[section]

دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

# نیم گروه های پوششی از متغیرهای توپولوژیکی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا میری

استاد مشاور:

دکتر امان ا... اسدی

نگارش:

مریم احسنی فیض آبادی

شهریور 1390

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم به پاس تمامی زحماتشان

و

استادم جناب آقای دکتر میری

# قدردانی و تشکر

ستایش خداوندی را سزاست که کسوت هستی را بر اندام موزون آفرینش پوشانید و تجلیات قدرت لایزال را در مظاهر و آثار طبیعت نمایان گردانید. آن بی نشان که شاهباز بلند پرواز خیال در فضای بی پایان جبروتش از طیران پر افشاند و سمند عقول و اوهام در بیابان انتهای ابدیش از تک و دو باز ماند، هادیان شرایع آسمانی را به ارشاد خلایق بر مثال چراغ فروزان فرا راه گذاشت و نظام اجتماعات بشری را در امتثال احکام و انقیاد قوانین آنان مقرر داشت. شکر می گذارم به درگاه احدیتش.

بعد از حمد و سپاس خداوند متعال که روح تشکر را در کالبدم دمید، گل بوسه سلام و مهرورزی را به دستان گرم تمامی استادان مهربانم می افشانم که زکات علم خویش را در طبق اخلاص ره توشه ی راهم ساختند. تشکر ویژه خویش را از: استاد راهنمای محترمم جناب آقای دکتر محمد رضا میری که همواره با چهره ای بشاش و برخورد گرم و صمیمی، پیگیر مراحل مختلف پایان نامه بوده اند و همچنین استاد مشاورم جناب آقای دکتر امان الله اسدی که در جمع آوری کتاب و مقالات مرا یاری داده اند، ابراز می دارم.

جاده زندگیتان مرصع به تن پوش دعا باد.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر علی رضا جانفدا و جناب آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد که از

کلاس های درسشان بهره ای وافر برده ام و زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را به عهده داشتند و همچنین از آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی نماینده ی محترم تحصیلات تکمیلی، کمال تشکر و سپاس را دارم.

در این جا بر خود لازم می دانم از پدر و مادر عزیزم که در تمامی لحظات زندگی همراه من بودند و همچنین از خواهران و برادرانم که در مدت تحصیل آرامش بخش وجودم بودند تشکر و قدردانی کنم. در خاتمه از تمامی دوستان و عزیزانی که در مراحل مختلف، این حقیر را یاری نموده اند و از ذکر نام آن ها عاجز و ناتوانم، کمال تشکر را دارم.

# چکیده

نیم گروه پوششی از سیستم دینامیکی توسط رابرت الیس [1] معرفی شد.وی در قضیه‌ای موسوم به پیوستگی توام الیس اصول اصلی سیستم‌های دینامیکی توپولوژیکی را بیان کرد. کار ما در این پایان نامه بر اساس تحقیقات الی گلسنر [2] در سال ۲۰۰۷ درباره نیم گروه های پوششی از متغیر های توپولوژیکی است.

بعد از معرفی سیستم های دینامیکی ، نحوه ارتباط یک سیستم با نیم گروه پوششی آن را مورد بررسی قرار داده و نشان می دهیم که تحت شرایطی نیم گروه پوششی یک سیستم یک گروه خواهد بود.

هدف ما در این پایان نامه بررسی خواصی از سیستم های دینامیکی و نمایش خطی آن در فضای باناخ است. در نهایت به این سوال پاسخ می دهیم که اگر $X$ یک $G$-فضای متری فشرده باشد آیا می توان نتیجه گرفت که نیم‌گروه پوششی $E(X)$ متری پذیر است؟ وبعد از جواب دادن به این سوال به صورت جدیدی از قضیه پیوستگی توام الیس خواهیم رسید.


[1] R. Ellis

[2] Eli Glasner

# فهرست مطالب

# مقدمه

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است.

