دانشگاه کردستان

تقارن‌های دینامیکی در ساختارهای هسته‌ای

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

سمیه حیدری

استاد راهنما: دکتر محمد رضا ستاره

آذر ۸۸

به نام منشأ تفکر و دانش

تقدیم به همراهان همیشگی‌ام

پدر و مادر عزیزم

و برادرانم
محمد مهدی و امیرحسین

قدردانی و تشکر

از استاد راهنمای گرامی‌ام جناب آقای دکتر ستاره که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و راهنمایی‌هایشان در به انجام رسیدن این پایان نامه مثمر ثمر بوده است، سپاسگزارم.

از آقای خالدیان و خانم‌ها: ژیلا شاطرآبادی، سحر ناظری، افسانه عسگری، ادیبه مهدوی، لیلا صحرایی، زهره آذرمی، فرشته فعله گری و سمیه قادری تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پایان نامه به مطالعه‌ی برخی مفاهیم فیزیکی و تقارن‌های دینامیکی در ساختارهای هسته‌ای می‌پردازیم.
سپس معادله‌ی نسبیتی دیراک را که دارای تقارن‌های دینامیکی اسپین و شبه‌اسپین است، با برخی پتانسیل‌های فیزیکی حل می‌کنیم.
روش جدید NU را که روشی برای حل معادلات فوق هندسی درجه دو می‌باشد بررسی می‌کنیم، سپس با استفاده از این روش و حل معادله‌ی دیراک تحت تقارن اسپین و شبه اسپین به محاسبه‌ی توابع موج و طیف انرژی می‌پردازیم.

واژگان کلیدی: تقارن‌های دینامیکی، جبر لی، معادله‌ی نسبیتی دیراک، روش NU.

فهرست

۳ ساختار هسته

۶ حل معادله‌ی دیراک بابرخی پتانسیل‌های فیزیکی

فصل اول

مقدمه

۱—۱ مفهوم تقارن

تقارن نقش مهمی را در فیزیک ایفا می‌کند. یکی از کاربردهای مهم آن وجود قوانین پایستار است. برای هر تقارن پیوسته کلی، یعنی تبدیل سیستم فیزیکی که در هر زمان و مکان بطور یکسان عمل می‌کند، یک کمیت مستقل از زمان مرتبط وجود دارد. این ارتباط تا سال ۱۹۱۸ ناشناخته ماند تا اینکه امی ندر[۱] نظریه معروفش را که ارتباط تقارن و قوانین پایستگی است، اثبات کرد[۱].

به علت ناوردایی قوانین فیزیکی تحت تبدیلات فضایی، اندازه حرکت پایسته می‌ماند. به علت ناوردایی تبدیلات زمانی انرژی پایسته می‌ماند. در مکانیک کوانتوم حالت سیتم فیزیکی در فضای هیلبرت با $|\psi>$ توصیف می‌شود. تبدیل تقارنی منجر به اپراتور خطی R می‌گردد که روی این حالت ها اثر می‌کند و آن‌ها را به

[۱] Emmy Noether

حالت‌های جدید تبدیل می‌کند. مانند فیزیک کلاسیک تقارن می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد تا حالت‌های مجاز سیستم را تولید کند.

در مکانیک کوانتوم تبدیلات تقارنی خطی و اصل برهم‌نهی یک زوج قدرتمند هستند. از اینرو اگر $|\psi>$ یک حالت مجاز باشد $R|\psi>$ نیز یک حالت مجاز است که R یک اپراتور در فضای هیلبرت مطابق با تبدیلات تقارنی است. اکنون ما می‌توانیم حالت‌های برهم‌نهی یعنی $|\psi>+R|\psi>$ را در نظر بگیریم . قانون برهم‌نهی به این معنی است که می‌توانیم ترکیب خطی از حالت‌هایی که تحت تبدیلات تقارنی تبدیل می‌یابند، بسازیم. با روی هم قرار دادن تمام حالاتی که مرتبط با چرخش هستند حالت $|\phi>=\sum\limits_{R} R|\psi>$ را به دست می آوریم که ناوردای چرخشی است، زیرا

