

دانشگاه یزد

دانشگاه یزد  
دانشکده فیزیک  
گروه اتمی و مولکولی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
فیزیک اتمی و مولکولی

نمایش حالت‌های همدوس و چلانده در یک فضای فوک  
توسعه یافته‌ی دوپارامتری

استاد راهنما: دکتر محمدکاظم توسلی

استاد مشاور: دکتر محسن حاتمی

پژوهش و نگارش: محمدحسین لک

بهمن‌ماه ۱۳۸۸

تقدیم به :

پدر

مادر

و همسر مهربانم

## قدردانی و تشکر

به نام آن که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام منزلی دیگر از منازل تحصیل را سپری کنم و خوشه‌چین میوه‌هایی جانبخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم از گرانمایگانی که در این راه مرا همیاری و ارشاد نمودند قدردانی کنم به ویژه استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر توسلی که صبورانه مرا راهنمایی کردند. ایزد منان یاورشان و توفیق رفیقشان باد.

# فهرست مندرجات

۱	حالت‌های همدوس استاندارد	۱
۲	..... مقدمه	۱.۱
۲	..... حالت‌های همدوس استاندارد	۲.۱
۶	..... ۱.۲.۱ در حالت‌های همدوس، چه چیزی همدوس است؟	۱.۲.۱
۹	..... ۲.۲.۱ مروری بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد	۲.۲.۱
۱۱	..... ۳.۲.۱ حالت‌های همدوس زوج و فرد	۳.۲.۱
۱۲	..... ۳.۱ حالت‌های چلانده	۳.۱
۱۷	..... ۱.۳.۱ حالت چلانده و روابط عدم قطعیت	۱.۳.۱
۲۰	..... ۴.۱ حالت‌های همدوس غیرخطی	۴.۱
۲۳	..... ۱.۴.۱ ابرکامل بودن حالت‌های همدوس غیرخطی	۱.۴.۱
۲۳	..... ۲.۴.۱ حالت‌های همدوس زوج و فرد غیرخطی	۲.۴.۱
۲۷	..... ۲ هامیلتونی‌های غیرهرمیتی با ویژه‌مقادیر حقیقی	۲
۲۸	..... ۱.۲ مقدمه	۱.۲
۲۸	..... ۲.۲ هامیلتونی‌های دارای تقارن $\pi T$	۲.۲
۳۲	..... ۱.۲.۲ ویژه‌مقادیر هامیلتونی متقارن $\pi T$	۱.۲.۲
۳۳	..... ۲.۲.۲ تقارن $\pi T$ در مکانیک کلاسیک	۲.۲.۲
۳۶	..... ۳.۲.۲ تقارن $\pi T$ در مکانیک کوانتومی	۳.۲.۲

۳۹	.....	مقایسه هرمیتی بودن و داشتن تقارن	۴.۲.۲
۴۰	.....	هامیلتونی‌های شبه‌هرمیتی	۳.۲
۴۱	.....	ویژه‌مقادیر هامیلتونی‌های شبه‌هرمیتی	۱.۳.۲
۴۵		<b>نمایش حالت‌های همدوس و چلانده در پایه‌های نامتعامل</b>	<b>۳</b>
۴۶	.....	مقدمه	۱.۳
۴۶	.....	فضای کلی	۲.۳
۴۹	.....	ساختار حالت‌های همدوس	۳.۳
۵۴		نمایش حالت‌های همدوس در فضای فوک تغییر شکل یافته‌ی یک-پارامتری	۴.۳
۵۹	.....	بنای حالت‌های همدوس در پایه‌های $ n\rangle_\lambda$	۱.۴.۳
۶۱	.....	تحول زمانی حالت‌های همدوس $\lambda$	۲.۴.۳
۶۱	.....	ویژگی‌های آماری $ \alpha, \lambda\rangle$ در پایه‌های $ n\rangle_\lambda$	۳.۴.۳
۶۳	.....	حالت‌های چلانده بر حسب پایه‌های $ n\rangle_\lambda$	۴.۴.۳
۶۶	.....	نتیجه‌گیری	۵.۴.۳
		<b>نمایش حالت‌های همدوس و چلانده در فضای فوک نامتعامل بهنجار</b>	<b>۴</b>
۶۷		<b>دوپارامتری</b>	
۶۸	.....	مقدمه	۱.۴
۶۸	.....	معرفی پایه‌های $ n\rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$	۲.۴
۷۲	.....	نمایش حالت‌های همدوس در پایه‌های $ n\rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$	۳.۴
۷۵	.....	نمایش حالت‌های چلانده در پایه‌های $ n\rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$	۴.۴
۷۶	.....	ویژگی‌های غیرکلاسیکی	۵.۴
۷۶	.....	پارامتر مندل	۱.۵.۴
۸۰	.....	روابط عدم قطعیت	۲.۵.۴
۸۳	.....	نتایج عددی	۶.۴

