چکیده

تشخیص مرتبه فرآیندهای میانگین متحرک با واریانس نامتناهی

در برازش الگوی مناسب به فرآیندهای ایستا [1]با نوفه سفید[2] نرمال یا دارای گشتاورمرتبه دوم متناهی (خطا)، تابع خود همبستگی نمونه ایی وسیله مهمی در تشخیص نارسایی و بیان خواص یک فرآیند تصادفی ایستا است. دراغلب این فرآیندها، مدلهای خطی به داده ها برازش می شود و تابع خـود همبـستگی نمونـه ایـی [3]همگرایـی ضعیف دارد. از طرفی این تابع نقش به سزایی در تعیین مرتبه یک فرآیند میانگین متحرک برازش شده به داده ها را دارد.

حال اگر نوفه سفید دارای واریانس متناهی نباشد، تکیه بر تابع خود همبستگی نمونه ایی مفید نمی باشد. با استفاده ازتابع هم تفاضلی به عنوان معیاروابستگی مناسب دراین گونه فرآیندهای ایستا، نشان داده مـی شـود که این تابع می تواند ابزار مناسب جدیدی بـرای تـشخیص مرتبـه فرآینـدهای میـانگین متحـرک بـا واریـانس نامتناهی باشد.

براساس تابع مشخصه تجربی، برآوردی برای تابع هـم تفاضـلی[4] بیـان وسـازگاری آن نـشان داده مـی شـود. همچنین توزیع حدی آن به طور کامل بررسی و درنهایت با مطالعه شبیه سازی نشان داده مـی شـود کـه روش ارائه شده به خوبی بیانگرمطالب فوق می باشد.

1. Stationary
2. White Noise
3. Sample Auto Corrolation
4. Codifference Function

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جداول

عنوان **صفحه**

فهرست نمودار ها

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه وتاریخچه

برازش الگوی مناسب به یک فرآیند، مسئله ایی است که توجه بسیاری ازمحققان را به خود جلب کرده است. حل این مسئله درشاخه های مختلف علوم، کاربردهای فراوانی خواهد داشت. سعی در برازش الگوی مناسب به یک فرآیند برای پیش بینی رفتار آینده فرآیند مفید می باشد.

دربسیاری ازموارد، فرض نرمال بودن برای مشاهدات منطقی به نظرمی رسد. ازطرف دیگراخیرا در بسیاری ازتقاضاها، مانند فرآیندهای سیگنالی، مخابراتی، اقتصادی، شیمی و فیزیک، توجه بسیاری ازآماردانان درآنالیز سریهای زمانی متوجه داده هایی شده است که دارای خواص خاصی مانند وابستگی های طولانی مدت، غیرخطی بودن و توزیع سنگین دم[1] وغیره هستند.

مهمترین کلاس ازاین توزیع ها، توزیع های پایدار[2] می باشند که کلاس انعطاف پذیری برای مدل بندی داده ها می باشد و توزیع نرمال نیز دراین کلاس قرار دارد.

اهمیت این کلاس از توزیع ها، بطور قوی در قضیه حد مرکزی تعمیم یافته مشخص می شود، بطوری که نشان داده می شود که توزیع های پایدار تنها توزیع ممکن حدی برای مجموع یک سری متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع [3] می باشد.

درفرآیندهای ایستا با گشتاوردوم متناهی، تابع خودکوواریانس وخود همبستگی نمونه ایی برای نمونه تصادفی $X_1,\ldots,X_n$ به صورت

$$\hat{\gamma}(h)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-|h|}(X_{t+|h|}-\overline{X})(X_t-\overline{X}) \qquad |h|<n$$

$$\hat{\rho}(h)=\frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

1. Tailed Heavy
2. Stable Distribution
3. Independent and Identically Distributed

تعریف می شودکه به تابع خود همبستگی فرآیند

$$\rho(h) = \frac{\operatorname{cov}(X_{t+h}, X_t)}{\gamma(\circ)}$$

همگرا است وبه عنوان ابزار مناسبی برای برازش مدل و بیان خواص یک فرآیند بکار می رود.