فصل اول تحت عنوان مفاهیم پایه به بیان تعاریف، قضایا و نکاتی می‌پردازد که در فصل های بعدی به آن‌ها نیاز داریم. اثبات اکثر قضایای این فصل به [۲] ارجاع داده شده است. این فصل مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول به‌طور گذرا به مطالعه‌ی نیم‌گروه‌های توپولوژیک پرداخته و در بخش دوم سیستم دینامیکی را معرفی کرده و در بخش سوم به معرفی نیم‌گروه پوششی روی سیستم دینامیکی می‌پردازیم.

فصل دوم تحت عنوان انواع سیستم های دینامیکی، مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول به معرفی سیستم‌های همپیوسته و $WAP$ پرداخته و مشاهده می‌کنیم که بسیاری از خواص دینامیکی یک سیستم ( یعنی خواص ناشی از عمل سیستم ) تعیین کننده خواص جبری نیم‌گروه پوششی آن سیستم است. در بخش دوم با استفاده از گروه پوچ توان از کلاس ۲ به مطالعه‌ی پوچ سیستم‌های از کلاس ۲ می‌پردازیم و خواهیم دید که اگر $(X, a)$ یک سیستم تا حدودی خاص یعنی دورشونده و مینیمال باشد، آن‌گاه با پوچ سیستم $(\dfrac{N}{\Gamma}, a)$ ایزومورفیسم خواهد بود و نیم‌گروه پوششی آن نیز یک گروه پوچ توان از کلاس ۲ است. در بخش سوم مدل دینامیکی دوگانگی $BFT$ را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که نیم‌گروه

پوششی یک سیستم دینامیکی متری، فشرده روزنتال و یا شامل یک کپی همئومورفیسم از $\beta\mathbb{N}$ (فشرده سازی استون-چک از اعداد طبیعی ) است و سپس به معرفی سیستم دینامیکی منظم می‌پردازیم.

فصل سوم تحت عنوان سیستم دینامیکی در فضای باناخ، مشتمل بر سه بخش است. در بخش اول ابتدا به معرفی سیستم دینامیکی انژکتیو پرداخته و نشان می‌دهیم که هر سیستم دینامیکی منظم انژکتیو است. در بخش دوم سیستم های $NS$ و $HNS$ را معرفی کرده و سپس به بیان نمایشی از سیستم دینامیکی در فضای باناخ می‌پردازیم. در ادامه سیستم‌های $RN$ و $RN_{app}$ را معرفی می‌کنیم و بیان شرایط هم ارز با سیستم $HNS$ می‌پردازیم. و در بخش سوم نشان می‌دهیم که اگر $X$ در شرایط هم ارز سیستم دینامیکی $HNS$ صدق کند آن‌گاه دارای کاردینالیتی کمتر یا مساوی $2^{\aleph_0}$ است و در نهایت به این سوال پاسخ می‌دهیم که این نیم‌گروه پوششی متر پذیر است؟ همچنین صورت جدیدی از قضیه پیوستگی توام الیس را خواهیم دید.

# فصل ۱

# مفاهیم پایه

## ۱.۱ نیم‌گروه ها

**تعریف ۱.۱.۱.** یک نیم‌گروه [۱] زوج مرتب $(S,o)$ که در آن $S$ یک مجموعه‌ی غیرتهی و$o$ یک عمل دوتایی روی $S$ به‌صورت $S \times S \to S : sot := st \to (s,t)$ می‌باشد طوری‌که $S$ نسبت به این عمل شرکت پذیر است، یعنی برای هر $r,s,t \in S$ ؛ $r\,(st) = (rs)\,t$ همچنین عنصر $e \in S$ را یک عنصر خودتوان [۲] گوییم هرگاه$e = e^{2}$

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض که $S$ یک نیم‌گروه و $T$ یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از $S$ باشد آن‌گاه:

الف)$T$ یک زیر نیم‌گروه از$S$ است اگر $T^{2} \subset T$ یعنی اگر $T$ یک نیم‌گروه همراه با رابطه ضرب در $S$ باشد

ب)$T$ یک ایده آل چپ از$S$ است هرگاه$ST \subset T$

ج)$T$ یک ایده آل راست از $S$ است هرگاه $TS \subset T$

د)$T$ یک ایده آل دوطرفه است اگر هم ایده آل راست و هم ایده آل چپ باشد.