۸۳	نتیجه گیری	۷.۴
۸۵	پیوست	۵
۸۶	محاسبات	۱.۵
۸۶	تفکیک همانی برای حالت‌های همدوس $ \alpha, \lambda_1, \lambda_2\rangle$	۱.۱.۵
۸۶	پارامتر مندل برای حالت‌های همدوس و چلانده دوپارامتری	۲.۱.۵
۸۷	روابط عدم قطعیت برای حالت‌های همدوس دوپارامتری	۳.۱.۵
۸۹	روابط عدم قطعیت برای حالت‌های چلانده $ \eta, \lambda_1, \lambda_2\rangle$	۴.۱.۵
۹۲	مراجع	

## چکیده

در مکانیک کوانتومی هر بردار دلخواه را می‌توان بر حسب پایه‌های  $\{|n\rangle, n \in N\}_{n=0}^{\infty}$  نمایش داد. عموماً این پایه‌ها متعامد و بهنجار برگزیده می‌شوند، اما گاهی اوقات این پایه‌ها به سختی پیدا شده، ضمن اینکه کار کردن با آنها آسان نیست. بنابراین بردارهای پایه نامتعامد (که با  $|n\rangle_{\lambda}$  نمایش داده می‌شود) پیشنهاد می‌شود. این بردارهای پایه دارای ویژگی‌هایی چون همگرایی سریع و یگانگی تجزیه و... هستند و در بخش‌های مختلف فیزیک نظری و تجربی مانند اندازه‌گیری‌های تعمیم یافته، اندازه‌گیری‌های غیر مخرب کوانتومی و غیره کاربرد دارند. در پژوهش‌های اخیر فضای فوکی که با پایه‌های نامتعامد  $|n\rangle_{\lambda}$  مشخص می‌شوند، معرفی شده‌است. این پایه‌ها ویژه‌حالت‌های یک هامیلتونی غیرهرمیتی تغییر شکل یافته هستند. سپس از آن بردارهای پایه‌ی نامتعامد برای بنای حالت‌های همدوس و چلانده استفاده شده است. در این پژوهش ابتدا حالت‌های همدوس و چلانده در فضای فوک استاندارد، حالت‌های همدوس غیرخطی، حالت‌های همدوس زوج و فرد و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس به بررسی هامیلتونی‌های غیرهرمیتی با ویژه‌مقادیر حقیقی می‌پردازیم. در ادامه بردارهای پایه‌ی  $|n\rangle_{\lambda}$  فضای فوک قبلی را به بردارهای پایه‌ی دوپارامتری  $|n\rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$  تعمیم می‌دهیم. این بردارها ویژه‌حالت‌های هامیلتونی غیرهرمیتی  $H_{\lambda_1, \lambda_2} = a_{\lambda_1, \lambda_2}^{\dagger} a + \frac{1}{\lambda}$  هستند که  $a_{\lambda_1, \lambda_2}^{\dagger} = a^{\dagger} + \lambda_1 a + \lambda_2$  و  $a$  به ترتیب عملگر آفرینش تغییر شکل یافته و عملگر نابودی بوزونی هستند. ویژه‌حالت‌های  $|n\rangle_{\lambda_1, \lambda_2}$  نامتعامد ولی بهنجارپذیر هستند. در نهایت نمایش حالت‌های همدوس و چلانده را در این فضای فوک دوپارامتری معرفی کرده و ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های به‌دست آمده را از طریق بررسی میزان چلانگی و نیز آمار کوانتومی مورد بررسی قرار می‌دهیم.



