

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

پایان نامه جهت اخذ دانشنامه

کارشناسی ارشد شیمی، (گرایش شیمی فیزیک)

: موضوع

استخراج یک معادله حالت جدید تعمیم یافته نوع

و اندرولسی از طریق مکانیک

آماری سیالات

۱۳۸۰ / ۴ / ۲۵

دانشگاه ارومیه
دانشکده علوم
کارشناسی ارشد شیمی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر علی مقاری

نگارش:
فرشاد شیدائی

013125

اردیبهشت ۱۳۸۰

۳۶۰

به نام خدا

خداآوند علیم را شکر می‌کنم که توانستم مدت زیادی را در محضر استاد بزرگوار
جناب آقای دکتر علی مقاری باشم تا از علم و اخلاق ایشان بهره کافی را ببرم.
بر خود لازم می‌دانم که از خدمات بی‌شائبه استاد، که با وجود مشغله کاری
فراوان هدایت و راهنمایی این پایان‌نامه را با گشاده‌رویی تمام تقبل فرمودند،
تشکر قلبی خود را ابراز کنم.

همچنین از خدمات آقای دکتر هدایت راحمی که به عنوان استاد مشاور
پایان‌نامه کمک زیادی را به من کردند نیز تشکر می‌کنم.

فرشاد شیدایی

تَقْدِيمٍ بِهِ :

پدر و مادر عزیزه که همیشه مشوق من در

تمصیل بوده‌اند

و تمامی موفقیت‌های خود را مدیون ایشان

هستم

عنوان	فهرست مطالب	صفحة
چکیده.....		۴
فصل اول اصول اساسی مکانیک آماری سیالات		۵
۱-۱- مقدمه		۶
۱-۲- روش استخراج توابع توزیع		۱۰
۱-۳- ارتباط توابع ترمودینامیکی با r^g		۱۶
۱-۴- معادله تراکم پذیری		۲۰
۱-۵- روش های تعیین تابع توزیع شعاعی		۲۱
۱-۵-۱- الف) معادله انتگرالی Kirkwood		۲۱
۱-۵-۱- ب) معادله (Born- Green- Yon) BGY		۲۴
۱-۵-۱- ج) معادله Ornstein of Zernike OZ		۲۴
۱-۵-۱- د) معادلات PY و HNC		۲۵
۱-۶- عبارت های تحلیلی برای توابع توزیع شعاعی سیالات		۲۶
فصل دوم معادلات حالت و مکانیک آماری سیالات		۲۸
۲-۱- مقدمه		۲۹
۲-۲- مدل کره سخت و معادلات حالت		۳۰
۲-۳- معادله حالت Percus- Yevick- Thiele		۳۳
۲-۴- معادله حالت Percus- Yevick		۳۳
۲-۵- تقریب Pade		۳۴
۲-۶- معادله اصلاح شده Carnahan- Starling		۳۴
۲-۷- مدل چاه مریعی (SW)		۳۵
۲-۸- اشاره ای به روش به کار رفته در پایان نامه		۳۷
فصل سوم محاسبه معادله اصلاح شده Deiters برای سیالات		۳۹
فصل چهارم نتایج		۵۲
منابع		۶۰

چکیده

در این پژوهش با استفاده از مکانیک آماری یک معادله حالت جدید تعمیم یافته واندرولی برای مایعات به دست آمده است. ویژگی های این معادله عبارتند از:

شکل اصلاح شده ای از مدل چاه مربعی را که شامل تفکیک پتانسیل به دو سهم یکی سهم دافعه مربوط به کره های سخت و دیگری سهم جاذبه که به شکل پتانسیل حقیقی و از نوع پتانسیل لاندن است یعنی $u_{att} = C_6 / r^6$ مورد استفاده قرار گرفته است.

برای ناحیه دافعه توزیع شعاعی پیشنهاد شده توسط Valderrama & Faundez به کار رفته است.

تابع توزیع شعاعی برای قسمت جاذبه تابعی است که توسط Enrico Matteoli & G. Ali. Monsoori پیشنهاد شده است.