**تعریف ۳.۱.۱.** یک ایده آل چپ نیم‌گروه $S$ را مینیمال [۳] نامیم هرگاه شامل هیچ ایده آل چپ سره نباشد. ایده آل راست مینیمال و ایده آل (دوطرفه) مینیمال به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین ایده آل چپ از نیم‌گروه $S$ را ماکسیمال [۴] نامیم هرگاه مشمول در هیچ ایده آل چپ سره نباشد. ایده آل راست ماکسیمال و ایده آل (دوطرفه) ماکسیمال به طور مشابه تعریف می‌شوند.

**تعریف ۴.۱.۱.** نیم‌گروه $S$ ساده چپ [۵] (ساده راست) نامیده می‌شود هرگاه شامل هیچ

---

[۱] Semigroup
[۲] Idempotent
[۳] Minimal
[۴] Maximal
[۵] Left Simple

ایده آل چپ (راست) سره نباشد. $S$ را ساده گوییم هرگاه شامل هیچ ایده آل سره نباشد.

**قضیه ۵.۱.۱.** *فرض کنید $e$ یک عنصر خودتوان در نیم‌گروه $S$ باشد، در این صورت احکام زیر معادل‌اند:*

*الف)$Se$ ایده آل چپ مینیمال است*

*. ب)$eS$ ایده آل راست مینیمال است.*

*ج)$eSe = (eS \cap Se)$ یک گروه است ( و بنابراین زیرگروه ماکسیمال از $S$ شامل $e$ می‌باشد.)*

*برهان.* به قضیه ۸ ۰ ۲ ۰ ۱ از [۲] مراجعه شود. $\square$

**تعریف ۶.۱.۱.** یک خودتوان از $S$ را که در یکی از شرط های معادل بالا صدق کند،خودتوان مینیمال [۶] گوییم.

**قضیه ۷.۱.۱.** *فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه با خودتوان مینیمال باشد در این صورت احکام زیر معادل اند:*

*الف) $S$ دارای ایده آل مینیمال و یکتای $K := K(S)$ می‌باشد.*

*ب)$J(K) \neq \emptyset$ ، که در آن $J(K)$ مجموعه‌ی خودتوان‌های $K$ است.*

*ج)مجموعه‌های$\{Se : e \in J(K)\}$ و$\{eS : e \in J(K)\}$ و$\{eSe : e \in J(K)\}$ به ترتیب مجموعه ایده‌آل‌های چپ مینیمال $S$ ،مجموعه ایده‌آل‌های راست مینیمال $S$ و مجموعه‌ی زیرگروه های ماکسیمال $K$ هستند.*

*د)* $K = \cup\{Se : e \in J(K)\} = \cup\{eS : e \in J(K)\} = \cup\{eSe : e \in J(K)\}$

*برهان.* به قضیه ۱۲ ۰ ۲ ۰ ۱ از[۲] مراجعه شود. $\square$

[۶] Minimal Idempotent

**تعریف ۸.۱.۱.** هرگاه $S$ یک نیم‌گروه باشد برای هر عنصر $t \in S$ نگاشت‌های $\rho_t$ و $\lambda_t$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_t : S \to S \qquad \rho_t(s) = st$$

$$\lambda_t : S \to S \qquad \lambda_t(s) = ts$$

**تعریف ۹.۱.۱.** فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه و یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت $S$،

الف)نیم‌گروه توپولوژیکی راست [۷] (نیم‌گروه توپولوژیکی چپ) نامیده می‌شود هرگاه $\rho_s : S \to S$ $(\lambda_s : S \to S)$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشد.