روشهای متعددی برای تشخیص مرتبه فرآیندهای خود بازگشتی میانگین متحرک ارائه شده است. (رجوع شود به چوی[1] در(۱۹۹۲)). درحالت خاص، برای فرآیندهای میانگین متحرک از مرتبه qبا واریانس متناهی با استفاده ازاین واقعیت که تابع خود همبستگی $\rho(.)$ بعد از تاخیر qصفرمی باشد و بکارگیری تابع خود همبستگی نمونه ایی $\hat{\rho}(.)$ به عنوان ابزاری در تشخیص مرتبه فرآیند درروش باکس وجنکینس[2]، تلاش می شود مرتبه فرآیندهای میانگین متحرک بااستفاده از رسم $\hat{\rho}(.)$ در تاخیرهای $h = 1,...,k$ وبررسی تاخیری که بعد از آن $\hat{\rho}(.)$ تقریبا صفر می باشد، تعیین شود.

بارتلت[3] نشان داد که در فرآیند های $MA(q)$با نوفه سفید، iid، با میانگین صفر و واریانس متناهی،

$$\sqrt{n}\hat{\rho}(k) \xrightarrow{d} \left(1 + 2\sum_{j=1}^{q} \rho^{2}(j)\right)^{1/2} Z \qquad k > q$$

که در آن Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

درعمل $\rho(j), j = 0,1,...,q$ ، مشخص نمی باشند. بنابراین برای تشخیص مرتبه q، تابع خود همبستگی نمونه ایی را با فاصله اطمینان $\pm\frac{1.96}{\sqrt{n}}$رسم کرده و تابع خود همبستگی نمونه ایی را تقریبا صفردرنظرمی گیریم هرگاه مقادیرآن درداخل باند قرار بگیرد. این فاصله اطمینان، در حقیقت فاصله اطمینان مجانبی تابع خود همبستگی نمونه ایی در فرآیندهای iid می باشد.

درحالتی که واریانس نامتناهی و فرآیند دارای توزیع سنگین دم باشد تمرکز بر $\overline{X}$چندان معنی دار نیست.

با در نظر گرفتن تابع خود همبستگی نمونه ایی به صورت

1. Choi
2. Box-Jenkins
3. Bartlett

$$\hat{\rho}_n(h) = \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)} \qquad h = 0,1,\ldots$$

که درآن

$$\hat{\gamma}_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t X_{t+h} \qquad h = 0,1,\ldots$$

حال این سوال طبیعی است که، آیا هنوز روشهای کلاسیک برازش بر پایه تابع خود همبستگی نمونه درمدلهای سنگین دم قابل استفاده می باشد؟

دربررسی تابع خودهمبستگی نمونه ایی درفرآیندهای خطی با واریانس نامتناهی، داویزورسنیک[1] درسال(۱۹۸۶) نشان دادند که این تابع دارای توزیع حدی می باشد و در ادامه کارآنها، درسال(۱۹۹۸) آدلر[2] با بررسی فرآیند های $MA(q)$، α- پایدار متقارن، *توزیع حدی دقیق تابع خود همبستگی نمونه ایی را به دست آورد* و نشان داد

$$\left(\frac{n}{Ln\, n}\right)^{1/\alpha} \hat{\rho}(h) \xrightarrow{d} \left(1 + 2\sum_{j=1}^{q} \left|\rho(j)\right|^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \frac{S_1}{S_0}$$

که در آن S_1, S_0متغیر های تصادفی مستقل پایدارمی باشند. این هدف را درفصل سوم دنبال خواهیم کرد ویک بررسی دقیق از موارد ذکر شده انجام شده است.