$$R|\phi>=\sum_{R'} RR'|\psi>=\sum_{R''} R''|\psi>=|\phi>$$

به کمک ابزار نظریه گروه بسیاری از نتایج تقارن آشکار می‌شود. کوانتوم مکانیک نوع جدید دیگری از تقارن که ذرات یکسان را معاوضه می‌کند آشکار کرد که این منجر به دسته بندی ذرات اولیه، به عنوان بوزون که تابع موج آن‌ها تحت تبدیل دو ذره یکسان ناورداست یا فرمیون‌ها که تابع موج آن‌ها وقتی دو ذره یکسان مبادله می‌شوند تغییر علامت می‌دهد. کوانتوم آماری چنین ذراتی متفاوت است که اشاره‌ای به رفتار آن‌ها در حالت جمعی دارد. حل دقیق مسئله بس ذره‌ای هسته‌ای بسیار دشوار است و حتی اگر جواب‌های دقیق در دسترس باشند بسیار پیچیده است که مقدار متوسط فیزیکی برای هسته باشد.

از زمان پیدایش مکانیک کوانتوم ایده‌ی تقارن نقش مهمی را در فیزیک پیدا کرد که بر فیزیک ساختار هسته‌ای تأثیر گذار بود، حوزه آن شامل استفاده از تکنیک‌های تقارن در ساخت مدل‌های هسته‌ای و مخصوصاً استفاده از تقارن دینامیکی و جبر مولد طیف است. به طور کلی مفهوم تقارن دینامیکی سیستم‌های بس ذره‌ای (یعنی هسته) بر اساس فرض اولیه تقارن با جبر دینامیکی مربوطه است که دارای این ویژگی است که هامیلتونی سیستم می‌تواند در ترم‌های مولدهای آن بیان شود و به این طریق طیف انرژی را تولید می‌کند، از این رو جبر دینامیکی اشاره به جبر تولید کننده طیف دارد. بررسی جامع تمام کاربردهای تقارن‌های دینامیکی در فیزیک هسته‌ای هنوز به عنوان یک کار عظیم مانده است و تلاشی برای آن صورت نگرفته است.

کاربردهای اخیر تقارن به پیدایش فیزیک هسته‌ای برمی‌گردد. ایده های جدید ویگنر[۲] ، راکه[۳] و الیوت [۴، ۵] را می‌توان به عنوان مدل‌های پیشرو در مدل‌های جدید جبر تولید کننده طیف مانند مدل بوزون برهم‌کنشی آریما[۲] و ایاچلو[۳] در نظر گرفت. مثال‌های متعددی را در متن بررسی می‌کنیم که نشان دهنده‌ی این است که هرچند این ایده‌ها قدیمی‌اند ولی الهام بخش آزمایش‌هایی در زمینه‌ی تحقیقاتی فیزیک هسته‌ای هستند.

۱−۲ تقارن در مکانیک کوانتوم

هامیلتونی H تحت مجموعه تبدیلات بی نهایت کوچک g_i که با هم جبر لی را تشکیل می‌دهند ناورداست، اگر

$$[\hat{H}, \hat{g}_i] = 0, \quad \forall \ \hat{g}_i \in G \tag{۱.۱}$$

در این صورت گفته می‌شود که هامیلتونی تقارن G دارد یا تحت G ناورداست. با توجه به نظریه گروه اپراتورهایی مانند $\hat{H}$ که با تمام مولدهای گروه G جابه جا می‌شود اپراتورهای کازیمیر نامیده می‌شوند، که با $\hat{C}_n[G]$ نمایش داده می‌شوند و n اشاره به درجه اپراتورها در g_i دارد.

در این پایان نامه ابتدا به مرور برخی مفاهیم هسته‌ای و برخی مدل‌های برهم‌کنشی با گروه‌های تقارنی خاص و تقارن‌های دینامیکی در ساختارهای هسته‌ای می‌پردازیم. در روند بررسی تقارن‌های دینامیکی تقارن‌های اسپین و شبه‌اسپین را بررسی می‌کنیم که منجر به حل معادله‌ی دیراک با برخی پتانسیل‌های فیزیکی می‌گردد. برای توصیف دینامیک نسبیتی ذرات با اسپین ۱/۲ از معادله‌ی دیراک استفاده می‌شود. این معادله دارای پتانسیل‌های اسکالر $S(r)$ و برداری $V(r)$ می‌باشد که در حالت تساوی دامنه‌های این دو پتانسیل با علامت‌های یکسان تقارن اسپین و با علامت مخالف تقارن شبه‌اسپین وجود دارد.