ب)نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک [۸] نامیده می‌شود هرگاه $\lambda_s : S \to S$ و $\rho_s : S \to S$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشد.(یعنی ضرب $(s,t) \to st : S \times S \to S$ پیوسته مجزا [۹] باشد.)

ج)نیم‌گروه توپولوژیکی [۱۰] نامیده می‌شود هرگاه ضرب $(s,t) \to st : S \times S \to S$ پیوسته توام [۱۱] باشد.

د)گروه توپولوژیکی [۱۲] نامیده می‌شود هرگاه $S$ یک گروه و یک نیم‌گروه توپولوژیکی بوده و همچنین نگاشت $s \to s^{-1} : S \to S$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشد.

*توجه: $S$ را گروه توپولوژیکی راست (چپ)گوییم هرگاه $S$ یک گروه و نیز یک نیم‌گروه*

[۷] Right topological
[۸] Semitopological semigroup
[۹] Separately continuous
[۱۰] Topological semigroup
[۱۱] Jointly continuous
[۱۲] Topological group

*توپولوژیکی راست (چپ) باشد. به طور مشابه $S$ را یک گروه نیم‌توپولوژیک نامیم هرگاه $S$ یک گروه و نیز یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک باشد.*

**مثال.** فرض که $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ،به ترتیب مجموعه اعداد مختلط، مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد حقیقی (با توپولوژی معمولی) باشند. در این صورت این مجموعه ها تحت عمل جمع گروه توپولوژیکی و تحت عمل ضرب نیم‌گروه توپولوژیکی هستند.

**تعریف ۱.۱.۱۰.** فرض کنید $X$ یک مجموعه و $U$ یک خانواده ناتهی از زیر مجموعه‌های $X \times X$ باشد.در این صورت زوج $(X, U)$ را یک فضای یکنواخت [۱۳] نامیم هرگاه:

۱)هر عضو $U$ شامل $\Delta$ باشد.

۲) اگر $v \in U$ آن‌گاه $v^{-1} \in U$.

۳) اگر $w \in U$ آن‌گاه برای هر $v \in U$ داشته باشیم:$v.v \subset U$.

۴) اگر $v, w \in U$ آن‌گاه $v \cap w \in U$.

۵) اگر $v$ و $v \subset w \subset X \times X$ آن‌گاه $w \in U$.

*حال به بیان چند قضیه از توپولوژی می‌پردازیم که برای اثبات آن‌ها می‌توانید به فصل ۷ از[۱۵] (قضیه های ۹و۱۴ و ۱۵ ) مراجعه کنید.*

*فرض کنید $F$ خانواده تمام توابع پیوسته از فضای توپولوژیک $X$ به توی فضای یکنواخت $Y$ باشد. در این صورت:*

**قضیه ۱.۱.۱۱.** *فرض کنید $F$ دارای توپولوژی همگرای یکنواخت [۱۴] روی $X$ باشد. در این صورت $F \times X \to Y : (f, x) \mapsto f(x)$ در هر نقطه $(f, x)$ پیوسته است.*

[۱۳] Uniform space

[۱۴] Uniform convergence

**قضیه ۱.۱.۱۲.** *اگر $F$ یک خانواده همپیوسته باشد در این صورت توپولوژی همگرای نقطه‌وار [۱۵] $F$ روی $X$ پیوسته توام است. همچنین روی زیر مجموعه‌های فشرده $X$، دو توپولوژی همگرای نقطه‌وار و همگرای یکنواخت بر هم منطبق می‌شوند.*

**قضیه ۱.۱.۱۳.** *اگر $F$ یک خانواده همپیوسته از توابع باشند آن‌گاه بستار [۱۶] $F$ در توپولوژی همگرای نقطه‌وار نیز یک خانواده همپیوسته از توابع است.*

