وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

ارتباط بین روش نقطه درونی با مسائل نقطه ثابت

استاد راهنما
دکتر علیرضا غفاری حدیقه

استاد مشاور
دکتر شهرام رضاپور

پژوهشگر
وریا وکیلی

تیرماه ۱۳۹۱
تبریز- ایران

این صفحه عمدا خالی است

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم، شمع های فروزانی که شعله آنها چراغ راهم بود

پروردگارا...

کس به پایان و نهایت شکرگزاری تو نمی‌رسد، مگر این که احساس و نیکی تو شکری دیگر را بر او واجب نماید و هر چقدر در طاعت و فرمانبرداری تو کوشش کند، باز به خاطر فضل و احسان بی‌انتهای تو عاجز و ناتوان است .

خدایا، همیشه در لحظات سخت زندگیم با خود می‌گویم: شاید این همان آزمایشی باشد که تو در پشت این پرده‌ی تاریک می‌خواهی تصویر زیبایی از زندگی برایم بسازی، پس ای خدا مرا به اندازه‌ی توانم بیازما و صبوری بیاموز.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

وریا وکیلی

تیرماه۱۳۹۱

چکیده

برنامه‌ریزی ریاضی (بهینه سازی) شاخه‌ای از ریاضی کاربردی است که در شاخه‌های مختلف علم چون صنعت، اقتصاد و...، کاربرد دارد. در برنامه‌ریزی ریاضی با یک تابع هدف و ناحیه‌ای که مسئله روی آن تعریف شده است(ناحیه جواب مسئله) روبرو هستیم، که هدف بیشینه یا کمینه کردن تابع هدف روی این ناحیه است. اما متناظر با اینکه تابع هدف یا ناحیه جواب مسئله خطی باشند یا غیر خطی، مسئله‌ی ما نیز برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی، به طور متناظر، خوانده می‌شود.

به دلیل خواص مسائل برنامه‌ریزی که از لحاظ تئوری برای بیان و تفسیر روش‌ها مناسب تر هستند، مبنا را در این رساله برنامه‌ریزی خطی می‌گیریم، و به طور خلاصه‌تر به برنامه‌ریزی غیرخطی خواهیم پرداخت. به طور خلاصه روش‌های نقطه‌درونی به روش‌هایی اطلاق می‌شود که با اتخاذ روندی در الگوریتم خود تکرارهای حاصل شده از محاسبات الگوریتم را درون ناحیه‌ی شدنی حفظ می‌کنند. این روش که در سال ۱۹۸۴ و با مقاله‌ی کارمارکار معرفی شد، به‌طور گسترده‌ای در شاخه‌های مختلف ریاضی و به‌خصوص برنامه‌ریزی ریاضی گسترش یافت. نسبت به وضعیت‌های مختلف از مسائل، روش‌های نقطه‌درونی هم به اقتضای این وضعیت‌ها تغییر کردند و روش‌های نقطه‌درونی طیف گسترده‌تری پیدا کردند. مسائل نقطه‌ثابت به مسائلی اطلاق می‌شود که در آنها با فرض اینکه برای تابعی چون $f : A \longrightarrow B$، نقطه ای با خاصیت $f(x) = x$ وجود دارد، در پی یافتن چنین نقطه‌ای(یا نقاطی) هستیم.

حالتهای خاصی هم برای نقطه‌ثابت و نواحی که تابع روی آنها تعریف می شود وجود دارد، هرکجا از رساله که نیاز باشد این حالت‌های خاص و خواص آنها و روشهای متناظر با آنها بررسی می‌شود.

اما هدف اصلی در این رساله یافتن روابط و خواص مشترک در روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی ریاضی، با مسائل نقطه‌ثابت و روش‌های متناظر یافتن نقطه‌ثابت توابع با چنین خاصیتی، است.

روش‌هایی چون روش هموتوپی که هم برای مسائل برنامه‌ریزی ریاضی در قالب الگوریتم‌های نقطه درونی (که در ادامه شرح داده می‌شوند)، و هم برای یافتن نقطه‌ثابت توابع، به کار بسته می شوند دارای خط سیرهای بسیار متشابه در برنامه‌ریزی ریاضی و مسئله یافتن نقطه‌ثابت هستند.