## فصل ۱

# حالت‌های همدوس استاندارد

## ۱.۱ مقدمه

در پی گسترش نظریه کوانتومی تابش و با پیشرفت لیزر، حالت‌هایی از میدان تابشی که بسیار نزدیک به یک میدان الکترومغناطیسی کلاسیکی بودند به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند [۴۶]. در سال ۱۹۲۶ بسته‌موج‌هایی از نوسانگر هماهنگ که در طول زمان گسترش نمی‌یافت توسط شرودینگر ساخته شد [۳۷]. نوسانگرهای هماهنگ سامانه‌های شناخته شده‌ای در مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی هستند. در نوسانگرهای هماهنگ مقادیر چشم‌داشتی مکان و تکانه در حالت‌های مانای  $|n\rangle$  صفر هستند. اما در حوزه مکانیک کلاسیک مکان و تکانه توابعی نوسانی از زمان هستند که همواره صفر نیستند. بنابراین سئوالی که مطرح می‌شود این است که: آیا می‌توان حالت‌های کوانتومی ساخت که به پیش‌بینی‌هایی منجر شود که حداقل در مورد یک نوسانگر هماهنگ، عملاً همانند پیش‌بینی‌های کلاسیک باشد؟ در این بخش می‌بینیم که چنین حالت‌های کوانتومی وجود دارند. این حالت‌ها برهم‌نهی خطی از پایه‌های  $|n\rangle$  هستند که آنها را حالت‌های همدوس متناظر با نوسانگر هماهنگ می‌نامیم.

## ۲.۱ حالت‌های همدوس استاندارد

در این بخش به بررسی حالت‌های همدوس استاندارد می‌پردازیم. با توجه به اینکه عملگرهای مکان، تکانه و انرژی با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند بنابراین ممکن نیست که حالتی ساخته شود که در آن هر سه کمیت کاملاً معین باشند. ما به دنبال بردار حالتی هستیم که در هر زمان دلخواه میانگین‌های  $\langle x \rangle$  و  $\langle p \rangle$  و  $\langle H \rangle$  تا حد امکان به اندازه‌های متناظر کلاسیکی نزدیک باشند.

در مکانیک کوانتومی نوسانگر هماهنگ بر حسب عملگرهای آفرینش و نابودی توصیف می‌شود. هامیلتونی نوسانگر هماهنگ به صورت زیر است

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + p^2) \quad (1.2.1)$$

که در آن  $x$  و  $p$  به ترتیب عملگرهای مکان و تکانه هستند و جرم و بسامد نوسانگرها برابر با واحد انتخاب شده‌اند. عملگرهای  $x$  و  $p$  در رابطه جابه‌جایی  $[x, p] = i$  صدق می‌کنند ( $\hbar = 1$ ). با تعریف دو عملگر غیرهرمیتی

$$a = \frac{x + ip}{\sqrt{2}} \quad (2.2.1)$$

و

$$a^\dagger = \frac{x - ip}{\sqrt{2}} \quad (3.2.1)$$

که رابطه‌ی

$$[a, a^\dagger] = \hat{I} \quad (4.2.1)$$

را برآورده می‌کنند، هامیلتونی نوسانگر را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$H = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (5.2.1)$$

ویژه‌بردارهای  $H$  به صورت  $|n\rangle$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) هستند که کنش  $a$  و  $a^\dagger$  روی این حالت‌ها با روابط زیر داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

با شرط  $a|0\rangle = 0$  که  $|0\rangle$  حالت پایه (خلاء میدان) است. عملگرهای  $a$  و  $a^\dagger$  به ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش (یک فوتون) نامیده می‌شوند.