روسادی[3] درسال(۲۰۰۴) با بکارگیری تابع هم تفاضلی، ازآن به عنوان ابزارمناسبی جهت تشخیص مرتبه فرآیند استفاده نمود. تابع هم تفاضلی برای فرآیندهای ایستای $\{X_t\}$ در تاخیر kبه صورت

$$\tau(k) = \tau_k(s,-s) = -Ln\,E\exp(is(X_{t+k} - X_t)) + Ln\,E\exp(isX_{t+k}) + Ln\,E\exp(-isX_t) \qquad (1.1)$$

تعریف می شود که درآن $s \in R, k \in Z$، همچنین تابع هم تفاضلی استاندارد شده به صورت

$$I(k) = \frac{\tau(k)}{\tau(0)}$$

تعریف می شود.

1. Davis and Resnick
2. Adler
3. Rosadi

این تابع توسط سامور دینسکی و تاکو[1] در سال (۱۹۹۴) به عنوان معیاروابستگی درسریهای زمـانی سـنگین دم معرفی شد.

درفرآیندهای ایستای گوسین این تابع درحقیقت ضریبی ازتابع کوواریانس می باشد بدین معنی که

$$\tau(k) = -s^{۲}\gamma(k)$$

و

$$I(k) = \rho(k)$$

دراین پایان نامه با استفاده از تابع (۱.۱)، برآوردگری برای این تابع براساس نمونه تصادفی $X_{۱},...,X_n$ در تاخیر $k \in Z$ به صورت زیر ارائه می شود.

$$\hat{\tau}(s,-s,k) = \sqrt{\frac{N-k}{N}} \times \{-\ln\phi(s,-s,k) + \ln\phi(s,\circ,k) + \ln\phi(\circ,-s,k)\}$$

زمانی که

$$\Phi(u,v;k) = \begin{cases} \frac{۱}{N-k}\sum_{t=۱}^{n-k}\exp(i(ux_{t+k}+vx_t)) & k \geq \circ \\ \frac{۱}{N+k}\sum_{t=۱}^{n+k}\exp(i(ux_{t+k}+vx_t)) & k < \circ \end{cases} \qquad u,v \in R$$

و نشان داده می شود که این برآوردگر، برآوردگری سازگارخواهد بود. این هدف را در فصل چهارم، بخش دوم بررسی می کنیم. در فصل چهارم با در نظرگرفتن فرآیند $MA(q)$، بصورت

$$X_t = \sum_{j=\circ}^{q} c_j \varepsilon_{t-j}$$

زمانی که ε_tمتغیرهای تصادفی iidبا توزیع α- پایدارمتقارن $(S\alpha S)$با $\circ < \alpha \leq ۲$، می باشند یعنی تابع مشخصه ε_t بفرم زیر

$$E\exp(is\varepsilon_t) = \exp(-\sigma^{\alpha}|s|^{\alpha})$$

1. Rosadi
2. Samordinesky and Taqqu

باشد، نشان داده می شود که

$$\tau(k)=\sigma^{\alpha}|s|^{\alpha}\left[\sum_{j=0}^{q-k}\left(|c_{j+k}-c_{j}|^{\alpha}-|c_{j+k}|^{\alpha}-|-c_{j}|^{\alpha}\right)\right] \qquad |k|\le q$$

و برای تاخیرهای بزرگتراز q، این تابع صفر خواهد شد. همچنین در بخش سوم فصل چهارم به بررسی توزیع حدی تابع هم تفاضلی می پردازیم. تئوری تشخیص مرتبه فرآیندهای α- پایدار، توسط راسنفلد[1] در سال (۱۹۷۶) مطرح شد. اما نگرش اصلی این پایان نامه بر اساس نتایج روسادی و دیستلر(۲۰۰۴) می باشد.

1.Rosenfeld

فصل دوم

توزیع α- پایدار

توزیع های α- پایدارکلاس بسیار وسیعی از توزیعها را تشکیل می دهند و به علت جرم موجود دردمهای تابع چگالی، این گروه از توزیع ها به توزیع های سنگین دم معروف می باشند.