مفهوم‌های دیگری چون خاصیت نقطه‌ثابت در الگوریتم نقطه درونی، و موازی با آن خط سیر روش هموتوپی که برای یافتن نقطه‌ثابت توابع با چنین خاصیتی استفاده می‌شود دارای خاصیت حفظ درونی بودن تکرارها که مدنظر روش‌های نقطه درونی در برنامه‌ریزی ریاضی است، هستند.

کلمات کلیدی: روش‌های نقطه درونی ، برنامه‌ریزی خطی و غیر خطی، مسئله نقطه‌ثابت، روش‌های هموتوپی

پیشگفتار

مسئله برنامه‌ریزی خطی یکی از شاخه‌های برنامه‌ریزی ریاضی است که خود بخشی از تحقیق در عملیات در حالتی کلی‌تر است. می‌توان یک بیان اقتصادی از این مسئله را فرموله کردن نسخه‌ای از یک سری از اصول اقتصادی دانست، که متناظر با چشم انداز تصمیم گیرنده با قیودی حاصل از محدودیت‌های مسئله، در پی کمینه یا بیشینه کردن تابعی به نام تابع هدف بر روی ناحیه‌ی جواب حاصل از این قیود هستیم.

در حال حاضر مسئله برنامه‌ریزی خطی یکی از پرکاربردترین شاخه‌های ریاضی کاربردی، چه در خود ریاضی و چه در سایر علوم، می‌باشد، که باعث توجه بیش از پیش محققان به این دسته از مسائل گشته است. اگر بخواهیم از کارهای بسیار قدیمی اشخاصی چون فارکاس [۱] و فوریه [۲] که در جهت یافتن جواب‌های سیستم‌های خطی انجام شده و به قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ برمی‌گردد صرف‌نظر کنیم، مفهوم مدرنی از LP به کارهای کانتورویچ [۳] در سال ۱۹۳۹ بر می‌گردد[۳]، که به دلیل شروع جنگ جهانی دوم کارهای او ناشناخته ماند. بعدها در سال ۱۹۴۷ این مسئله به صورت جدی‌تر توسط دانتزیگ[۴] و کوپمنز[۵] مورد بررسی قرار گرفت، و دانتزیگ با معرفی روش سادک خود برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تحول شگرفی در برنامه‌ریزی ریاضی ایجاد کرد که باعث توجه بیش از پیش محققان به این شاخه از ریاضی گردید[۳، ۶].

متناظر با هر مسئله برنامه‌ریزی خطی مسئله دیگری به نام دوگان مسئله برنامه‌ریزی خطی داریم که ابتدا توسط فون نیومن [۶] معرفی گردید، قضایای کلی‌تر دوگانی بعدها توسط گال-کاهن-تاکر[۷] بیان شد[۶]. در مسئله برنامه‌ریزی خطی قیود می‌توانند به صورت معادله یا نامعادله باشند. متغیرهای مسئله نیز می توانند دارای شرط نامنفی بودن یا نامقید بودن باشند.

مسئله برنامه‌ریزی خطی و دوگان آن را به صورت زیر در قالب ریاضی بیان می‌داریم:

$$(P) \qquad \min\{c^t x \ : \ Ax = b, x \geq 0\}$$

$$(D) \qquad \max\{b^t y \ : \ A^t y + s = c, s \geq 0\}$$

[۱] Farkas
[۲] Fourier
[۳] Kantorovich
[۴] Dantzig
[۵] Koopmans
[۶] Von Neumann
[۷] Gale-Kuhn-Tucker

مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی نیز قالبی متشابه به قالب تعریف مسئله برنامه‌ریزی خطی دارد با این تفاوت که در حالت غیرخطی، تابع هدف یا قیود مسئله و یا هر دو به صورت توابعی غیرخطی هستند. مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی نیز کاربردهای ویژه ای در ریاضی وسایر علوم دارد، و محققان زیادی بر روی حل چنین مسائلی کار می‌کنند. در این رساله به این فرم از مسائل برنامه‌ریزی ریاضی نیز خواهیم پرداخت و حالت‌های ویژه‌ای از آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مسئله یافتن نقطه‌ثابت یک تابع یکی از مهمترین مسائل در آنالیز تابعی است که روز به روز میزان گرایش محققان جهت کار بر روی آن، یافتن روش‌های جدید جهت حل آن، ارتباط این قسمت از ریاضیات با شاخه‌های دیگر ریاضی و سایر علوم و...، در حال افزایش است. مسئله‌ی نقطه‌ثابت در حالت کلی به یافتن نقطه‌ای چون x در دامنه‌ی تابع $f : A \longrightarrow B$ گفته می‌شود، به‌طوری که $f(x) = x$. نقطه‌ثابت یک تابع می‌تواند منحصر به فرد باشد، یا اینکه یک تابع بی‌نهایت نقطه‌ثابت داشته باشد.