به علت اینکه هنگام نزدیک شدن یک مولکول به مولکول دیگر حداقل فاصله متوسط به اندازه قطر مولکولی نیست بلکه این حداقل بر حسب نوع فاز به چگالی و دما بستگی دارد. بنابراین برای حد پایان انتگرال در معادله به دست آمده در نواحی مختلف فازی عبارت هایی را برای r^{*} به دست آورده ایم. در نهایت با رسم نمودارهای گوناگون در نواحی مختلف فازی و مقایسه مقادیر محاسبه شده با مقادیر تجربی مشاهده مشود که بیشترین مقدار خطای فشار برای کاهش یافته تجربی به ندرت ۷/۵ درصد می رسد.

فصل اول

اصول اساسی مکانیک

آماری سیالات

۱-۱- مقدمه

یک معادله حالت^۱ که در فاصله زیادی از دما و چگالی معتبر باشد، ابزار مستحکمی برای پیش‌بینی خواص ترمودینامیکی سیستم مورد نظر می‌باشد. به طور کلی، بر اساس نوع نگرش و تکنیک به کار رفته می‌توان سه روش کلی را برای به دست آوردن معادله حالت ذکر نمود: روش‌های تجربی،^۲ روش‌های نظری^۳ و روش‌های نیمه‌تجربی.^۴ معادلات حالت تجربی معمولاً نیازمند تعداد زیادی داده تجربی هستند و یا ضرورتاً باید تعداد زیادی پارامترهای تنظیم‌پذیر را به کار گرفت تا بر اساس داده‌های تجربی برای مواد مختلف آن پارامترها را تنظیم نمود. معادلات حالت نظری نیز نیازمند تعدادی پارامترهای مولکولی، به ویژه پارامترهای پتانسیل بین جفت مولکول هستند. معادلات حالت نیمه تجربی که غالباً در سطح وسیعی برای پیش‌بینی خواص ترمودینامیکی سیستم‌های چگال

۱- Equation of state

۲- empirical

۳- theoretical

۴- Semi-empirical

به کار می‌روند از طریق روش‌های نظری استخراج شده و سپس پارامترهای آن با بهره‌گیری از داده‌های تجربی تنظیم می‌شوند.

هر دو روش نظری و نیمه‌تجربی باید از طریق به کارگیری روش‌های حساس نسبت به خواص ماکروسکوپی و میکروسکوپی آزمایش شوند. از جمله این روش‌ها می‌توان منحنی وارونگی ژول-تامسون که نسبت به معادله حالت حساس است را نام برد [۱].

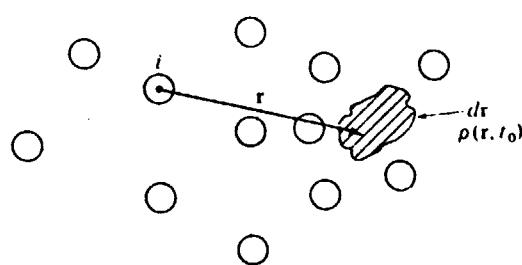
استخراج معادله حالت برای گازهای رقیق ساده‌تر است، چرا که در این نوع سیستم‌ها به دلیل سادگی در نوع برکنش‌ها می‌توان از طریق بسط خوش‌های^۱، بر هم کنش‌های بین مولکولی را به مجموعه‌ای از بر هم کنش‌های دوتایی، بر هم کنش‌های سه تایی و ... تجزیه نمود. تحت این شرایط معادله حالت به صورت بسط ویریال به دست خواهد آمد. به گونه‌ای که ضریب دوم ویریال با خوش‌های دوتایی، ضریب سوم ویریال با خوش‌های سه‌تایی و ... مرتبط می‌شوند. این روش موجب می‌شود که دانش ما از پتانسیل‌های بین مولکولی بتواند منجر به محاسبه ضرایب ویریال شود ر از این طریق راهکار مناسبی برای استخراج معادله حالت سیستم‌های گاز رقیق به دست آید.