۲ Arima

۳ Iachello

روش جدید NU [۴] را بررسی می‌کنیم که روشی برای حل معادلات فوق هندسی درجه دو می‌باشد، سپس با بهره‌گیری از این روش معادله‌ی دیراک را برای پتانسیل دیویدسن تحت تقارن اسپین حل کردیم که در مجله‌ی $Int.\ J.\ Theor.\ Phys$ پذیرفته و چاپ شده است، سپس معادله‌ی دیراک را با پتانسیل‌های بدون بازتاب، روزن مورس و منینگ روزن حل کردیم که این کار نیز در مجله‌ی $Phys.\ Scripta$ پذیرفته و چاپ شده است.

---

[۴] Nikiforov-Uvarov

فصل دوم

مروری کوتاه بر گروه‌ها و جبرهای لی

نظریه گروه‌ها در برخی از شاخه‌های فیزیک نظری مانند مکانیک کلاسیک، نسبیت خاص و عام، فیزیک حالت جامد، نظریه عمومی کوانتوم و فیزیک ذرات بنیادی کاربرد های فراوانی دارند. نظریه گروه، ابزاری مناسب برای بیان تقارن‌هاست.

۲—۱ تعریف گروه

گروه مجموعه‌ای از عناصر متمایز است که با G نشان داده می‌شود و دارای یک قانون ترکیب (نظیر جمع، ضرب، ضرب ماتریس و...) است و این عمل را با $*$ نشان می‌دهیم، به طوری که خواص زیر در آن برقرار باشند:

الف: از ترکیب هر دو عنصر از گروه، عنصری متعلق به گروه به دست آید (بسته بودن)،

$$\forall A, B \in G; A * B \in G. \tag{۲.۱}$$

ب: عنصر همانی (e) متعلق به گروه وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall A \in G, e * A = A * e = A. \tag{۲.۲}$$

ج: برای هر عضو یک عضو وارون (A^{-1}) وجود داشته باشد،

$$\forall A \in G, \exists\, A^{-1} \in G; A * A^{-1} = A^{-1} * A = e. \tag{۲.۳}$$

د: شرکت پذیری تحت قانون ترکیب،

$$\forall A, B, C \in G; A * (B * C) = (A * B) * C. \tag{۲.۴}$$

تعداد عناصر یک گروه مرتبه‌ی گروه نامیده می‌شود، گروهی که شامل تعداد بی نهایت عنصر باشد گروه نامحدود نامیده می‌شود، که اگر این تعداد عناصر شمارش پذیر باشد (مانند کلیه اعداد صحیح) گروه گسسته است و اگر تعداد عناصر شمارش پذیر نباشد، گروه پیوسته است (مانند مجموعه‌ی اعداد حقیقی). عناصر یک گروه پیوسته می‌توانند توسط یک مجموعه پارامترهای حقیقی $a_1, a_2, ...a_n$ که حداقل یکی از آن‌ها به طور پیوسته در یک بازه‌ی معین تغییر می‌کند، مشخص شوند.

گروه تبدیلات سیستم‌های فیزیکی (نظیر دوران ها، انعکاس هاو...) برای فیزیک‌دانان اهمیت ویژه‌ای دارند. تبدیلی که یک سیستم فیزیکی را تغییر نمی‌دهد، یک تبدیل متقارن سیستم نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تمام تبدیل‌های متقارن یک سیستم، یک گروه تشکیل می‌دهند زیرا، اگر دو تبدیل متقارن سیستم را متوالیاً انجام دهیم سیستم تغییر ناپذیر می‌ماند، پس هر دو تبدیل متقارن سیستم، خود یک تبدیل تقارنی است (بسته بودن). می‌توان یک تبدیل همانی تعریف کرد که سیستم راتغییر نمی‌دهد و این تبدیل به مجموعه تعلق دارد. برای یک تبدیل متقارن معین، یک تبدیل معکوس وجود دارد که به مجموعه متعلق است. بالاخره تبدیلات متوالی یک سیستم از قانون شرکت پذیری تبعیت می‌کنند، پس مجموعه ی مورد نظر یک گروه است.