تعیین شکل بسته موجی که دینامیک آن مشابه ذره کلاسیکی در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ است معادل با تعیین ویژه حالت عملگر نابودی است

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (7.2.1)$$

ویژه حالت های  $|\alpha\rangle$ ، حالت های همدوس برای نوسانگر هماهنگ هستند. حالت های همدوس در پایه ی حالت های عددی به شکل زیر است

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (8.2.1)$$

با تعریف حالت های همدوس میدان تابشی به صورت حالت جابه جا شده ی خلاء، عبارتی به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= D(\alpha)|0\rangle \\ &= \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)|0\rangle \end{aligned} \quad (9.2.1)$$

با توجه به لم بیکر-هاسدورف اگر  $A$  و  $B$  عملگرهایی باشند که  $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$  باشد، رابطه ی زیر را داریم

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B \quad (10.2.1)$$

حال اگر  $A = \alpha a^\dagger$  و  $B = -\alpha^* a$  را در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$D(\alpha) = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \quad (11.2.1)$$

با توجه به تعریف حالت همدوس (8.2.1) و با استفاده از رابطه ی

$$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (12.2.1)$$

از آنجا که  $\exp(-\alpha^* a)|0\rangle = |0\rangle$  است، می توانیم رابطه ی (8.2.1) را به صورت زیر بنویسیم

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle \quad (13.2.1)$$

و از آنجا (۹.۲.۱) اثبات می‌شود. عملگر  $D(\alpha)$  یک عملگر یکانی است

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = [D(\alpha)]^{-1} \quad (۱۴.۲.۱)$$

که کنش آن روی دامنه‌های  $a$  و  $a^\dagger$  به صورت زیر است

$$D^{-1}(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha$$

$$D^{-1}(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \quad (۱۵.۲.۱)$$

دیدیم که حالت همدوس با کنش عملگر جابه‌جایی روی حالت خلا به دست می‌آید. بنابراین حالت همدوس شکل جابه‌جا شده‌ی حالت پایه نوسانگر هماهنگ است. به طور کلاسیکی یک میدان الکترومغناطیسی شامل امواجی با دامنه و فاز معین است اما هنگامی که ما میدان با دیدگاه مکانیک کوانتومی بررسی می‌کنیم عدم قطعیت‌هایی متناسب با دامنه و فاز میدان وجود دارد. یک میدان الکترومغناطیسی در حالت  $|n\rangle$  یک دامنه معین دارد اما فاز آن کاملاً نامعین است. عدم قطعیت در عمگر مکان  $q$  به صورت

$$\Delta q = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} \quad (۱۶.۲.۱)$$

تعریف می‌شود و یک تعریف مشابه نیز برای تکانه ارائه می‌شود. برای نوسانگر هماهنگ عدم قطعیت حالت‌های همدوس در  $q$  و  $p$  مساوی  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  است. بنابراین داریم:  $\Delta p \Delta q = \frac{1}{2}$ . مقدار کمینه برای رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ (علاوه بر حالت خلا میدان) برای حالت همدوس به دست می‌آید. به همین دلیل است که به این حالت‌ها، حالت‌های MUS می‌گویند: یک میدان در یک حالت همدوس حالتی با کمینه عدم قطعیت و مقدار مساوی عدم قطعیت در دو مؤلفه کوادراتوری است.

به طور خلاصه حالت‌های همدوس استاندارد به سه روش تعریف می‌شوند [۳۸]:

- (۱) ویژه حالت‌های عملگر نابودی که تعریف جبری است.
- (۲) حالت خلا جابه‌جا شده که تعریف بر حسب نظریه گروه است.
- (۳) حالت‌هایی که کمینه عدم قطعیت را برآورده می‌کنند (حالت‌های MUS).