در سال ۱۹۷۶ کیلاگ[۸] و همکاران، اثباتی ساختاری برای قضیه نقطه‌ثابت براوئر[۹] ارائه دادند، و روشی هموتوپی جهت یافتن نقطه‌ثابت توابعی که در فرض‌های این قضیه صدق می‌کنند، پیشنهاد کردند[۱۶]. می‌توان به طور خلاصه هموتوپی را برای تابع خود-نگاشت φ به صورت تعریف تابعی چونH دانست، این تابع ادغامی است از ناحیه شدنی که تابع بر آن تعریف شده، همراه با تابع $f(x) = x$ (در حالت دو بعدی نیمساز ربع اول سوم) و خود تابع ، H طوری تعریف می‌شود که با حرکت از نقطه‌ای ابتدایی، نقطه اشتراک این دو تابع را (در صورت وجود) بیابد. نقطه‌ی نهایی حاصل از اعمال روش هموتوپی نقطه‌ثابت تابع φ است. مانند روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی این روش نیز در بیشتر حالات جوابی تقریبی می‌دهد.

در سال ۱۹۷۸ برای مجموعه بسته و محدب و کراندار Ω، چاو[۱۰] و همکاران هموتوپی زیر را ارائه دادند،

$$(۱-\mu)(x-\varphi(x))+\mu(x-x_۰)$$

این هموتوپی توسط محققان زیادی جهت یافتن نقطه‌ثابت توابع و جواب‌های سیستم‌های غیرخطی، مورد استفاده قرار گرفته است.

در سال ۱۹۴۷ دانتزیک روش سادک خود را در جهت حل مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه داد که باعث توجه هرچه بیشتر به مسائل برنامه‌ریزی خطی و استفاده از آن در سایر علوم شد. همزمان با رشد تکنولوژی و پیدایش کامپیوترها و بروز مبحث سرعت، زمان مورد نیاز یک الگوریتم تا رسیدن به جواب یک مسئله طی روند یک الگوریتم، اهمیت زیادی پیدا کرد. همزمان با این مسئله محققان در زمینه‌ی برنامه‌ریزی خطی به بررسی ویژگی‌های روش سادک نسبت به زمان اجرا پرداختند. این آغازی بود بر مسئله پیچیدگی برای الگوریتم‌های طراحی شده جهت حل مسائل ریاضی[۱۸].

در سال ۱۹۷۲ کلی و مینتی[۱۱]، با ارائه مثالی نشان دادند که با افزایش بعد یک مسئله برنامه ریزی خطی