**مثال.** فرض که $X$ یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت $X^X$ در توپولوژی حاصلضربی (یعنی توپولوژی همگرای نقطه‌وار روی $X$ ) و تحت عمل ترکیب توابع یک نیم‌گروه توپولوژیکی راست می‌باشد. چون اگر $\{f_\alpha\}$ یک تور در $X^X$ همگرا به $f \in X^X$ باشد آن‌گاه برای هر $g \in X^X$ و $x \in X$ ، $f_\alpha\left(g\left(x\right)\right) \to f\left(g\left(x\right)\right)$ یعنی $f_\alpha og \to fog$. همچنین واضح است که زیر نیم‌گروه توابع پیوسته در $X^X$ یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک است.چنانچه $X$ یک فضای یکنواخت باشد بنا بر قضیه ۱.۱.۱۲ ، هر زیر نیم‌گروه $X^X$ که یک خانواده همپیوسته از توابع باشد یک نیم‌گروه توپولوژیک است و بالاخره چنانچه $X$ یک فضای یکنواخت و $X^X$ یک نیم‌گروه توپولوژیکی راست بوده و بنا بر قضیه‌ی ۱.۱.۱۱، زیر نیم‌گروه شامل تمام توابع پیوسته یکنواخت [۱۷] یک نیم‌گروه توپولوژیک است.

**قضیه ۱.۱.۱۴.** (*قضیه آسکولی* [۱۸]) *فرض کنید $X$ یک فضای هاسدورف موضعا فشرده و $(Y, d)$ یک فضای متری باشد. $C(X, Y)$ را با توپولوژی فشرده- باز در نظر می‌گیریم. زیر مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ از $C(X, Y)$ بستار فشرده دارد اگر و تنها اگرهمپیوسته باشد و به ازای هر $x$ زیر مجموعه‌ی $\mathcal{F}_x = \{f(x) \ : \ f \in \mathcal{F}\}$ از $Y$ دارای بستار فشرده باشد.*

[۱۵] Pointwise convergence
[۱۶] Closure
[۱۷] Uniformly continuous
[۱۸] Ascoli theorem

**تعریف ۱.۱.۱۵.** مرکز توپولوژیکی نیم‌گروه $S$ را با $\Lambda\left(S\right)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\Lambda\left(S\right)=\left\{\lambda_s:S\rightarrow S\right\}$ که برای هر $s\in S$، $\lambda_s$ پیوسته باشد.

چنانچه $S$ یک نیم‌گروه توپولوژیکی راست و $\Lambda\left(S\right)\neq\emptyset$،با توجه به این که برای هر $s,t\in S \quad \lambda_{st}=\lambda_s o\lambda_t$ نتیجه می‌شود که $\Lambda\left(S\right)$ یک زیر نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک از $S$ است.

**تعریف ۱.۱.۱۶.** فرض که $S$ یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیک باشد. زوج $(\psi,X)$ را یک فشرده‌سازی نیم‌گروهی از $S$ نامیم هرگاه $X$ یک نیم‌گروه توپولوژیکی راست، هاسدورف وفشرده بوده و $\psi:S\rightarrow X$ یک همریختی پیوسته باشد.طوری‌که $\psi(S)^-=X$ و همچنین $\psi(S)\subseteq\Lambda(X)$

**تعریف ۱.۱.۱۷.** فرض کنید $S$ یک گروه توپولوژیک و $X$ یک فضای توپولوژی باشد. گوییم گروه توپولوژیک $S$ از چپ بر فضای توپولوژیک $X$ عمل می‌کند هرگاه نگاشت پیوسته ای چون: $\sigma:S\times X\rightarrow X$ که $(s,x)\mapsto\sigma(s,x)$ واجد خواص زیر وجود داشته باشد.

$$۱)\forall x\in X;\sigma(e,x)=x$$

$$۲)\forall s_۱,s_۲\in S,\forall x\in X;\sigma(s_۲,\sigma(s_۱,x))=\sigma(s_۲s_۱,x)$$