گروه کلیه تبدیلات تقارنی یک سیستم، یک گروه تقارنی سیستم نامیده می‌شود.

زیر گروه:

مجموعه‌ی H را یک زیر گروه از گروه G گوییم چنانچه H خود تحت همان قانون ترکیب G یک گروه باشد و

تمام عناصر H در G نیز باشند.

۲—۲ گروه لی

گروه لی گروهی است که توسط یک مجموعه از پارامترهای پیوسته با یک قانون ضربی که به طور همواری به پارامترها وابسته است بر چسب می‌خورد. یک عنصر عمومی از گروه لی به صورت $e^{i\sum_{\mu=1}^{n}\mu\hat{L}_\mu}$ است که $\hat{L}_\mu$ مولد گروه و μ پارامترها هستند که اندیس n بیانگر گروه لی n پارامتری است.
مولدهای گروه کوچکترین مجموعه عناصری که توان‌ها و حاصل ضرب‌هایشان تمام عناصر گروه را بدهد. در اینجا مولدها، عملگرهای هرمیتی هستند که تعدادشان برابر تعداد پارامترهاست.

۲—۳ جبر لی

جبر یک فضای برداری است با یک عمل (ضرب) که چنانچه اعضای جبر اتحاد ژاکوبی را که به صورت

$$[x_a,[x_b,x_c]]+[x_c,[x_a,[x_b]]+[x_b,[x_c,x_a]]=0, \tag{۲.۵}$$

است برآورده کنند تشکیل جبر لی می‌دهند. رابطه ای که بین اعضای جبر لی برقرار است:

$$[x_a,x_b]=if_{abc}x_c, \tag{۲.۶}$$

است که f_{abc} ثابت‌های ساختار گروه لی هستند و وابسته به پایه‌اند.

۲—۴ گروه $O(n)$ و $SO(n)$

مجموعه تبدیلات متعامد در فضای برداری حقیقی n بعدی، که در واقع ماتریس‌های متعامد حقیقی مرتبه n می‌باشند، تشکیل گروه دوران $O(n)$ می‌دهند. در حالتی که دترمینان ۱+ شود گروه متعامد خاص $SO(n)$ را داریم که یک زیرگروه از $O(n)$ می‌باشد و دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ مولد می‌باشد (در گروه $O(n)$ ماتریس واحد $n \times n$ نیز به تعداد مولدها افزوده می‌شود).

مولدها به صورت زیر است :

$$\hat{L}_{pr} = -i(x_p\frac{\partial}{\partial x_r} - x_r\frac{\partial}{\partial x_p}), \quad p, r = 1, ..., n \ , r > p. \tag{۲.۷}$$

۲—۵ گروه $SO(2)$

مجموعه دوران‌های یک دایره حول محوری که بر صفحه ی دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد گروه تک پارامتری و پیوسته‌ی $SO(2)$ را تشکیل می‌دهند. این پارامتر را می‌توان زاویه‌ی دوران در نظر گرفت که مقدار بازه‌ی $[0, 2\pi]$ را می‌گیرد.

یک عنصر از گروه ماتریس‌های متعامد مرتبه دو با دترمینان ۱+ را می‌توان به صورت

$$\begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi \\ -sin\phi & cos\phi \end{pmatrix} \tag{۲.۸}$$

در نظر گرفت، از این رو مولد گروه به می‌تواند به صورت

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{۲.۹}$$

باشد که یکی از ماتریس‌های اسپین پائولی است.