[۸] Kellogg
[۹] Brouwer
[۱۰] Chow
[۱۱] Klee and Minty

الگوریتم سادک برای مثال‌هایی از این نوع به تکرارهای نیاز دارد که متناظر با اندازه مسئله به صورت نمایی رشد می‌کنند. این باعث بروز مسئله‌ای تحت عنوان یافتن الگوریتمی با پیچیدگی چند جمله‌ای و احتمالا در عمل کاراتر از سادک گردید، واینکه آیا چنین الگوریتمی می‌توان یافت[۳].
اولین پاسخ را خاچیان[۱۲] با ارائه الگوریتمی که از نظر تئوری از نوع چند جمله‌ای بود ارائه داد، اما خیلی زود این روش رد شد زیرا گرچه در تئوری با افزایش اندازه مسئله این روش از سادک سریعتر بود، اما با اجرای این روش برای مثال‌های مختلف مشخص شد که در بیشتر حالات روش خاچیان از روش سادک عملکرد کندتری دارد[۱۸].
پاسخ بهتر به این سوال را کارمارکار[۱۳] با الگوریتم چندجمله‌ای و البته از نوع نقطه‌درونی خود ارائه داد، این روش چه از لحاظ تئوری و چه از لحاظ کارایی در حین اجرا از سادک به مراتب بهتر عمل می‌کرد[۸]، ضمن اینکه این روش سرآغازی بود بر روش‌های نقطه‌درونی و با پیچیدگی چندجمله‌ای برای مسائل برنامه‌ریزی ریاضی، بعد از کارمارکار این روش توسط تعداد زیادی از محققان فعال در این شاخه از ریاضی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج همچنان در حال حصول وتوسیع هرچه بیشتر به شاخه‌های دیگر ریاضی است.
ایده کارمارکار که در سال ۱۹۸۴ جهت حل مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه شد و به حالتهای غیرخطی نیز توسیع یافت، الگوریتمی است که در حین اجرا جهت حل مسئله و یافتن نقطه‌ای بهینه با شروع از نقطه‌ای اولیه که درون ناحیه‌ی شدنی قرار دارد، تکرارهای الگوریتم به نحوی محاسبه می‌شوند که نقاط به‌دست آمده همچنان درون ناحیه شدنی باقی می‌مانند و با حفظ این شرط به بهینگی حرکت کنند. در آنالیز تابعی نیز از مفاهیم نقطه‌درونی در برنامه‌ریزی ریاضی و روش کارمارکار، نحوه‌ی حرکت آن تا رسیدن به جواب، استفاده می‌کنند. در میان این مسائل موجود در آنالیز تابعی مسئله‌ی یافتن نقطه‌ثابت یک تابع مورد توجه در این رساله است [۱۶].
ایده‌ی کارمارکار با کمی تغییر توسط منلونگ سو[۱۴] و همکاران برای حل مسائل نقطه‌ثابت به کار بسته شد که در آن هموتوپی اعمال شده بر مسئله طوری عمل می‌کند که تمام تکرارها درون ناحیه‌ای حاصل از توسیع ناحیه‌ی جواب، باقی می‌مانند[۱۶].
هدف اصلی ما در این رساله یافتن ارتباط‌های موجود بین روش‌های نقطه‌درونی و مسائل نقطه‌ثابت همراه با روش‌های حل مسائل نقطه‌ثابت است. در این راستا در رساله از روش‌های زیادی که در هردو شاخه مورد استفاده قرار گرفته است، یاد می‌کنیم و به تحقیق این روابط خواهیم پرداخت. نتایجی که از این تحقیقات حاصل می‌شود را تحت عنوان فصلی از رساله، ارائه می‌دهیم.
در این رساله با واژه هموتوپی در هر دو مسئله بسیار برخورد می‌کنیم، که در تعریف روش‌های اعمالی بر این مسائل بسیار مورد استفاده قرار گرفته است، به عنوان ریشه‌یابی از این واژه برای روش‌های نقطه‌درونی باید

[۱۲] Khachian
[۱۳] Karmarkar
[۱۴] Menglong Su

به کارهای فیاکو[۱۵]، مککرمیک[۱۶] و فریش[۱۷] اشاره کرد که در دههای ۷۰ ,۶۰ میلادی عنوان شدهاند[۷]. یکی از اصلی ترین مفاهیم در این عنوان می‌تواند تابع ممانعت لگاریتمی باشد که با توجه به خواصش در برنامه‌ریزی ریاضی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است، همچنین مفهوم مسیر مرکزی، که از مفاهیم اساسی در معرفی روش‌های نقطه‌درونی است. با تعریف این مسیر روند تکرارهایی که الگوریتم‌ها می‌سازند باید به‌نحوی باشد که نقاط به‌دست آمده در اطراف این مسیر تعریف شده باقی بمانند، به نحوی می‌توان گفت که این مسیر هم بهینگی و هم قید درونی بودن را به تکرارهای الگوریتم اعمال می‌کند. مفهوم روش مرکزی ابتدا توسط، هوارد[۱۸] درسال۱۹۶۷ ارائه گردید و توسط سایرین توسیع یافت و بر روی آن تحقیق شد. همچنین روش مقیاس آفینی دیکین[۱۹] که در سال ۱۹۶۷ ارائه شد از این عنوان بهره می‌برد و خود سرآغازی بر روش‌های بیضی بود[۷].