## ۱.۲.۱ در حالت‌های همدوس، چه چیزی همدوس است؟

برای جواب این سؤال نمایش مکانی حالت عددی نوسانگر  $|n\rangle$  را در نظر می‌گیریم:

$$\Phi(q) = \langle q|n\rangle \quad (۱۷.۲.۱)$$

اگر  $E_0$  ویژه‌مقدار حالت خلاء باشد چون انرژی نمی‌تواند از  $E_0$  پایین‌تر بیاید معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\left(\omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q}\right) \Phi_0(q) = 0 \quad (۱۸.۲.۱)$$

که در آن از روابط

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \left(\omega q - \hbar \frac{\partial}{\partial q}\right), \quad p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (۱۹.۲.۱)$$

استفاده کرده‌ایم. جواب به‌نحی که معادله‌ی (۱۸.۲.۱) برابر است با:

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar}\right) \quad (۲۰.۲.۱)$$

ویژه‌توابع مرتبه‌های بالاتر در نمایش مکانی را می‌توان از معادلات (۱۲.۲.۱) و (۱۷.۲.۱) و (۱۹.۲.۱) به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} \Phi_n(q) &= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \Phi_0(q) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{(2\hbar\omega)^{n/2}} \left(\omega q - \hbar \frac{\partial}{\partial q}\right)^n \Phi_0(q) \\ &= \frac{1}{(2^n n!)^{1/2}} H_n \left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} q\right) \Phi_0(q) \end{aligned} \quad (۲۱.۲.۱)$$

که در آن  $H_n$  چندجمله‌ای هرمیت مرتبه  $n$  است. این حالت‌ها، ویژه‌توابع نوسانگر هماهنگ هستند. می‌توان تحقیق کرد که این توابع موج شرط تعامد را برآورده می‌کنند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(q) \Phi_m(q) dq = \delta_{nm} \quad (۲۲.۲.۱)$$

با استفاده از ویژه‌توابع نوسانگر هماهنگ خواهیم داشت:

$$\langle q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(q) q \Phi_n(q) dq = 0 \quad (۲۳.۲.۱)$$

به طور مشابه داریم:

$$\langle p \rangle = 0 \quad (24.2.1)$$

در حالی که برای مربع عملگرهای مکان و تکانه به ترتیب داریم:

$$\langle p^2 \rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (25.2.1)$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (26.2.1)$$

بنابراین عدم قطعیت در تکانه و مکان با روابط زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} (\Delta p)^2 &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \\ &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (27.2.1)$$

$$\begin{aligned} (\Delta q)^2 &= \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar}{\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (28.2.1)$$

با ضرب روابط (27.2.1) و (28.2.1) خواهیم داشت:

$$\Delta p \Delta q = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \quad (29.2.1)$$

با توجه به رابطه عدم قطعیت  $\Delta p \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}$ ، رابطه (29.2.1) نشان می دهد که عدم قطعیت به ازای  $n = 0$  برای حالت پایه تابع موج کمینه می شود:

$$\Delta p \Delta q = \frac{1}{2} \hbar \quad (30.2.1)$$

هدف ما پیدا کردن بسته موجی است که  $\Delta q$  را کمینه کند در حالی که تحت حرکت هماهنگ ساده باشد. چنین تابع موجی بسیار نزدیک به میدان کلاسیکی خواهد بود. برای بررسی این امکان، تابع موج  $\Psi(q, t)$  را در زمان  $t = 0$  به صورت زیر در نظر می گیریم که کمینه عدم قطعیت را دارد و همچنین در جهت مثبت  $q$  به اندازه  $q_0$  جابه جا شده است:

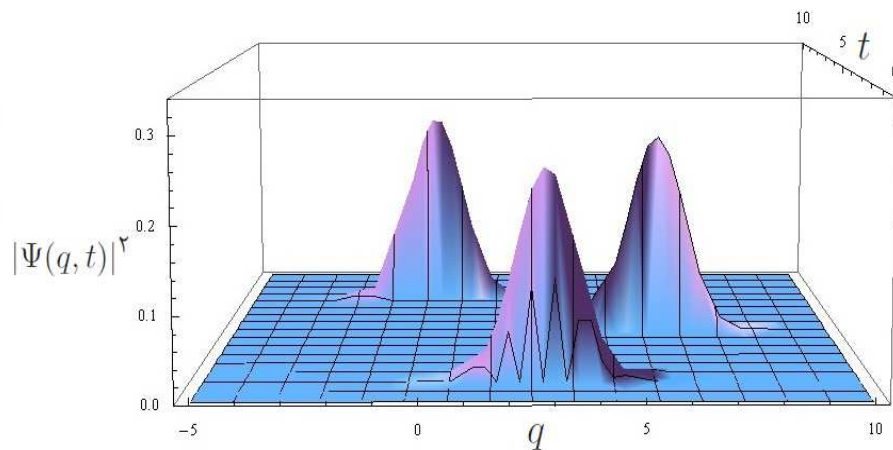
$$\Psi(q, 0) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\omega}{2\hbar}(q - q_0)^2\right] \quad (31.2.1)$$

تحول زمانی این بسته موج به صورت زیر داده می شود

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} \right) \Psi \quad (۳۲.۲.۱)$$

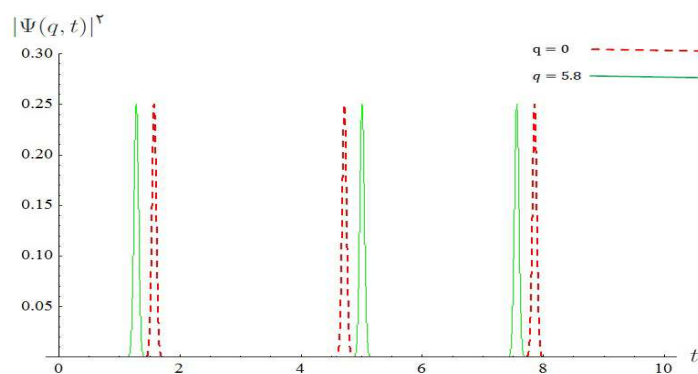
و چگالی احتمال در زمان  $t$  به صورت زیر است

$$|\Psi(q, t)|^2 = \left( \frac{\omega}{2\hbar} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{\omega}{\hbar} (q - q_0 \cos \omega t)^2 \right] \quad (۳۳.۲.۱)$$



شکل ۱.۲.۱: گسترش بسته موج در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده

به ازای  $\omega = \hbar = 1, q_0 = 20$ .



شکل ۲.۲.۱: گسترش بسته موج در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده

به ازای  $\omega = \hbar = 1, q_0 = 20, \sigma = 0.5/\hbar$ .



بنابراین می‌بینیم که بسته موج در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده به عقب و جلو می‌رود بدون آنکه شکلش تغییر پیدا کند. این بسته‌های موج به یکدیگر چسبیده‌اند یا همدوس‌اند.

## ۲.۲.۱ مروری بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس استاندارد

در این بخش بعضی از ویژگی‌های مهم حالت‌های همدوس استاندارد را بررسی می‌کنیم:

الف)  $|\alpha\rangle$  ویژه‌بردار عملگر نابودی است (۷.۲.۱).

ب) به صورتی که قبلاً توضیح دادیم حالت‌های همدوس نامساوی هایزنبرگ را اشباع می‌کنند یا حالت‌هایی با کمینه عدم قطعیت هستند (۳۰.۲.۱).

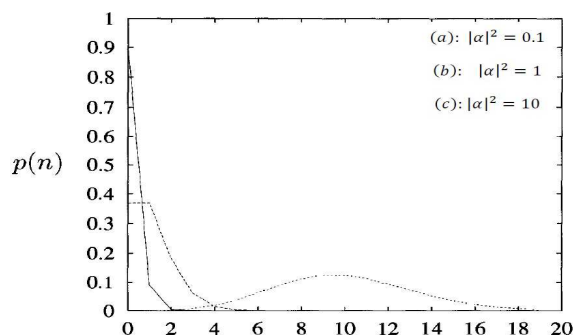
ج) میانگین عددی تعداد فوتون‌ها در حالت همدوس  $|\alpha\rangle$  با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (۳۴.۲.۱)$$