علت نامگذاری این گروه از توزیع ها به توزیع های پایدار به دلیل خصوصیتی است که این گروه ازمتغیرهای تصادفی دارند که هر ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی پایدار، خود متغیرتصادفی پایدار است.

مطالعه روی این گروه از توزیعها از سال ۱۹۲۰ توسط پائول لوی[1] آغاز شد. محققان با مطالعه روی میدان جاذبه ستارگان، نوفه های موجود در وسایل ارتباطی و موارد تجربی مانند موارد مالی واقتصادی به خصوص در کشورها ی دارای تورم به وجود چنین توزیع هایی پی بردند.

۱.۲. معرفی توزیع α- پایدار

تاکنون چهار نوع پارامتر بندی برای این توزیع توسط افراد مختلف مطرح شده است کاربرد بعضی ازاین انواع پارامتربندی درموارد نظری و تئوری وکاربرد بعضی دیگردرموارد عملی و شبیه سازی، پیچیدگی های موجود را می کاهد. دراین مقاله پارامتربندی که توسط ساموردینستکی و تاکو (۱۹۹۴) ارائه شده بیان می شود.

توزیع α- پایدارتوسط چهار پارامتر مشخص می شود و به اختصار آن را به این صورت نمایش می دهیم.

$$X \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$$

α: شاخص پایداری است و $\alpha \in (0,2]$،

β: پارامتر چولگی است و $\beta \in [-1,1]$،

σ: پارامتر مقیاس می باشد و $\sigma > 0$است و

1. Paul levy

μ: پارامتر مکان می باشد متعلق به اعداد حقیقی است.

تعریف ۱.۱.۲. متغیر تصادفی X را دارای توزیع پایدار گویند هرگاه به ازای هر ثابت مثبت A, B، یک ثابت مثبت C و ثابت حقیقی D وجود داشته باشد به قسمی که

$$A X_1 + B X_2 \overset{d}{=} C X + D$$

که در آن X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع با X می باشند. متغیر تصادفی X اکیدا پایدار نامیده می شود، اگر رابطه بالا برقرار و $D = 0$ باشد.

قضیه ۱.۱.۲. برای هر متغیر تصادفی پایدار، ثابت $\alpha \in (0,2]$ وجود دارد به قسمی که ثابت C در تعریف بالا به صورت

$$C^{\alpha} = A^{\alpha} + B^{\alpha}$$

می باشد.

اثبات: (رجوع شود به قضیه (۵.۱) در فلر(۱۹۷۱)).□

مثال ۱.۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد در اینصورت X یک متغیر تصادفی پایدار با $\alpha = 2$ می باشد زیرا

$$AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2 + B^2)\sigma^2)$$

و بنا به تعریف ۱.۱.۲ ،

$$C = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad D = (A + B - C)\mu$$

مثال ۲.۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی کشی استاندارد باشد در این صورت X یک متغیر تصادفی پایدار با $\alpha = ۱$ می باشد زیرا

$$AX_۱ + BX_۲ \sim Cauchy \quad (۰, A + B)$$

که در آن

$$C = A + B \, , D = ۰$$

تعریف ۲.۱.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار می باشد اگر و تنها اگر به ازای هر $n \geq ۲$، ثابت $C_n > ۰$ و ثابت حقیقی D_n وجود داشته باشد به طوری که

$$X_۱ + X_۲ + \ldots\ldots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n$$

که $X_۱, X_۲, ..., X_n$ متغیر تصادفی و یک کپی از X می باشند.

با مراجعه به قضیه ۵.۱.۱ کتاب فلر نشان داده می شود که لزوماً $C_n = n^{1/\alpha}$ می باشد.

توجه: تعریف ۲.۱.۲ با تعریف ۱.۱.۲ معادل است.