در روش‌های موجود برای یافتن نقطه‌ثابت یک تابع، چندان به مفهوم پیچیدگی پرداخته نمی‌شود، و این به دلیل ساختار الگوریتم است که نمی‌توان نسبت به پارامترهای موجود در آن و معیارهای توقف، کرانی برای تکرارها به آن صورت که در روش‌های نقطه درونی وجود دارد، یافت.

مسائل نقطه‌ثابت نیز همانند مسائل برنامه‌ریزی ریاضی از انواع و گستردگی زیادی برخورداند که هر کدام کاربردهای خاص خود را دارند. آنچه مشخص است یافتن نتایجی برای مسئله‌ی پیچیدگی این مسائل قابل توسیع به حالت‌های گسترده‌تری است، حالت‌هایی چون نقطه‌ثابت مشترک و بهترین نقطه‌ی تقریبی مشترک که در این دو مورد به جای یافتن جوابی برای مسئله نقطه ثابت یک تابع، با مسئله‌ی یافتن نقطه‌ثابت مشترک چند تابع روبرو هستیم.

ساختار پایان‌نامه را به این ترتیب تعریف می‌کنیم، در فصل اول تعاریف مورد نیاز از مسائل برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی را عنوان می‌کنیم، در ادامه روش‌های موجود برای حل این مسائل را به‌صورت مختصر می‌آوریم. در فصل دوم چند روش نقطه‌درونی هموتوپی را که اساس بررسی‌ها هستند، برای حالت خطی و غیر خطی، معرفی و تفسیر می‌کنیم. در فصل سه مسائل نقطه‌ثابت معرفی می‌گردند، روش‌های هموتوپی برای حل این مسائل را توضیح و به نحوه‌ی عملکرد این روش‌ها می‌پردازیم. در فصل چهار حاصل بررسی‌ها را در مورد ارتباط مسائل برنامه‌ریزی ریاضی و مسائل نقطه‌ثابت، همچنین اشتراکات موجود در روش حل هر دو مسئله را می‌آوریم. فهرست واژگان در ادامه آورده شده است. در نهایت مراجعی را که در رساله مورد استفاده قرار گرفته اند می‌آوریم.

[۱۵] Fiacco
[۱۶] McCormick
[۱۷] Frisch
[۱۸] Huard
[۱۹] Dikin

فهرست مطالب

فصل ۱

مسائل برنامه‌ریزی ریاضی و روش‌های حل آنها

۱.۱ مقدمه

برای بیان مفاهیم اولیه و قضایای مورد نیاز در رساله با توجه به جایگاه خاص مسائل برنامه‌ریزی خطی، این فصل را با مرور بر مساله برنامه‌ریزی خطی شروع می‌کنیم و در ادامه برنامه‌ریزی غیرخطی را نیز توصیف کرده و روش‌های حل آنها را نیز مرور می‌کنیم. در نهایت روابط بین روش‌های موجود برای مساله برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی بیان می‌شوند.

اگر بخواهیم برنامه‌ریزی ریاضی را بهترین انتخاب در میان انتخاب‌های موجود در یک مسئله‌ی اقتصادی، علوم مهندسی، پزشکی، شاخه‌های مختلف ریاضیات و...، بدانیم. مسئله یافتن کمینه یا بیشینه یک تابع روی ناحیه‌ای است که از فرض‌های اعمال شده بر مسئله به دست می‌آید، هدف در برنامه‌ریزی ریاضی حل کردن مسئله یافتن بهترین جواب ریاضی مسئله فرموله شده است تا بهترین انتخاب صورت گیرد. در طول سالیان روش‌ها و الگوریتم‌های زیادی ارائه شده است که معایب و محاسن هر یک، روابطشان، و بسیاری دیگر از خواص روش‌ها، مورد بررسی قرار گرفته است. آنچه مشخص است در تمام این روش‌ها و کارهایی که برای بهبود عملکرد آنها صورت گرفته است یک هدف مشترک وجود دارد و آن یافتن نقطه‌ی بهینه‌ی مسئله است. یافتن این نقطه تنها معیار سنجیدن روش‌ها نیست، نزدیکی تقریب به جواب اصلی و زمان مورد نیاز تا رسیدن به این جواب، از جمله معیارهای مناسب دیگری برای سنجیدن الگوریتم‌ها و تلاش برای یافتن الگوریتم‌های بهتر است.