به جای نماد $\sigma\left(s,x\right)$ نماد $sx$ را استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۱.۱.۱۸.** (*پیوستگی توام الیس- لاوسون* [۱۹] )*:فرض کنید $S$ یک نیم‌گروه توپولوژیکی*

---

[۱۹] Ellis-Lawson

*چپ و هاسدورف با عنصر همانی باشد که موضعا فشرده [۲۰] یا متریک‌پذیر کامل [۲۱] است. همچنین فرض کنید $G$ گروه عناصر وارون‌پذیر $S$ و عمل $\sigma : S \times X \to X$ پیوسته مجزا باشد که در آن $X$ فضایی هاسدورف و فشرده است در این صورت $\sigma$ در هر نقطه از $G \times X$ پیوسته است.*

*برهان.* به قضیه ۲۰۴۰۱۰ از[۲] مراجعه شود. □

*توجه: اگر $S$ گروه باشد آن‌گاه عناصر وارون‌پذیر $S$، خود $S$ می‌باشد.*

*یکی از نکات کلیدی در ساختمان جبری در لم زیر آمده است.*

**لم ۱۹.۱.۱.** *(الیس-ناماکارا [۲۲] ):فرض کنید $L$ یک نیم‌گروه فشرده هاسدورف و همه‌ی نگاشت‌های $p \to pq$ پیوسته باشند، آن‌گاه $L$ شامل یک خودتوان است.*

*برهان.* با توجه به لم زورن (اگر $S$ یک مجموعه غیرتهی جزئی مرتب نسبت به رابطه‌ی$\leq$ باشد طوریکه هر زنجیر $T$ از $S$ دارای کران بالا باشد آن‌گاه $S$ حداقل یک عنصر بیشین دارد.)زیر نیم‌گروه فشرده مینیمال $K \subset L$ موجود است که برای هر $e \in K$، $Ke$ یک زیر نیم‌گروه فشرده از $K$ است که از آن جا $Ke = K$. و در حالت خاص حداقل $k \in K$ موجود است که $ke = e$.

حال مجموعه‌ی $M = \{l \in K \quad : \quad le = e\}$ یک زیر نیم‌گروه بسته‌ی غیرتهی از $K$ است.(زیرا برای هر $k \in K$ این مجموعه غیرتهی است و از این که حداقل برای یک $k \in K$داریم: $ke = e$ و $Ke = K$ پس $e \in K$ لذا $e \in M$ ) پس می‌توان نتیجه گرفت که $M = K$ بویژه $ee = e$. □

---

[۲۰] Locally compact
[۲۱] Complete metrizable
[۲۲] Ellis–Numakura

## ۲.۱ سیستم دینامیکی

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنید که گروه توپولوژیک $G$ بر فضای توپولوژی $X$ از چپ عمل کند. برای هرعنصر دلخواه ولی ثابت $g \in G$ نگاشت $x \mapsto \sigma_g(x) = \sigma(g,x) : X \to X$ یک همئومورفیسم بر $G$ تعریف می‌کند(زیرا $\sigma_g o \sigma_h = \sigma_{gh}$ و وارون هر $\sigma_g$ برابر با $\sigma_{g^{-1}}$ است) حال اگر قرار دهیم $\acute{G} = \{\sigma_g : g \in G\}$ و عمل $\acute{G}$ را همان ترکیب نگاشت‌ها در نظر بگیریم(یعنی:$\sigma_g o \varphi_h = \sigma_{gh}$ ; $(\forall \sigma_g, \sigma_h \in \acute{G}$) آن‌گاه $\acute{G}$ همراه با عمل فوق یک گروه است که در آن عنصر همانی $\acute{G}$ همان $\sigma_e$ و وارون هر $\sigma_g \in \acute{G}$ عنصر$\sigma_{g^{-1}} \in \acute{G}$ است. به سه تایی $(\acute{G}, X, \sigma)$ گروه تبدیلات پیوسته یا به اختصار یک سیستم دینامیکی توپولوژیکی گوییم.

