_N(1)| = 1 \end{cases} \quad (28-1)$$

اگر  $N$  زوج باشد:

با توجه به خاصیت اخیر و شکل (۷-۱) فیلترهای چبی شف با درجه زوج افت DC دارند.

$$|F(0)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \neq 1 \quad (29-1)$$

برای پیدا کردن تابع تبدیل نظیر فیلتر باترورث عمل می کنیم. ابتدا در رابطه مربع دامنه  $S = j\omega$  را قرار

می دهیم:

$$F(s)F(-s) = \frac{1}{1+\epsilon^2 \cos^2[N \cos^{-1}(\frac{s}{j})]} \quad (30-1)$$

سپس باید ریشه ها را بدست آورده و ریشه های LPH را به  $F(s)$  اختصاص داد.

$$1 + \epsilon^2 \cos^2[N \cos^{-1}(\frac{s}{j})] = 0$$

$$1 + s^2 \cos^2 [N \cos^{-1}(\frac{s}{j})] = \frac{z}{s} \quad (31-1)$$

برای حل این معادله فرض می‌کنیم:

$$N \cos^{-1}(\frac{s}{j}) = x + jy \quad (32-1)$$

این رابطه را در معادله (32-1) قرار می‌دهیم و با ترکیب این روابط می‌توان ریشه‌های LPH که در واقع همان قطب‌های  $F(s)$  هستند را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} P_k = -a \sin[(2k-1)\frac{\pi}{2N}] + j b \cos[(2k-1)\frac{\pi}{2N}] \\ k = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (33-1)$$

در این روابط  $a$  و  $b$  مقادیر ثابتی هستند که بستگی به  $N$  و  $\varepsilon$  داشته و از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} a = \sinh[\frac{1}{N} \sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})] \\ b = \cosh[\frac{1}{N} \sinh^{-1}(\frac{1}{\varepsilon})] \end{cases} \quad (34-1)$$

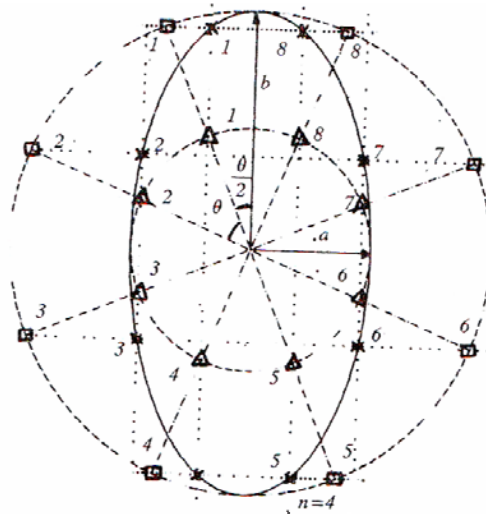
اگر در رابطه (33-1) مقادیر  $a = b = 1$  را قرار دهیم فرمول قطب‌های باترورث حاصل می‌شود. با توجه به اینکه قطب‌های باترورث روی دایره‌ای به شعاع 1 قرار دارند قطب‌های چبی شف از نقطه نظر قسمت حقیقی اش  $\sigma_k$  نظیر قطب‌های باترورث منتهی به دایره‌ای به شعاع  $a$  و از نظر قسمت موهومی اش  $\omega_k$  نظیر قطب‌های باترورث با دایره‌ای به شعاع  $b$  است. این مطلب که در روی شکل (1-8) به نمایش درآمده است، مکانی به صورت بیضی را برای قطب‌ها ایجاد می‌کند. با تعیین قطب‌ها از رابطه (33-1) می‌توان تابع تبدیل فیلتر چبی شف را به صورت زیر بدست آورد:

$$F(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^N (s - P_k)} \quad (35-1)$$

ضریب ثابت  $K$  را می‌توان با توجه به یک فرکانس مشخص مثلاً در  $s = 0$  تعیین کرد. می‌دانیم:

ولی در فیلترهایی با درجه زوج  $T_N^2(0) = 1$  بوده و  $|F(0)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$  است. پس به کمک این روابط می‌توان  $K$  را پیدا کرد.

$$K = F(0) \prod_{k=1}^N (-P_k) \quad (36-1)$$



شکل ۱-۸: مکان هندسی قطب های تابع چبی شف و باترورث (قطب های چبی شف  $\times$  و قطب های باترورث دایره بزرگتر  $\square$  و قطب های باترورث دایره کوچکتر  $\Delta$ ).

قبلا دریافتیم که در تقریب چبی شف زوج، در فرکانس صفر افت  $DC$  داریم. تقریب با افت  $DC$  را نمی توان برای فیلتر پسیو<sup>۱۳</sup> بدون افت که برای بار و منبع مقدار مساوی لازم است بکار برد. تقریب با افت  $DC$  به ترانس ایده آل نیاز دارد که آن را غیر عملی می سازد. لازم است توضیح دهیم در طراحی فیلتر به صورت فعال نیازی به حذف افت  $DC$  نداریم. برای حذف افت  $DC$  دو کار می توان انجام داد:

الف - درجه فیلتر را بالا برد تا فیلتر از درجه فرد شود که این کار اقتصادی نیست.

ب - با تغییری مناسب در فیلتر چبی شف افت  $DC$  را حذف نمود که این کار اقتصادی تر است. در این روش کافی است که بتوانیم به روشی یک صفر در فرکانس صفر ایجاد کنیم. لیکن اگر بخواهیم صفری به سیستم اضافه کنیم، درجه فیلتر بالاتر خواهد رفت و مناسب ترین راه حل شیفت دادن اولین صفر با فرکانس  $\Omega_0$  به سمت مرکز است که با تغییر متغیر مناسبی می توان این کار را انجام داد.

### ۱-۴) تقریب الپتیک<sup>۱۴</sup>:

تقریب الپتیک یا بیضوی فیلتر تمام قطبی که دارای رپل<sup>۱۵</sup> های مساوی در باند عبور و باند حذف می باشد را شامل می شود [۴-۵]. مشخصه مربع دامنه و تابع  $H(\omega^2)$  برای فیلتر درجه ۵ در شکل (۱-۹) نشان داده شده است. همانطوریکه در شکل مشاهده می شود تابع  $H$  دارای ۵ صفر و ۵ قطب از مرتبه دوم می باشد و بعلاوه این تابع نسبت دو چند جمله ای است.

<sup>13</sup> -Passive.

<sup>14</sup> -Elliptic.

<sup>15</sup> -Ripple.