تعریف ۳.۱.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع α- پایدار می باشد هرگاه دارای تابع مشخصه ایی به صورت زیر باشد

$$E e^{i\theta X} = \begin{cases} \exp\{ -\sigma^{\alpha} |\theta|^{\alpha} (۱ - i\beta (sign\ \theta) \tan \frac{\pi\alpha}{۲}) + i\mu\theta \} & \alpha \neq ۱ \\ \exp\{ -\sigma |\theta| (۱ + i\beta \frac{۲}{\pi} (sign\ \theta) \ln |\theta|) + i\mu\theta \} & \alpha = ۱ \end{cases}$$

درتوزیع های α- پایدار تنها در سه حالت فرم بسته تابع چگالی وجود دارد زمانی که $\alpha = ۲$، توزیع نرمال، $\alpha = ۱$، توزیع کوشی و $\alpha = ۱/۲$ توزیع مربوطه لوی خواهد شد.

۲.۲. بررسی تابع چگالی توزیع های پایدار

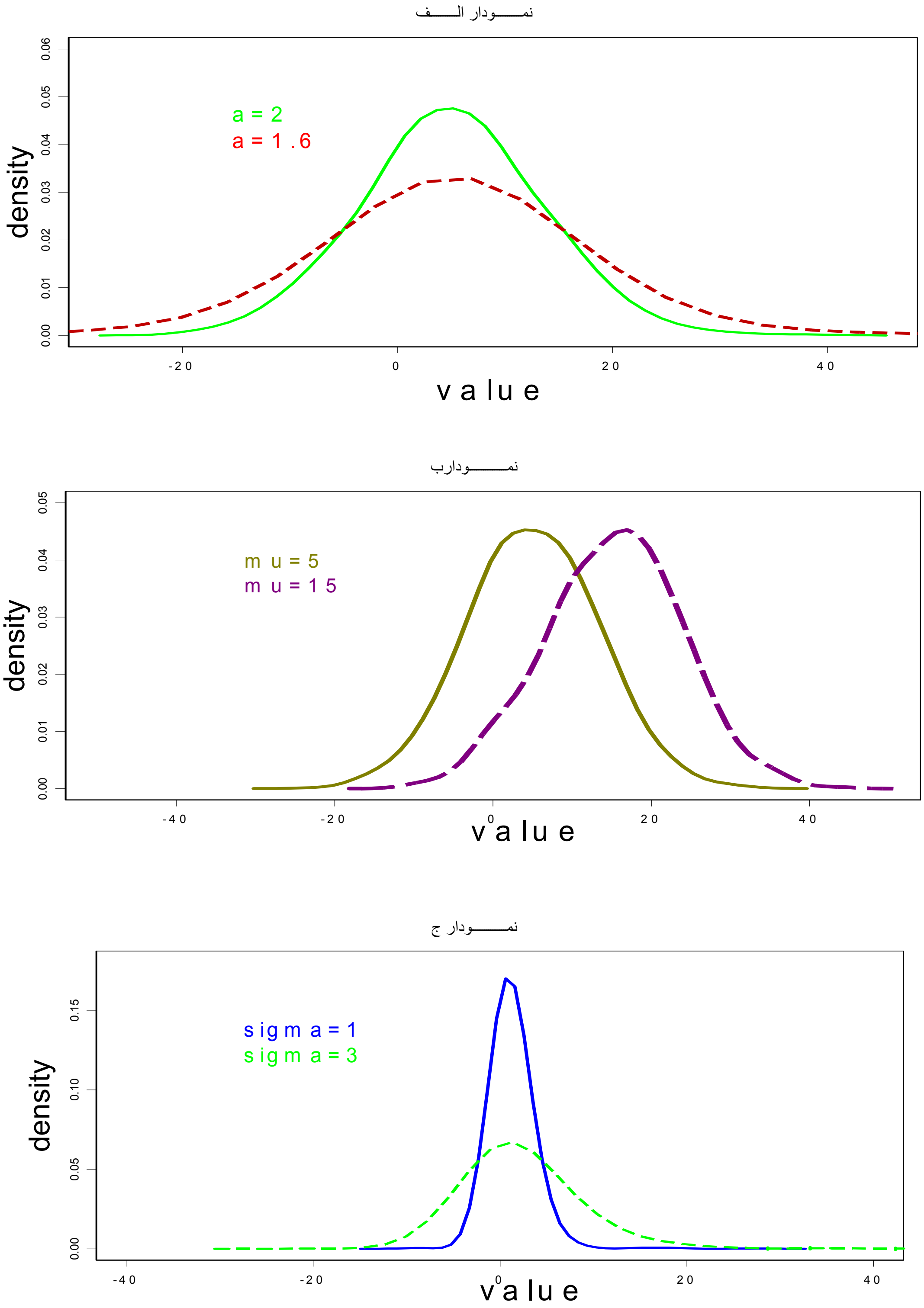
از آنجائیکه فرم بسته ایی برای تایع چگالی توزیع α- پایدار وجود ندارد به راحتی نمی توان تـابع چگـالی را رسم کرده و نقش پارامترهای موجود در این توزیع را دید.