۲—۶ گروه $SO(3)$

جبر حاکم بر اعضای این گروه به صورت:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k, \qquad (۲.۱۰)$$

است که ثوابت ساختاری مؤلفه‌های تانسور ϵ_{ijk} هستند. به طور کلی چنانچه ترکیب خطی از از مولدها بسازیم به طور مثال از $\hat{J}_3, \hat{J}_2, \hat{J}_1$ به $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ برسیم روابط جابه‌جایی به صورت زیر تغییر می‌یابند:

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3, \qquad (۲.۱۱)$$

واضح است که ثوابت ساختاری متفاوت از ϵ_{ijk} می‌باشد. ثابت ساختار بستگی به نمایش گروه لی دارد. چنانچه سیستم تحت چرخش دارای تقارن باشد گروه چرخش $SO(3)$، گروه تقارنی است و $\hat{J}_3, \hat{J}_2, \hat{J}_1$ مولدهایی هستند که ویژه مقادیر را حفظ می‌کنند، یعنی اعداد کوانتومی پایستاری هستند از این رو $[\hat{H}, \hat{J}] = 0$.

۲—۷ گروه $U(n)$ و $SU(n)$

ماتریس یکانی U با n سطر و n ستون را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{U} = e^{iX} \qquad (۲.۱۲)$$

که X ماتریس هرمیتی با n سطر و ستون است. تمام این ماتریس‌ها تحت ضرب ماتریسی تشکیل گروه می‌دهند. این گروه $U(n)$ نامیده می‌شود که گروه یکانی در n بعد است و دارای n^2 پارامتر است. برای ماتریس یکانی U، $\hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$ است، بنابراین

$$det\hat{U}^\dagger det\hat{U} = (det\hat{U})^*(det\hat{U}) = 1 \quad , \quad \mid det\hat{U} \mid^2 = 1 \qquad (۲.۱۳)$$

از اینرو $det\hat{U} = 1$ است ($det\hat{U} = -1$ تشکیل گروه نمی‌دهد). چنانچه این شرط روی (۲.۱۲) اعمال شود نتیجه $TrX = 0$ حاصل می‌شود، پس X ماتریس‌های بدون رد هستند.

ماتریس‌هایی که با رابطه (۲.۱۳) مشخص می‌شوند تشکیل گروه لی می‌دهند، که گروه یکانی خاص در n بعد نامیده می‌شود و دارای n^2-1 پارامتر حقیقی است و با $SU(n)$ نمایش داده می‌شود. $SU(n)$ یک زیرگروه از $U(n)$ است.

۲–۸ جبر لی $SU(2)$

در حالتی که $n=2$ است ماتریس‌های بدون رد دو بعدی داریم که دارای $2^2-1=3$ مولد هستند، این‌ها همان ماتریس‌های پائولی هستند که مولدهای $SU(2)$ را تشکیل می‌دهند،

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۲.۱۴}$$

رابطه‌ی جابه‌جایی σ_iها به صورت $[\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j]=2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$ است، مناسب‌تر است که از $\hat{S}_i=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$ به عنوان مولدها استفاده شود پس رابطه جابه‌جایی به صورت $[\hat{S}_i,\hat{S}_j]=i\epsilon_{ijk}\hat{s}_k$ بیان می‌شود.

۲–۹ جبر لی $SU(3)$

گروه یکانی خاص در سه بعد دارای $3^2-1=8$ مولد $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_8$ است.

$$\hat{\lambda}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\lambda}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\lambda}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{۲.۱۵}$$

$$,$$

$$\hat{\lambda}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\lambda}_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

تمام این ماتریس‌ها هرمیتی و بدون رد هستند،

$$\hat{\lambda}_i^\dagger = \hat{\lambda}_i, \quad Tr\hat{\lambda}_i = 0. \tag{۲.۱۶}$$

رابطه‌ی جابه‌جایی مولدها

$$[\hat{\lambda}_j, \hat{\lambda}_k] = 2if_{jkl}\hat{\lambda}_l, \tag{۲.۱۷}$$

که مؤلفه‌های غیر صفر ثابت ساختار f_{jkl} عبارتند از:

$$\begin{gathered} f_{123} = 1, \\ f_{147} = f_{516} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{637} = \frac{1}{2}, \\ f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{gathered} \tag{۲.۱۸}$$