همچنین این $G$ -عمل با همئومورفیسم پیوسته‌ی $i : G \to Home(X)$ که $i(g) = \breve{g}$ مجهز به توپولوژیکی یکنواخت فرض می‌شود. معمولا $g$ را با $\breve{g}$ یکی گرفته و $gx$ را بجای $\breve{g}x$ می‌نویسیم.

**تعریف ۲.۲.۱.** یک زیر مجموعه‌ی پایای بسته‌ی غیرتهی $Y \subset X$ با عمل محدود، یک زیر سیستم از $(X, G)$ است.

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنید که $G$ یک گروه توپولوژیک و $X$ یک فضای توپولوژیک باشد و نیز فرض کنید که $G$ از چپ بر $X$ عمل می‌کند. عنصر $x \in X$ را دلخواه ولی ثابت در نظر میگیریم و نگاشت $\sigma_x$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma_x : G \to X \qquad \sigma_x(g) = \sigma(g,x) = gx$$

تصویر گروه $G$ تحت نگاشت $\sigma_x$ را مدار نقطه‌ی $x \in X$ خوانیم و با $O\left(x\right)$ نمایش می‌دهیم.

لذا $O\left(x\right) = \sigma_x\left(G\right) = \left\{gx \quad s.t \quad g \in G\right\}$ و $\bar{O}_G\left(x\right) = cls\left\{gx \quad s.t \quad g \in G\right\}$

در این صورت چنانچه $(X, G)$ یک سیستم و $x \in X$ باشد، مجموعه‌ی $Gx$ را مدار $x$ و $(Gx)^{-}$ را بستار مدار $x$ می‌نامیم.

**تعریف ۴.۲.۱.** سیستم $(X, G)$ را ترایای نقطه‌ای [۲۳] (یا به طور خلاصه ترایا) نامیم هرگاه نقطه‌ی $x_\circ \in X$ موجود باشد که $O_G(x_\circ) = \{gx_\circ \ : \ g \in G\}$ در $X$ چگال باشد. در این صورت مجموعه تمام نقاط ترایایی $(X, G)$ را با $X_{tr}$ نمایش می‌دهیم.

در حالت خاص یک سیستم مینیمال [۲۴] است اگر و تنها اگر $X = X_{tr}$ یعنی هر نقطه آن ترایا باشد. در سیستم $(X, G)$ نقطه $x \in X$ مینیمال است اگر و تنها اگر $\bar{O}_G(x)$ زیر سیستم مینیمال از $(X, G)$ باشد.

**تعریف ۵.۲.۱.** گوییم سیستم دینامیکی نقطه‌ای$(X, x_\circ, G)$ عموما نقطه‌ای [۲۵] است اگر برای هر $x \in X$ یک همئومورفیسم $\pi_x : (X, x_\circ) \to (\bar{O}_G(x), x)$ موجود باشد.

**تعریف ۶.۲.۱.** فرض کنید $(X, G)$ و $(Y, T)$ دو سیستم دینامیکی باشند. در این صورت زوج $(\psi, \theta)$ را یک همریختی از $(X, G)$ به $(Y, T)$ نامیم هرگاه برای هر $g \in G$ و $x \in X$، $\theta(gx) = \psi(g)\theta(x)$ که در آن $\psi$ یک همریختی پیوسته از $G$ به توی $T$ و $\theta$ یک تابع پیوسته از $X$ به $Y$ است.

توجه: هرگاه $G = T$ در این صورت $\theta$ را یک همریختی از $(X, G)$ بروی $(Y, G)$ نامیم هرگاه برای هر $g \in G$ و $x \in X$، $\theta(gx) = g\theta(x)$ که در آن $\theta$ یک تابع پیوسته از $X$ بروی

[۲۳] point transitive
[۲۴] Minimal system
[۲۵] Point-universal