برای محاسبه تابع چگالی این کلاس از متغیرها فعالیت هایی از سال (۱۹۷۳) توسط هولت و کراو[1] آغازشد تا این که کاملترین الگوریتم در سال (۱۹۹۷) توسط نولان[2] نوشته شد. از طریق این برنامه اجرایی محاسـبه تـابع چگالی، تابع توزیع، محاسبه چندک ها، شبیه سازی داده ها وکارهای جالب دیگر امکان پذیر می باشـد. بـا ورود به صفحه خانه ایی(John P.Nolan homepage) می تـوان بـه ایـن برنامـه اجرایـی دسترسـی پیـدا کـرد. همچنین با استفاده از نرم افزار Splus نیز می توان تابع چگالی، تابع توزیع و.... را به دست آورد.

در صفحه بعد تغییرات پارامترهای توزیع پایدار، در شکل۱ آمده است.

در نمودار(الف) نشان داده شده است که هرچه پارامتر پایداری α کوچکتر شود جرم موجود در دمها بیشتر می شود و این دلیلی است که توزیع های پایدارسنگین دم می باشند. نمودار (ب) نشان مـی دهـد کـه پـارامتر μ، معیاری برای میانگین می باشد و نمودار(ج) پارامتر σ را معیاری برای پراکندگی معرفی می کند.

1. Holt and Crow
2. Nolan



شکل۱. بررسی تابع چگالی توزیع پایدار

برای بررسی بهتر پارامتر α به عنوان معیار پایداری، محاسبه $p(X > C)$ برای توزیع های کوشی، لوی و نرمال برای C های مختلف انجام شده است که در جدول زیر بیان می شود.

جدول ۱. محاسبه احتمالات بالای C برای سه نوع توزیع

Levy($\alpha = ۰٫۵$)	Cauchy($\alpha = 1$)	Normal($\alpha = ۲$)	C
۱	۰٫۵	۰٫۵	۰
۰٫۶۸۲۷	۰٫۲۵	۰٫۱۵۸۷	۱
۰٫۵۲۰۵	۰٫۱۴۷۶	۰٫۰۲۲۸	۲
۰٫۴۳۶۳	۰٫۱۰۲۴	۰٫۰۰۱۳۴۷	۳
۰٫۳۸۲۹	۰٫۰۷۸	۰٫۰۰۰۰۳۱۶۷	۴
۰٫۳۴۵۳	۰٫۰۶۲۸	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۲۸	۵

در این جدول نشان داده شده که توزیع لوی سنگین دم تر است یعنی هراندازه α کمتر می شود جرم موجود دردمها بیشتر می شود.