در مورد گازهای چگال، به ویژه در ناحیه فوق بحرانی، و مایعات موضوع پیچیده‌تر خواهد بود، چرا که این نوع سیستم‌ها را نمی‌توان از طریق بسط‌های خوش‌های پتانسیل‌های بین مولکولی مطالعه نمود. در این نوع سیستم‌ها هر مولکول با تعداد زیادی مولکول‌های اطراف خود درگیر است به طوری که همبستگی میان یک مولکول با مولکول‌های اطراف آن باید محور مطالعه و بررسی قرار گیرد. به همین جهت در مطالعه نظری سیالات چگال محاسبه توابع همبستگی و ارتباط آنها با پتانسیل‌های بین مولکولی اساس کار قرار می‌گیرد.

خوبشخانه، فرض جفت گونه جمع‌پذیری برای پتانسیل بین مولکولی موجب می‌شود که تنها توابع همبستگی شعاعی که میزان همبستگی میان دو ذره را توصیف می‌کند نیاز به محاسبه داشته و پل ارتباطی خواص مولکولی با خواص ماکروسکوپی باشد.

بدین ترتیب دانش ما از خواص ماکروسکوپی نیازمند اطلاع از خواص مولکولی به ویژه انرژی پتانسیل بین یک جفت مولکولی خواهد بود. لذا داشتن اطلاعات دقیق از پتانسیل‌های بین مولکولی اهمیت ویژه‌ای دارد. چندین روش برای تعیین پتانسیل‌های بین مولکولی وجود دارد که شامل روش‌های تجربی پراش مولکولی [۲]، روش‌های *ab initio* [۳] و روش‌های وارونگی داده‌های تجربی [۴] می‌باشند. ساده‌ترین مدلی که در سیستم‌های چگال، به ویژه مایعات، استفاده زیادی شده و تعداد مقالات زیادی برای آن منتشر گردیده است [۵]، مدل کره سخت (HS) است. اشکال اصلاح شده‌ای نظیر چاه مربعی (SW)، ساترلن و لنارد-جونز (LJ) نیز در محاسبه خواص ترمودینامیکی سیالات به کار رفته‌اند [۷].

در تحقیق حاضر شکل اصلاح شده‌ای از مدل چاه مربعی را برای استخراج معادله حالت سیالات چگال (در ناحیه فوق بحرانی و نیز مایعات) به کار بردیم. همانطور که اشاره شد هنگامی که فرض جفت‌گونه جمع‌پذیر مجاز باشد توصیف نظری حالت سیال از روش معمول تابع توزیع شعاعی صورت می‌گیرد که اکنون آن را تعریف می‌کنیم. اجازه دهید فرض کنیم که دستگاه مختصاتی را بر روی یکی از مولکول‌های سیال، مثلاً مولکول A به عنوان مولکول مرکزی همچنان که در میان مولکول‌های همسایه‌اش در حال حرکت است قرار داد. اگر مجهز به وسیله اندازه‌گیری باشیم می‌توانیم تعداد مولکول‌هایی که به فاصله r از مولکول A در لحظه t قرار گرفته‌اند را اندازه‌گیری کنیم.



شکل (۱-۱): در لحظه t تعداد مولکول‌هایی که در عنصر حجمی dr به فاصله r از مولکول مرکزی A قرار دارند $\rho(r,t)dr$ است.

این اندازه‌گیری را می‌توان در فواصل متواالی و در یک دوره زمانی تکرار کرد و برای تعیین چگالی متوسط زمانی به فاصله r از مولکول A مورد استفاده قرار داد.

کمیت به دست آمده مقدار متوسط زمانی تعداد مولکول‌هایی است که در فاصله Δr از مولکول مرکزی Δr قرار دارند و به آن چگالی تعداد یاتابع توزیع ($g(r)$) گفته می‌شود. می‌توان اندازه گیری‌های مشابهی برای مقادیر متفاوتی از Δr انجام داد و بدین طریق شکل تحلیلی ($g(r)$) را به دست آورده. به علت اینکه سیال در حال تعادل است (r) از زمان و مخصوصاً مولکول انتخاب شده مستقل است اما به چگالی و دما وابسته است.