تمام این ویژگی‌ها چه در حالت تئوری و چه در حالت عملی با اعمال بر مثال‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اما حالت خطی یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی کاملا مجزا از حالت غیرخطی، به دلیل خواص خوبش، بررسی شده است. دلایل زیادی برای توجه بیشتر به حالت خطی وجود دارد، از آن جمله می‌توان الگوریتم‌های پیشنهاد شده برای حالت خطی را عنوان کرد که در نگاه اول از بیان و توضیح مرحله به مرحله خوبی جهت فهم ساده برای خوانندگان برخوردار هستند. ویژگی‌های دیگر چون محدب بودن این حالت و استفاده از این خاصیت در خط‌سیر رسیدن به جواب، قابل توسیع بودن نتایج حاصل از خطی به شکل

غیرخطی با تغییرات اندکی در قالب اصلی الگوریتم پیشنهاد شده[۱۲]، و بسیاری دیگر از خواص باعث شده است که به این قالب از برنامه‌ریزی ریاضی توجه بیشتری شود.

۲.۱ برنامه‌ریزی خطی

مسئله برنامه‌ریزی خطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\min \{c^t x : Ax = b, x \geq 0\}. \tag{۱.۱}$$

دوگان این مسئله را به صورت زیر عنوان می‌کنیم :

$$\max\{b^t y : A^t y + s = c, s \geq 0\}. \tag{۲.۱}$$

به‌طوری که $x, s, c \in R^n, b, y \in R^m, A \in R^{m\times n}$.

روش‌های حل یک مساله بهینه‌سازی را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دسته اول روش‌هایی هستند که تنها روی یکی از دو مسئله اولیه یا دوگان عمل می‌کنند، دسته دو روش‌های هستند که از یک فرم ادغام شده از این دو مسئله استفاده می‌کنند که در آن هدف رسیدن به جوابی مرکب از متغیرهای اولیه و دوگان است که هم در قیود اولیه و هم دوگان صدق کند و نیز بهترین جواب ممکن برای هر دو را تولید کند. در حالتی که فقط با یک فرم از مسئله روبرو هستیم با متغیرهای کمتری برای بهینه کردن سروکار داریم، شاید به‌نظر برسد که در این حالت باید سرعت همگرای بیشتری تا رسیدن به جواب داشته باشیم، اما در واقع چه درحالت تئوری و چه در حالت عملی اینگونه نیست، در ادامه و با تعریف الگوریتم‌ها این مورد بیشتر از پیش روشن می‌شود. آنچه مورد توجه ماست و بیشتر به آن خواهیم پرداخت الگوریتم‌های اولیه-دوگان است که هر دو مساله‌ی اولیه و دوگان را همزمان و به صورت مساله‌ای یکی شده در نظر می‌گیرند و به نحوی می‌توان گفت از تمام امکانات مسئله جهت رسیدن به مطلوب‌ترین نتیجه استفاده می‌کنند.

به فاصله‌ی موجود بین دو مقدار تابع هدف اولیه و تابع دوگان که به شکل زیر نشان داده می‌شود شکاف دوگانی می‌گویند.

$$c^t x - b^t y. \tag{۳.۱}$$

به سادگی می‌توان دید که شکاف دوگانی در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$c^t x - b^t y = x^t s. \tag{۴.۱}$$

ابتدا قالبی کلی از مواردی که یک الگوریتم برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی نیاز دارد، را شرح می‌دهیم:

تعریف ۱.۱.۱ اولین گام باید مشخص کردن ملاک توقف باشد که به بیانی دیگر انتظار ما را از الگوریتم می‌رساند. الگوریتم زمانی متوقف می‌شود که در نقطه‌ای چون x^k، به یک کمینه‌ی موضعی از تابع هدف برسیم، به عنوان مثال برای حالت کمینه سازی تابع خطی ۱.۰.۱، این نقطه توقف کمینه موضعی تابع c^tx است. این معیار خود به دو صورت زیر تعیین می‌گردد.