۳.۲. تمایز توزیع های α- پایدار ($۰ < \alpha \leq ۲$) از توزیع نرمال

از آنجا که درتوزیع های α- پایدار

$$E\left|X\right|^p = \begin{cases} < \infty & ۰ < p < \alpha \\ \infty & p \geq \alpha \end{cases} \qquad , ۰ < \alpha < ۲$$

لذا توزیع های α-پایدار، $\alpha < ۲$، دارای گشتاور دوم نامتناهی می باشند. تاکنون روش دقیقی برای شناسایی این گروه از توزیعها موجود نمی باشد. حال زمانی که α به۲نزدیک میشود، راههای مختلفی برای تمایز این توزیعها

از توزیع نرمال وجود دارد. یکی از این راهها، رسم $S_N^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ بر حسب Nاست.

ازآنجا که این گروه از توزیعها دارای گشتاور دوم متناهی نمی باشند، لذا

$$S_N^2 \not\to \sigma^2$$

با افزاش اندازه نمونه N، S_N^2به مقدار ثابتی همگرا نمی باشد. (رجوع شود به کلایوز[1]در(۱۹۷۲))

۴.۲. قضیه حد مرکزی

یکی ازمشهورترین قضایا در آمار قضیه حد مر کزی است که بر اساس آن برای دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$از متغیرهای مستقل و هم توزیع با میانگین و واریانس متناهی μ,σ^2 ،

$$\frac{\sum X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\xrightarrow{d}Z$$

که در آن $Z\sim N(0,1)$،

حال اگر واریانس متغیرهای iid متناهی نباشد چه اتفاقی خواهد افتاد؟ آیا دراین صورت نیز دنباله مناسبی ازاعداد ثابت $a_n,b_n>0$ می توان یافت که $\frac{\sum X_i-a_n}{b_n}$ دارای توزیع حدی باشد؟ و آیا توزیع حدی بازهم نرمال خواهد بود. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید $X_1,X_2,...$ متغیرهای تصادفی iidباشد، در اینصورت

$$\frac{\sum X_i-a_n}{b_n}\xrightarrow{d}Z \qquad a_n\in R,\quad b_n>0$$

اگر وتنها اگر Zمتغیر تصادفی پایدار باشد. در این حالت لزوما $0<\alpha\le 2, b_n=n^{-\frac{1}{\alpha}}$می باشد.

1.Clives

اثبات: (رجوع شود به کتاب فلر در(۱۹۷۵) و به کلموگروف در(۱۹۶۸)).□

فصل سوم

بررسی تابع خود همبستگی نمونه ایی درفرآیندهای میانگین متحرک α- پایدار

درفرآیند های میانگین متحرک α- پایدارجهت بررسی توزیع حدی تابع خود همبستگی نمونه ایی، بیان چند مفهوم لازم می باشد. دربخش اول به بیان تعاریف وقضایای مورد نیاز پرداخته شده است. بخش دوم به بررسی دقیق توزیع حدی تابع خود همبستگی نمونه ایی در این گونه فرآیند ها اختصاص داده شده است.

۱.۳. معرفی توابع به کندی تغییر پذیر و به طور منظم تغییر پذیر[۱]

دراین قسمت با معرفی توابع به کندی تغییر پذیرو بطورمنظم تغییر پذیر، به بیان قضایای مورد استفاده در بررسی توزیع حدی تابع خود همبستگی نمونه ایی در فرآیند های $MA(q)$، α- پایدار می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۳. تابع اندازه پذیر مثبت uبر $[a,\infty)$ را تابعی به طور منظم تغییرپذیر در بی نهایت با مولفه $-\infty < \rho < \infty$ گویند اگروتنها اگر

$$\frac{u(tx)}{u(t)} \rightarrow x^{\rho}, \quad t \rightarrow \infty \qquad \forall \quad x > ٠$$

که به صورت $u \in RV(\rho)$ نشان می دهیم. اگر $\rho = ٠$، در اینصورت تابع uرا تابع به کندی تغییر پذیر دربینهایت می نامیم و به صورت $u \in SV$ نشان می دهیم.