تابع توزیع شعاعی ($g(r, p, t)$) یا به اختصار ($g(r)$) که یک کمیت بدون بعد است به صورت نسبت چگالی موضعی در فاصله Δr از مولکول مرکزی به چگالی توده‌ای مایع تعریف می‌شود.

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho} \quad (1-1)$$

در اصل تابع توزیع شعاعی ($g(r)$) توسط همبستگی‌های بین مولکول مرکزی با سایر مولکول‌ها معین می‌شود و بنابراین واقعاً یک تابع مستقل نیست، و به علت وجود همین همبستگی‌های مولکولی ($g(r)$) از مقدار واحد تفاوت دارد. توجه شود که وقتی هیچ همبستگی میان مولکول مرکزی با سایر مولکول‌ها وجود نداشته باشد نظری وقته که چگالی سیال به سمت صفر میل می‌کند آنگاه تابع توزیع

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g(r, \rho, t) = 1$$

به دلیل بزرگی نیروهای دافعه احتمال اینکه دو مولکول در فاصله کمی از یکدیگر باشند ناچیز است، بنابراین برای مقادیر Δr خیلی کم، ($g(r)$) و ($\rho(r)$) تقریباً صفر هستند. در حداقل انرژی پتانسیل بین مولکولی احتمال اینکه بتوان دو مولکول مجزا را از هم تشخیص داد بالا است و ($g(r)$) یک قله را نشان می‌دهد. در مایعات قله‌های اضافی کوچکتری بران مقادیر بزرگ‌تر ممکن است مشاهده شوند.

کمیت به دست آمده مقدار متوسط زمانی تعداد مولکول‌هایی است که در فاصله Δr از مولکول مرکزی Δr قرار دارند و به آن چگالی تعداد یا تابع توزیع $(r) \rho$ گفته می‌شود. می‌توان اندازه‌گیری‌های مشابهی برای مقادیر متفاوتی از Δr انجام داد و بدین طریق شکل تحلیلی $(r) \rho$ را به دست آورد. به علت اینکه سیال در حال تعادل است $(r) \rho$ از زمان و مخصوصاً مولکول انتخاب شده مستقل است اما به چگالی و دما وابسته است.

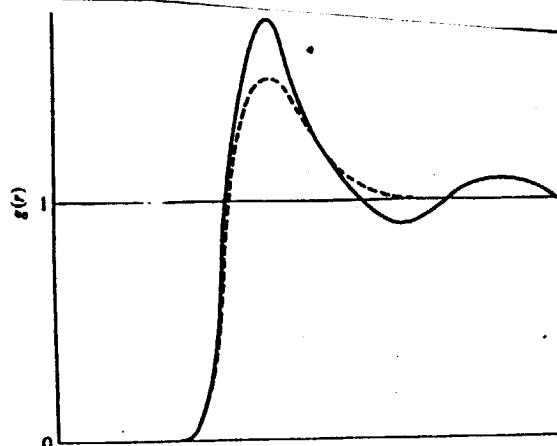
تابع توزیع شعاعی $(r, p, t) g$ و یا به اختصار $(r) g$ که یک کمیت بدون بعد است به صورت نسبت چگالی موضعی در فاصله Δr از مولکول مرکزی به چگالی توده‌ای مایع تعریف می‌شود.

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho} \quad (1-1)$$

در اصل تابع توزیع شعاعی $(r) g$ توسط همبستگی‌های بین مولکول مرکزی با سایر مولکول‌ها معین می‌شود و بنابراین واقعاً یک تابع مستقل نیست، و به علت وجود همین همبستگی‌های مولکولی $(r) g$ از مقدار واحد تفاوت دارد. توجه شود که وقتی هیچ همبستگی میان مولکول مرکزی با سایر مولکول‌ها وجود نداشته باشد نظری وقتی که چگالی سیال به سمت صفر میل می‌کند آنگاه تابع توزیع