(الف) امتحان استاندارد: این ملاکی است که در بیشتر الگوریتم‌ها مورد نظر است، جهت نقطه توقف، مانند اینکه $f(x^k)$ در x^k به اندازه‌ی کافی، که مدنظر ماست، کوچک باشد، مقادیر $f(x^k)$ و $f(x^{k-1})$ خیلی به هم نزدیک باشند، یا اینکه مقادیر x^k و x^{k-1} خیلی به هم نزدیک باشند، و دیگر معیارهای مشابه مانند کاهش شکاف دوگانی به میزانی مورد نظر، یا در روش‌های نشدنی که شدنی بودن به عنوان معیاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. آنچه مشخص شده است در روش‌ها این است که استفاده از ترکیبی از این ابزارها همگرای بهتری را نتیجه می‌دهد[۶].

(ب) امتحان غیر استاندارد(یا حالت بدترین وضعیت) این حالت زمانی رخ می‌دهد که x^0, x^k بسیار به کمینه موضعی نزدیک باشند ولی برای x^{k-1} چنین نباشد.

.

۲. محاسبه جهت جستجو برای حرکت از نقطه در دست در ناحیه شدنی و ضریبی برای میزان دور شدن از نقطه اولیه جهت بهبود مقدار تابع هدف با حفظ شدنی بودن .

۳. به‌روز کردن نقطه کمینه تخمینی

آنچه گفته شد قالبی کلی از فرم الگوریتم‌های است که در برنامه‌ریزی خطی جهت یافتن نقطه بهینه به کار بسته می‌شود[۶].
در ادامه مفهوم پیچیدگی را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۱ پیچیدگی

هر روش حل مسئله‌ی بهینه‌سازی برای رسیدن به جواب به زمانی نیاز دارد، این زمان به عامل‌های زیادی بستگی دارد، از جمله‌ی این عامل‌ها می‌توان اندازه‌ی مسئله، نحوه‌ی حرکت مسئله درون ناحیه‌ی شدنی برای همگرا شدن به جواب، تعداد عملگرهای محاسباتی مورد نیاز مسئله و . . . را نام

برد. منظور از پیچیدگی بررسی این عامل‌ها برای الگوریتمی است که با آن مسائل بهینه‌سازی را حل می‌کنیم. بیانی دیگر از پیچیدگی که در اکثر مقالات مورد استفاده قرار می‌گیرد، یافتن کران بالایی برای تعداد تکرارهای مورد نیاز تارسیدن به جواب، برای مسئله‌ی خاصی است[۱۸].
برای تعریفی از مرتبه یک تابع که می‌تواند تابع شمارنده تعداد تکرارهای یک الگوریتم جهت یافتن جواب یک مسئله باشد تعریف زیر را عنوان می‌داریم . فرض کنید n, N اعضایی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشند و fg تابع‌هایی حقیقی باشند.

$$f(x) = O(g(x)) \ \ if \ \ \exists n, N \ \ \exists c \ \ s.t \forall \ N \geq n \quad f(n) \leq c(g(n))$$

نکته قابل توجه در بررسی پیچیدگی الگوریتم‌ها، نوع ضرایب مسئله است. آنچه در تمام روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی مورد توجه قرار می‌گیرد، بررسی پیچیدگی با فرض اولیه‌ی صحیح بودن تمامی ضرایب در مسئله است، این نوع از پیچیدگی را پیچیدگی بیتی می‌نامند. اگر فضای مورد نیاز برای درج یک عدد صحیح در حافظه کامپیوتر برابر باشد با $\lceil \log_{۲}^{|x|} \rceil + ۱$، برای حالت خطی کل فضای مورد نیاز را می‌توان با توجه به تعداد اعداد صحیح در مسئله به صورت $L = L_{\circ} + (mn+m+n)$، محاسبه کرد. بررسی پیچیدگی متناظر با اعداد حقیقی را پیچیدگی جبری می‌گویند، و یافتن الگوریتم‌های چندجمله‌ای با پیچیدگی از نوع جبری همچنان یک مسئله‌ی باز در ریاضی است[۱۸].