مثال ۱.۱.۳. توابع

$$x^{\rho}, x^{\rho} Lnx$$

1.Slowly and Regularly varying Function

توابع بطورمنظم تغییرپذیرمی باشند. زمانی که $\rho = ۰$، توابع بالا توابع به کندی تغییرپـذیرمی شـوند. همچنـین هرتابع مثبت با حد متناهی وقتی که $x \to \infty$، مثالی از تابع به کندی تغییر پذیرمی باشد.

لم ۳.۱.۱. فرض کنید $u \in RV(\rho)$، در اینصورت

الف. $u(x) = x^{\rho} L(x)$، که $L \in SV$

ب: تابع $u^{-1}(y) = \inf\{x : u(x) \geq y\}, y > ۰$ ، تابعی بطورمنظم تغییرپذیربا مولفه $1/\rho$، $\rho > ۰$، $(u^{-1} \in RV(1/\rho))$می باشد.

ج: $\ln u \in SV$

د: اگر $X \sim S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu)$ با $۰ < \alpha \leq ۲$ باشد آنگاه داریم

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{\alpha}\, p(X > \lambda) = C_{\alpha} \frac{۱+\beta}{۲} \sigma^{\alpha}$$

که درآن

$$C_{\alpha} = \left(\int_{۰}^{\infty} x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-۱} = \begin{cases} \dfrac{۱-\alpha}{\Gamma(۲-\alpha)\cos(\pi\alpha/۲)} & \alpha \neq ۱ \\ \dfrac{۲}{\pi} & \alpha = ۱ \end{cases}$$

پس میتوان گفت که $p(X > \lambda) \in RV(\alpha)$ زیرا

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{p(X > t\lambda)}{p(X > \lambda)} = t^{\alpha}.$$

۳.۲. توزیع حدی تابع خود همبستگی نمونه ایی

فرآیند ایستای اکید $\{X_t, t \in Z\}$ به صورت

$$\mathrm{X}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j} \qquad (۱.۲.۳)$$

در نظر بگیرید، بطوری که $\{\varepsilon_t\}$متغیرهای تصادفی iid و دارای توزیع α- پایدارمتقارن $(S\alpha S)$باشند.

و ضرایب حقیقی مقدار c_jها در روابط زیر

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^{\alpha} |j| < \infty \qquad \begin{cases} \delta = ۱ & if\, \alpha > ۱ \\ ۰ < \delta < \alpha & if\, \alpha \le ۱ \end{cases} \qquad (۲.۲.۳)$$

صدق کنند. وتابع خود همبستگی نمونه ایی غیرتعدیل شده را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{\rho}(h) = \frac{c(h)}{c(۰)} \qquad h > ۰ \qquad (۳.۲.۳)$$

که درآن

$$c(h) = \sum_{t=۱}^{n} X_t X_{t+h} \qquad (۴.۲.۳)$$

در این قسمت با بکارگیری چند قضیه نسبتا طولانی، به بررسی توزیع حدی تابع خود همبستگی نمونه ایی در فرآیند های میانگین متحرک α- پایدارمی پردازیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $\{X_t, t \in Z\}$ فرآیند میانگین متحرک تعریف شده در (۱.۲.۳)باشد و $E|\varepsilon_۱|^{\alpha} = \infty$.
آنگاه برای هرعدد صحیح مثبت hداریم

$$\tilde{a}_n^{-۱} a_n^{۲} (\hat{\rho}(h) - \rho(h) - [c(۰)]^{-۱} \sum_{t=۱}^{n} \sum_{\substack{i,j \\ i \ne j}} c_i (c_{j+h} - c_j \rho(h)) \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-j}) \xrightarrow{P} ۰ \qquad (۵.۲.۳)$$

زمانی که $a_n, \tilde{a}_n$ به فرم

$$a_n = \inf\{x : P(|\varepsilon_۱| > x) \le ۱/n\}, \quad \tilde{a}_n = \inf\{x : P(|\varepsilon_۱ \varepsilon_۰| > x) \le ۱/n\}$$

باشد.

اثبات: در فرآیند فوق