در همین رابطه احتمال پیدا کردن  $n$  فوتون در حالت  $|\alpha\rangle$  با یک توزیع پواسونی داده می‌شود

$$\begin{aligned} p(n) &= \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle \\ &= \frac{|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{n!} \\ &= \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \end{aligned} \quad (۳۵.۲.۱)$$

نمودار  $p(n)$  برای مقادیر مختلف  $|\alpha|^2$  در شکل (۳.۲.۱) رسم شده است:



شکل ۳.۲.۱: نمودار توزیع فوتون برای یک حالت همدوس.

از شکل (۳۰.۲.۱) دیده می‌شود که برای  $|\alpha|^2 \leq 1$ ،  $p(n)$  یک بیشینه در  $n = 0$  دارد در حالی که برای  $|\alpha|^2 > 1$ ،  $p(n)$  یک بیشینه در  $n = |\alpha|^2$  دارد. (د) مجموعه همه حالت‌های همدوس  $|\alpha\rangle$  یک مجموعه کامل است. برای نشان دادن این ویژگی انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int d^2\alpha (\alpha^*)^n \alpha^m e^{-|\alpha|^2} = \pi n! \delta_{nm} \quad (۳۶.۲.۱)$$

که  $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$  است،  $d^2\alpha \doteq |\alpha|d|\alpha|d\theta$  و انتگرال روی تمام مساحت صفحه مختلط گرفته می‌شود. به کمک این انتگرال و بسط حالت‌های همدوس در فضای فوک (۸.۲.۱) داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \quad (۳۷.۲.۱)$$

چون مجموعه‌ی حالت‌های فضای فوک  $|n\rangle$  یک مجموعه متعامد کامل را تشکیل می‌دهند، سمت راست رابطه‌ی بالا عملگر واحد  $\hat{I}$  را به دست می‌دهد. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \hat{I} \quad (۳۸.۲.۱)$$

که این رابطه‌ی کاملیت برای حالت‌های همدوس می‌باشد.

(ه) دو حالت همدوس متناظر با ویژه‌مقادیر مختلف  $|\alpha\rangle$  و  $|\alpha'\rangle$  نامتعامدند:

$$\langle \alpha|\alpha'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'\alpha^* - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right) \quad (۳۹.۲.۱)$$

و بنابراین

$$|\langle \alpha|\alpha'\rangle|^2 = \exp(-|\alpha - \alpha'|^2) \quad (۴۰.۲.۱)$$

می‌بینیم که اگر اندازه‌ی  $\alpha - \alpha'$  خیلی بزرگتر از یک باشد، حالت‌های  $|\alpha\rangle$  و  $|\alpha'\rangle$  تقریباً متعامد خواهند بود. درجه‌ی هم‌پوشانی این حالت‌ها از اندازه ضرب داخلی  $\langle \alpha|\alpha'\rangle$  مشخص می‌شود. نتیجه رابطه‌ی (۳۸.۲.۱) و (۳۹.۲.۱) این است که هر حالت همدوس را می‌توان بر حسب حالت‌های همدوس دیگر بسط داد

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{\pi} \int |\alpha'\rangle \langle \alpha'|\alpha\rangle d^2\alpha' \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha' |\alpha'\rangle \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'^*\alpha - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right) \end{aligned} \quad (۴۱.۲.۱)$$

که نشان می‌دهد که حالت‌های همدوس ابرکامل هستند.

(و) حالت‌های همدوس نتیجه جابه‌جایی حالت پایه تحت اثر عملگر جابه‌جایی هستند (۹.۲.۱).