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g(r, \rho, T) = 1$$

به دلیل بزرگی نیروهای دافعه احتمال اینکه دو مولکول در فاصله کمی از یکدیگر باشند ناچیز است، بنابراین برای مقادیر Δr خیلی کم، $(r) g$ و $\rho(r)$ تقریباً صفر هستند. در حداقل انرژی پتانسیل بین مولکولی احتمال اینکه بتوان دو مولکول مجزا را از هم تشخیص داد بالا است و $(r) g$ یک قله را نشان می‌دهد. در مایعات قله‌های اضافی کوچک‌تری برای مقادیر بزرگ‌تر Δr ممکن است مشاهده شوند.



شکل: (1-۲): تابع توزیع شعاعی در مقابل r برای سیالات — و گازها ...

برای مایعاتی با مولکول‌های کره سخت، این قله‌ها توصیف کننده احتمال حضور مولکولی مورد نظر در لایه‌ای با فواصل ۲۵، ۳۵، ... نسبت به مولکول مرکزی است که با افزایش فاصله این احتمال‌های کوچک‌تر می‌شوند [۷].

۲-۱- روش استخراج توابع توزیع

سیستمی شامل N ذره که دارای حجم V و دمای T است را در نظر بگیرید، احتمال اینکه ذره ۱ در فاصله r_1 تا $r_1 + dr_1$ ذره ۲ در فاصله r_2 تا $r_2 + dr_2$ و ... باشند توسط معادله زیر داده می‌شود.

$$P^{(N)}(r_1, \dots, r_N) dr_N = \frac{e^{-\beta U_N} dr_1 \dots dr_N}{Z_N} \quad (1-2)$$

در معادله فوق Z_N انتگرال پیکربندی و U_N انرژی پتانسیل مربوط به سیستم N ذره‌ای است که در صورت فرض جفت گونه جمع‌پذیر به صورت زیر می‌شود:

$$U_N(r_1, \dots, r_N) = \sum_{i,j} u(r_{ij}) \quad (3-1)$$

$$Z_N = \int \dots \int e^{-U_N / kT} dr_1 \dots dr_N \quad (4-1)$$

احتمال اینکه ذره ۱ در فاصله r_1 تا $r_1 + dr_1$ و ذره n در فاصله r_n تا $r_n + dr_n$ و ... و ذره n در فاصله r_n تا $r_n + dr_n$ و ذره باقی مانده در بقیه فضای مایع باشد عبارت یافت شود و بقیه ذرات ($N-n$ ذره باقی مانده) در از:

$$P^{(n)}(r_1, \dots, r_n) = \frac{\int \dots \int e^{-\beta U_N} dr_{n+1} \dots dr_N}{Z_N} \quad (5-1)$$

در واقع $P^{(n)}$ چگالی احتمال n - ذره‌ای است و با انتگرال‌گیری از طرفین معادله (۲-۱) به دست می‌آید.

اکنون می‌توان گفت احتمال اینکه یکی از N ذره در فاصله r_1 تا $r_1 + dr_1$ ذره دیگری در فاصله r_2 تا $r_2 + dr_2$ و ذره n در فاصله r_n تا $r_n + dr_n$ و پیکربندی $N-n$ ذره باقیمانده به هر صورت که باشد عبارت است از:

$$\rho^{(n)}(r_1, \dots, r_n) = \frac{N!}{(N-n)!} P^{(n)}(r_1, \dots, r_n) \quad (6-1)$$

این امر از آنجا ناشی می‌شود که N انتخاب برای اولین ذره، $N-1$ انتخاب برای دومین ذره و ... وجود دارد. بنابراین ضریب $(N-n)/N!$ تعداد راههای انتخاب n ذره از بین N ذره و توزیع آنها بر اساس فوق می‌باشد.

ساده‌ترین تابع توزیع $\rho^{(1)}(r_1)$ است.