قضیه ۱.۱ *فرض کنید ضرایب مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی (A, b, c) باشند، که همه اعدادی صحیح هستند. طول این مساله را L می‌نامیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم*

$$L = L_{\circ} + (mn + m + n)$$

در معادله بالا $L_{\circ}$ مقدار فضای بیتی مورد نیاز برای ذخیره کردن خود اعداد صحیح است و $(mn + m + n)$ تعداد بیت‌های مورد نیاز از حافظه برای تعریف مسئله (شامل علامت‌های بین ضرایب) است. راس‌های نواحی شدنی اولیه و دوگان زیر مجموعه‌ای از فضای جواب است که در زیر تعریف کرده‌ایم.

$$\{(y, s) | A^t y + s = c, s \geq \circ\} ، \{x | Ax = b, x \geq \circ\}$$

با توجه به صحیح بودن ضرایب، این نقاط راسی نیز گویا هستند. با این توصیفات مولفه‌های غیرصفر x, s برای این راس‌ها از پایین به ۲^{-L} کراندار هستند.

برهان : جواب پایه برابر است با نقطه‌ای چون x_B از ناحیه‌ی شدنی که در همه قیود صدق می‌کند، و تمام قیدهایی که به ازای این مقدار در شرط تساوی صادق‌اند، مستقل خطی هستند. ماتریس ضرایب این جواب پایه را با B نشان می‌دهیم. اذعان می‌کنیم که هر نقطه‌ی راسی یک جواب پایه است[۶]. فرض کنید x_B جوابی است که از حل $Bx_B = b$ حاصل می‌شود، حداکثر تعداد بیت‌های مورد نیاز برای ذخیره‌ی (B, b) برابر است با $L_۰$. مولفه‌های x_B اعدادی گویا هستند، با مقسوم‌علیه مشترک Δ که این مقدار می‌تواند حداکثر برابر باشد با $۲^{(L_۰+m\log)}$ [۱۷]. هر مولفه از x_B یک ضریب صحیح از $۱/\Delta$ است که این مقدار از پایین به $۲^{-(L_۰+m\log m)}$ کراندار است. از آنجا که $m \leq n$، داریم.

$$L_۰ + m\log m \leq L_۰ + (mn + m + n) = L$$

و این برای مسئله‌ی اولیه قضیه را اثبات می‌کند. همچنین راس‌ها برای مسئله‌ی دوگان به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$y = B^{-t}c_B, s = \prod \begin{bmatrix} ۰ \\ c_N - N^t y \end{bmatrix} \qquad (۵.۱)$$

که در آن N شامل ستون‌هایی از ماتریس A است که متعلق به B نیستند. و c_B, c_N افرازی از بردار c هستند و $\prod$ ماتریس جایگشت مورد نیاز برای جدا کردن متغیرهاست به صورت تفکیک شده‌ی بالا. با استفاده از آنچه برای مسئله‌ی اولیه گفته شد، yی که در شرط (۵.۱) صدق کند برداری گویا است که درایه‌هایش مخرج مشترک Δ دارند با $۲^L \leq |\Delta|$. از آنجاکه درایه‌های c_N, N صحیح هستند، درایه‌های s ضرایبی از $۱/\Delta$ هستند. مشابه آنچه برای x گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که مولفه‌های s از پایین به ۲^{-L} کراندار هستند. □

با توجه قضیه‌ی ۵.۱ حاصلضرب درایه به درایه‌ی دو ماتریس نیز دارای کران پایینی متناسب با مقدار ۲^{-L} است. بنابراین در بررسی پیچیدگی‌ها سعی می‌شود که معیار توقف را ضریبی از این مقدار بگیرند. با توجه به وابستگی مقدار ۲^{-L} به اندازه مسئله، می‌توان در حالت کلی هر الگوریتم را از نظر پیچیدگی آن نسبت به مسائل مختلف سنجید و به درکی کامل از نحوه‌ی عملکرد الگوریتم نسبت به تغییر اندازه مسئله دست یافت.

با استفاده از آنچه گفته شد می‌توان الگوریتم‌ها را تقسیم‌بندی کرد، دسته‌ای از الگوریتم‌ها با افزایش اندازه مسئله متناظر با افزایش m, n، تعداد تکرارهای مورد نیاز آن‌ها تا رسیدن به جواب، به‌صورت نمایی رشد می‌کند. این بدین معنی است که گرچه ممکن است الگوریتمی برای دسته گسترده‌ای از مسائل تکرارهایی نمایی متناسب با اندازه مساله داشته باشد، ولی در حالت کلی روش‌هایی وجود دارند که این الگوریتم‌ها تکرارهایشان از نوع نمایی نسبت به اندازه‌ی مسئله رشد می‌کند.