(ز) حالت‌های همدوس برخوردار از ویژگی پایداری زمانی هستند

$$\begin{aligned}
 e^{-iHt}|\alpha\rangle &= e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t}|\alpha\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} e^{-it/2} |n\rangle \\
 &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} e^{-it/2} |n\rangle \\
 &= e^{-it/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \\
 &= e^{-it/2} |\alpha'\rangle
 \end{aligned} \tag{۴۲.۲.۱}$$

که در آن قرار داده‌ایم  $\alpha' = \alpha e^{-i\omega t}$ . بدیهی است که  $e^{-i\omega t}$  تنها یک عامل فازی است.

### ۳.۲.۱ حالت‌های همدوس زوج و فرد

حالت‌های همدوس زوج و فرد نمونه‌ای از برهم‌نهی حالت‌های همدوس هستند. حالت همدوس استاندارد را می‌توان از کنش عملگر جابه‌جایی  $D(\alpha)$  روی کت خلاء میدان به دست آورد (۹.۲.۱). اکنون دو عملگر جدید را معرفی می‌کنیم [۱۶]. عملگر اول ترکیب متقارن از دو عملگر جابه‌جایی  $D(\alpha)$  و  $D(-\alpha)$ :

$$D_+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} [D(\alpha) + D(-\alpha)] \tag{۴۳.۲.۱}$$

و عملگر دوم ترکیب پادمقارن از دو عملگر جابه‌جایی  $D(\alpha)$  و  $D(-\alpha)$ :

$$D_-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} [D(\alpha) - D(-\alpha)] \tag{۴۴.۲.۱}$$

اکنون به کمک این دو عملگر حالت‌های زوج و فرد را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$|\alpha\rangle_+ = D_+(\alpha)|0\rangle \tag{۴۵.۲.۱}$$

$$|\alpha\rangle_- = D_-(\alpha)|0\rangle \tag{۴۶.۲.۱}$$

با توجه به روابط (۴۳.۲.۱) تا (۴۶.۲.۱) کاملاً پیداست که حالت‌های همدوس زوج و فرد، به ترتیب از ترکیب متقارن و پادمتقارن حالت‌های همدوس استاندارد به‌ازای دامنه‌های  $\alpha$  و  $-\alpha$  به‌دست می‌آیند:

$$|\alpha\rangle_+ = |\alpha\rangle + |-\alpha\rangle \quad (۴۷.۲.۱)$$

$$|\alpha\rangle_- = |\alpha\rangle - |-\alpha\rangle \quad (۴۸.۲.۱)$$

بنابراین می‌توان شکل صریح این حالت‌ها را در فضای متشکل از پایه‌های عددی  $|n\rangle$  به‌صورت زیر داشت [۳۸]:

$$|\alpha\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{\cosh(|\alpha|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} [(2n)!]^{-\frac{1}{2}} |2n\rangle \quad (۴۹.۲.۱)$$

$$|\alpha\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{\sinh(|\alpha|^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n+1} [(2n+1)!]^{-\frac{1}{2}} |2n+1\rangle \quad (۵۰.۲.۱)$$

در مورد ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس زوج و فرد می‌توان گفت که حالت‌های زوج دارای ویژگی چلانگی هستند درحالی‌که حالت‌های همدوس فرد فاقد این ویژگی هستند [۴۶]. حالت‌های همدوس استاندارد هیچ‌کدام از ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های غیرخطی را از خود بروز نمی‌دهند. به‌عبارت دیگر حالت‌های زوج و فرد استاندارد از جمله مواردی هستند که در آن اثرات ناشی از تداخل حالت‌های استاندارد منجر به بروز ویژگی‌های غیرکلاسیکی می‌شود.

### ۳.۱ حالت‌های چلانده

فلسفه طبیعی ساختار علوم تجربی و نظری پر از مثال‌های شگفت‌انگیز از تقابل سودمند بین کارهای نظری و تجربی است. تابش کاتودی فرابنفش در تابش جسم سیاه، پلانک را به معرفی موضوع مکانیک کوانتومی رهنمون ساخت. این فرضیه‌ها انیشتین را به مفهوم گسیل خودبه‌خود هدایت کرد که کلید درک تفاوت بین توزیع تابشی پلانک و ویلهلم وین بود. گسیل