کمیت $\rho^{(1)}(dr_1)$ احتمال اینکه یک ذرات در فاصله r_1 تا $r_1 + dr_1$ یافت شود را بیان می‌کند. برای یک جامد این کمیت یک تابع متناظر با r_1 با یک ماکریسم تیز در نقاط شبکه می‌باشد، اما در یک سیال همه نقاط در داخل حجم V یکسان هستند و بنابراین $\rho^{(1)}(r_1)$ مستقل از r_1 است، به طوری که برای یک سیال می‌توان نوشت:

$$\int \rho^{(1)}(r_1) dr_1 = \rho^{(1)} \int dr_1 = \rho^{(1)} V \quad (7-1)$$

با توجه به معادله (6-1)

$$\rho^{(1)} = N \rho^{(1)}(r_1) \quad (8-1)$$

و بر اساس معادله (5-1)

$$\rho^{(1)} = \frac{\int \dots \int e^{-\beta U_N} dr_2 \dots dr_N}{Z_N} \quad (9-1)$$

چون $\rho^{(1)}(r_1)$ مستقل از r_1 است می‌توان معادله (9-1) را به صورت زیر نوشت:

$$\rho^{(1)}(r_1) = \frac{1}{V} \frac{\int \dots \int e^{-\beta U_N} dr_1 \dots dr_N}{Z_N} = \frac{1}{V} \quad (10-1)$$

و با قرار دادن $\rho^{(1)}(r_1)$ در معادله (9-1) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\rho^{(1)} = \frac{N}{V} = \rho \quad (11-1)$$

به عبارت دیگر احتمال یافتن یک ذره در واحد حجم سیال با چگالی سیال برابر است.

اکنون تابع همبستگی $g^{(n)}(r_1, \dots, r_n)$ را که یک کمیت بدون بعد است برای n ذره به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho^{(n)}(r_1, \dots, r_n) = \rho^{(n)} g^{(n)}(r_1, \dots, r_n) \quad (12-1)$$

که $g^{(n)}$ تابع همبستگی n -ذرهای نامیده می‌شود، به طوری که اگر ذرات مستقل

از یکدیگر باشند

از یکدیگر باشند $\rho^{(n)}$ برابر $P^{(n)}$ می‌شود.
بنابراین ضریب $(r_1, \dots, r_n)^{(n)} g$ برای تصحیح توزیع تصادفی و به عبارت دیگر
برای بیان میزان وابستگی یا همبستگی بین ذرات به کار می‌رود و به همین دلیل
به تابع همبستگی معروف است.

با توجه به معادلات (۵-۱)، (۶-۱) و (۱۲-۱) تابع همبستگی چنین معین می‌شود:

$$g^{(n)}(r_1, \dots, r_n) = \frac{V^n N!}{N^n (N-n)!} \cdot \frac{\int \dots \int e^{-\rho U_x} dr_{n+1} \dots dr_N}{Z_N} \quad (12-1)$$

تابع همبستگی جفتی $(r_1, r_2)^{(2)} g$ که ارتباط میان دو ذره را بیان می‌کند بسیار مهم است، زیرا فرض جفت گونه جمع پذیر موجب می‌شود که برای به دست آوردن کلیه خواص ترمودینامیکی سیارلت داشتن اطلاع از این تابع کافی باشد. از آنجا که بیشتر با $(r_{12})^{(2)} g$ سر و کار داریم، بنابراین بالاوند را حذف می‌کنیم و

می‌نویسیم $(r) g^{(2)}(r_{12}) = g(r)$ ویژگی‌های $(r) g$ عبارتند از:

الف) اگر مولکولی را در مبدأ تصور کنیم $\rho g(r) dr$ تعداد مولکول‌هایی را نشان می‌دهد که در فاصله r تا $r+dr$ از مولکول مبدأ وجود دارند. باید توجه داشت این احتمال به واحد نرمال نشده است اما در عرض رابطه زیر وجود دارد:

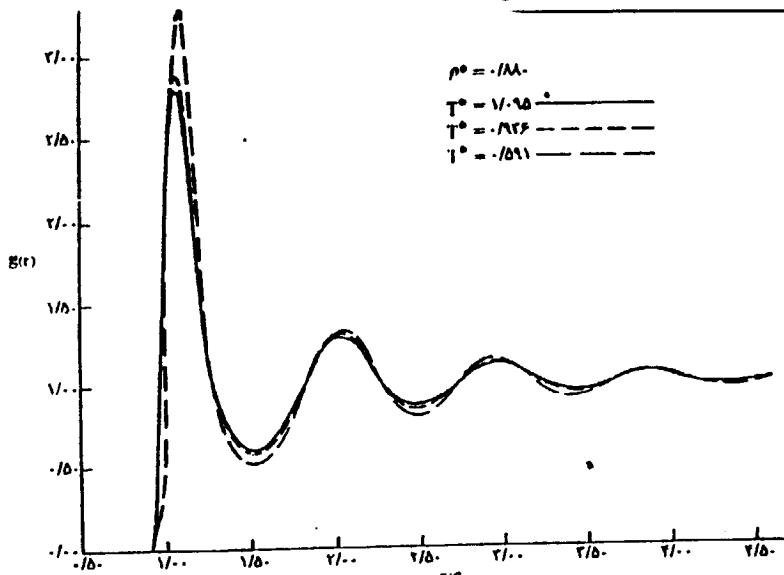
$$\int_0^\infty \rho g(r) 4\pi r^2 dr = N - 1 \approx N \quad (14-1)$$

در حقیقت معادله فوق نشان می‌دهد که عبارت $\rho g(r) dr$ برابر تعداد مولکول‌هایی هستند که بین r و $r+dr$ در اطراف مولکول مرکزی وجود دارند.

ب) می‌توان تصور نمود که تابع $(r) g$ به عنوان فاکتوری است که اگر در چگالی توده‌ای ρ حول مولکول ثابت مرکزی ضرب شود رابطه زیر را به دست می‌دهد:
 $\rho(r) = \rho g(r) \quad (15-1)$

ج) هنگامی که $r \rightarrow 0$ به علت اینکه پتانسیل برهمنکش در حد فواصل خیلی کم به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، بنابراین انتظار داریم که:

$$\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0 \quad (16-1)$$



شکل (۱-۳): تابع توزیع شعاعی برای سیال که مولکول‌های آن بر اساس پتانسیل (۱۲، ۶) لما برهمنکش دارند. این منحنی از نتایج محاسبات دینامیک مولکولی ترسیم شده است.
 $T^o = kT/\epsilon$

در شکل (۱-۳) تابع توزیع شعاعی برای سیال لنارد- جونز در چند دما بر حسب فاصله از مولکول مرجع رسم شده است. این منحنی‌ها از محاسبات دینامیک مولکولی به دست آمده‌اند. مشاهده می‌شود که شکل (۱-۳) با رفتار معادله (۱-۱) مطابقت دارد. قله اول مربوط به نزدیکترین همسایه و قله‌های بعدی همسایه‌های بعدی را نشان می‌دهند. ملاحظه می‌شود که مولکول مرجع (واقع در مبدأ مختصات $r=0$) در توزیع چند لایه مجاور نقش دارد و به عبارت دیگر یک نظم منطقه‌ای ایجاد می‌کند. بعد از چند قطر مولکولی این نظم ملاحظه نمی‌شود و هنگامی که $r \rightarrow \infty$ تابع توزیع شعاعی (r) به سمت واحد میل می‌کند.

(د) در شکل (۱-۴) رفتار تابع توزیع شعاعی برای سیال لنارد- جونز نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش دما نظم منطقه‌ای کاهش می‌یابد و تعداد مولکول‌ها در لایه اول کاهش پیدا می‌کند. بر اساس شکل (۵-۱) با افزایش چگالی سیال سطح زیر اولین پیک افزایش می‌یابد. این مشاهده بدین مفهوم است که با افزایش چگالی سیال عدد کثوردیناسیون افزایش می‌یابد. به طور تجربی مشخص شده است که سطح زیر پیک اول که به عدد کثوردیناسیون اول مربوط است با چگالی به طور خطی تغییر می‌کند.